F 2557

1

TOMUL 34
1975

1976 MAR 12

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil,*
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct,*
Acad. I. ANTON,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. CF. MATEESCU,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție*

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 4 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei Str. Const. Mille nr. 15.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 34 1/1975

SUMAR

STUDII

Pag.

G. PRAISLER, Metoda variabilelor complexe aplicată plăcii infinite cu gaură întărită, având două axe de simetrie, solicitată la întindere 3

I. CONSTANTINESCU, Calculul tensiunilor în structuri axial-simetrice aflate în mişcare de rotaţie 13

M. V. SOARE, Contribuţii la calculul plăcilor ortotrope, cu nervuri de rigidizare pe o singură parte. (II) 31

M. GRĂDINARU, Un model de element finit pentru plăci curbe de rotaţie închise . . 45

D. COŞA, I. DEUTSCH, Stabilitatea cilindrului circular realizat din material elasto-plastic cu consolidare liniară, solicitat de o presiune radială urmăritoare. 55

MAGDALENA POSEA, Asupra eforturilor reale din îmbinările prin flanşe 77

V. ULMANU, D. RAŞEEV, T. HUIDU, Cercetări experimentale privind starea de eforturi în filetele racordurilor speciale 91

E. DECIU, P. DIMO, Metode aproximative numerice pentru studiul vibraţiilor neliniare cu un grad de libertate 113

CH. VASILIU, E. NEGRUŞ, Influenţa elasticităţii pneului asupra maniabilităţii automobilelor cu suspensie independentă 131

ŞT. ISPAS, C. ŢURCANU, AL. NICA, Consideraţii asupra posibilităţilor de limitare a emisiilor poluante generate de aeronavele moderne ; implicaţiile constructive. I Emisiile nocive ale proceselor de ardere 147

RECENZII 163

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóirat
436/1978

METODA VARIABILELOR COMPLEXE APLICATĂ PLĂCII INFINITE CU GAURĂ ÎNTĂRITĂ, AVÎND DOUĂ AXE DE SIMETRIE, SOLICITATĂ LA ÎNTINDERE

de G. PRAISLER

Studiul permite rezolvarea stării plane de eforturi unitare pentru placa infinită avînd o gaură prevăzută pe contur, cu o întăritură de secţiune transversală constantă. Rezultatele sînt valabile numai pentru găuri cu două axe de simetrie şi numai atunci cînd domeniul exterior găurii se poate transforma într-un cerc unitar, funcţia transformării fiind dată sub formă de polinom. Aceasta presupune o mare varietate de găuri cu importanţă practică ca cercuri, dreptunghiuri şi pătrate cu colţuri racordate, găuri de uşurare etc. Solicitarea este aceea de întindere uniformă după direcţiile de simetrie. Relaţiile obţinute sînt puse sub o formă convenabilă pentru folosirea unui calculator numeric.

1. INTRODUCERE

Problema găurilor neîntărite este rezolvată în literatura de specialitate prin folosirea ecuaţiilor cu privire la starea plană de eforturi sub formă complexă. Pînă nu de mult rezolvarea unor asemenea probleme prin metodele matematice ale teoriei elasticităţii prezenta multe greutăţi, necesitînd un volum mare de calcule. Folosirea calculatoarelor numerice nu numai că a uşurat studiul acestor probleme, dar a lărgit cercul lor, aşa cum este cazul structurilor cu găuri întărite. Astfel, de dată destul de recentă sînt lucrările lui Mansfield [2], Wittrick [6], [7], [8], [9] Wells [5] şi Hicks [1]. Aceştia, însă, s-au ocupat mai ales de întărirea decupărilor din cabinele de presiune, respectiv de realizarea unor găuri aşa-zise „neutre" (de coeficient de concentrare a eforturilor unitare egal cu unitatea), de obicei eliptice, pentru eforturi de presecurizare.

Această lucrare rezolvă problema pentru orice gaură întărită care are două axe de simetrie. În privinţa întăriturii găurii se face ipoteza că este „neîntreruptă" (de jur împrejurul găurii), „simetrică" (în raport cu planul plăcii), ceea ce elimină orice încovoiere a plăcii datorită eforturilor aplicate la infinit, „uniformă" (de secţiune constantă) şi „compactă" (dimensiunile secţiunii ei transversale sînt mici în comparaţie cu dimensiunile găurii), ceea ce conduce la observaţia că forţa tăietoare, poate fi neglijată în comparaţie cu forţa axială. Se mai presupune de asemenea că solicitarea constă din întindere uniformă după direcţiile de simetrie ale găurii.

2. ECUAȚIILE STĂRII PLANE DE EFORTURI UNITARE SUB FORMĂ COMPLEXĂ

Ecuațiile de bază ale stării plane de eforturi unitare sub formă complexă sînt cunoscute din teoria elasticității [4].

În funcție de variabilele complexe z și $\bar{z}$, definite de ecuațiile $z = x + iy$, și $\bar{z} = x - iy$, ecuația biarmonică pentru funcția de tensiuni a lui Airy devine

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \, \partial \bar{z}^2} = 0.$$

Soluția ei generală este

$$F = \bar{z}\, \Phi_0(z) + \overline{z\Phi_0(z)} + \chi_0(z) + \chi_0(z), \tag{1}$$

unde $\Phi_0(z)$ și $\chi_0(z)$ se numesc potențiale complexe, iar $\overline{\Phi_0(z)}$ și $\overline{\chi_0(z)}$ valorile lor conjugate.

Eforturile σ_x, σ_y, τ_{xy} sînt date de ecuațiile

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\frac{\partial^2 F}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 4\,[\Phi_0'(z) + \overline{\Phi_0'(z)}], \tag{2}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy} = 4\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 4\,[\bar{z}\Phi_0''(z) + \Psi_0'(z)], \tag{3}$$

unde $\Psi_0(z) = \chi_0'(z)$.

Componentele deplasării, u și v, după direcțiile x și y sînt date de relația

$$G(u + iv) = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}\,\Phi_0(z) - \overline{z\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0(z)}. \tag{4}$$

3. FUNCȚIA TRANSFORMĂRII ȘI DESPRE GEOMETRIA GĂURII

Domeniul din planul z exterior unei găuri cu două axe de simetrie poate fi transformat în domeniul din planul ζ exterior unui cerc unitar cu ajutorul funcției

$$z = \omega\,(\zeta) = R \sum_{k_1=0}^{2m-1} c_{2k_1-1}\,\zeta^{1-2k_1}, \tag{5}$$

în care $c_{-1} = 1$, R este o constantă avînd dimensiunile lungimii și a cărei valoare depinde de mărimea găurii. Dacă se alege ca axă x una dintre axele de simetrie, aceasta are ca efect că R și coeficienții c_{2k_1-1} sînt reali. În ceea ce privește m, acesta este un număr natural oarecare par sau impar; cu cît m, respectiv gradul polinomului este mai mare, cu atît și

funcţia realizează mai exact transformarea, dar şi dificultăţile de calcul cresc. De aceea, de obicei se face un compromis, alegîndu-se totuşi un număr limitat de termeni.

Ecuaţiile parametrice ale conturului găurii se pot obţine din funcţia transformării separînd partea reală şi imaginară a ecuaţiei (7). Dacă se notează coordonatele x şi y ale unui punct curent de pe conturul găurii cu XR şi respectiv cu YR, unde X şi Y sînt adimensionali, atunci

$$X = \sum_{k_1=0}^{2m-1} c_{2k_1-1} \cos (1 - 2k_1)\theta,$$
$$Y = \sum_{k_1=0}^{2m-1} c_{2k_1-1} \sin (1 - 2k_1)\theta. \tag{6}$$

Unghiul $\hat{\xi}$ dintre axa x şi tangenta la conturul găurii este dat de relaţia

$$e^{i\hat{\xi}} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{|d\sigma|},$$

unde $\sigma = e^{i\theta}$ şi reprezintă valoarea lui ζ pe cercul unitar. Aceasta înseamnă că

$$-ie^{i\hat{\xi}} = \frac{\sigma\,\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}, \tag{7}$$

în care

$$\omega'(\sigma) = \frac{R\,(\dot{X} + i\dot{Y})}{i\sigma} \tag{8}$$
$$|\omega'(\sigma)| = RP^{1/2},$$

iar

$$P = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2. \tag{9}$$

Raza de curbură a conturului găurii se exprimă ca fiind (fig. 3)

$$r = \frac{ds}{d\hat{\xi}} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\hat{\xi}},$$

unde $ds = |dz| = |\omega'(\sigma)|d\theta$ şi deci

$$\frac{R}{r} = P^{-3/2}(\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X}). \tag{10}$$

4. POTENȚIALELE COMPLEXE ALE FUNCȚIEI DE TENSIUNI

Funcțiile $\Phi_0(z)$ și $\Psi_0(z)$ pot fi scrise sub următoarea formă

$$\Phi_0(z) = \alpha z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots,$$
$$\Psi_0(z) = \beta z + \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots$$

Cazul studiat al găurii cu două axe de simetrie dintr-o placă solicitată la întindere uniformă, după direcția x și y sau amîndouă, corespunde tipului de simetrie ilustrat în figura 1. În acest caz expresiile lui $\Phi_0(z)$ și $\Psi_0(z)$ conțin numai termeni corespunzători puterilor impare ale lui z și de asemenea toți coeficienții sînt reali, adică

$$\Phi_0(z) = \alpha z + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_3 z^{-3} + \cdots; \qquad \alpha_n \text{ real},$$
$$\Psi_0(z) = \beta z + \beta_1 z^{-1} + \beta_3 z^{-3} + \cdots; \qquad \beta_n \text{ real}. \tag{11}$$

Într-adevăr, aceste expresii conduc la egalitățile

$$\Phi_0(z) = \overline{\Phi}_0(z) = -\overline{\Phi}_0(-z),$$
$$\Psi_0(z) = \overline{\Psi}_0(z) = -\overline{\Psi}_0(-z),$$

și ținînd cont de relația (4) se deduce că

$$u_A + \mathrm{i}\, v_A = u_B - \mathrm{i}\, v_B = -(u_C - \mathrm{i}\, v_C),$$

de unde

$$u_A = u_B = -u_C,$$
$$v_A = -v_B = v_C.$$

Dacă în relațiile (11) se introduce expresia (5) a lui z și dacă se ține cont de condițiile de solicitare

$$\sigma_x|_{z=\infty} = p_x; \qquad \sigma_y|_{z=\infty} = p_y; \qquad \tau_{xy}|_{z=\infty} = 0,$$

se poate scrie că

$$\Phi_0(z) = \Phi(\zeta) = R\left[\frac{1}{8}(p_x + p_y)\zeta + a_1\zeta^{-1} + a_3\zeta^{-3} + \dots\right],$$
$$\Psi_0(z) = \Psi(\zeta) = R\left[\frac{1}{4}(p_y - p_x)\zeta + b_1\zeta^{-1} + b_3\zeta^{-3} + \cdots\right]. \tag{12}$$

Coeficienții a_n și b_n sînt reali. Rezolvarea problemei se reduce de fapt la determinarea lor. Pentru aceasta se va face apel la condițiile de contur.

5. CONDIȚII DE CONTUR

5.1. PRIMA CONDIȚIE DE CONTUR

Să considerăm echilibrul unui element ds de pe conturul întărit, împreună cu elementul de placă corespunzător (fig. 2). Ecuațiile de echilibru după direcțiile x și y sînt

$$(N + \mathrm{d}N)\cos(\hat{\xi} + \mathrm{d}\hat{\xi}) - N\cos\hat{\xi} = \tau_{xy}\, t\mathrm{d}x - \sigma_x t\mathrm{d}y,$$

$$(N + \mathrm{d}N)\sin(\hat{\xi} + \mathrm{d}\hat{\xi}) - N\sin\hat{\xi} = \sigma_y t\mathrm{d}x - \tau_{xy} t\mathrm{d}y,$$

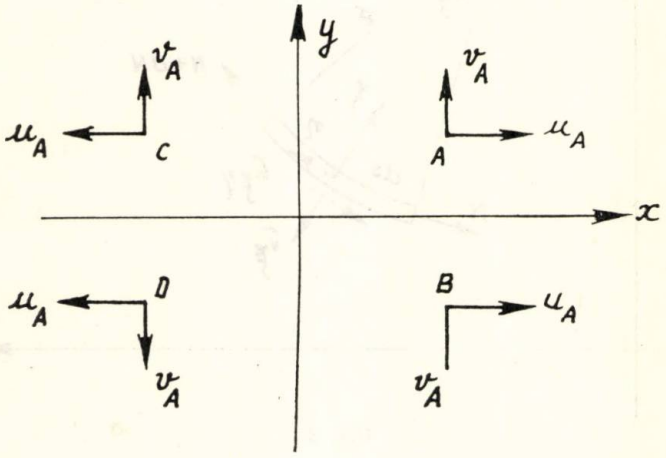


Fig. 1

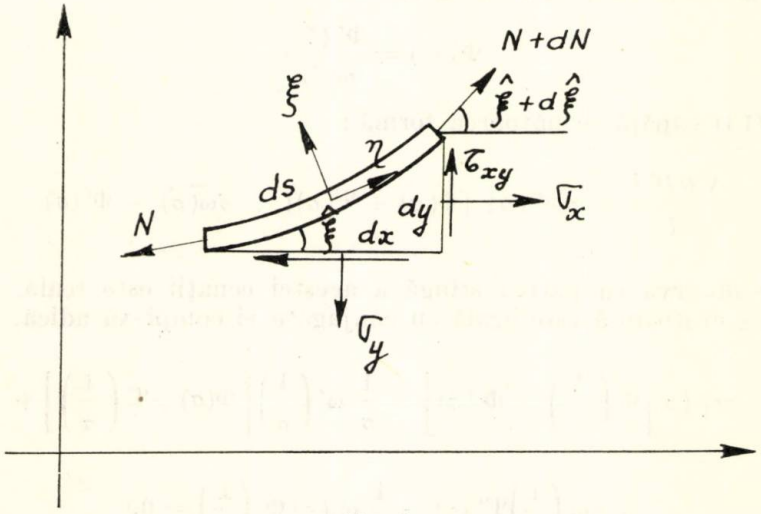


Fig. 2

unde t este grosimea plăcii. Exprimînd eforturile unitare cu ajutorul funcţiei de tensiuni (1) şi adunînd prima dintre aceste relaţii cu a doua multiplicată prin $(-i)$ se găseşte relaţia

$$\frac{N}{2t} = -\, ie^{i\hat{\xi}} \left[\overline{\Phi_0(z)} + \bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)\right]. \tag{13}$$

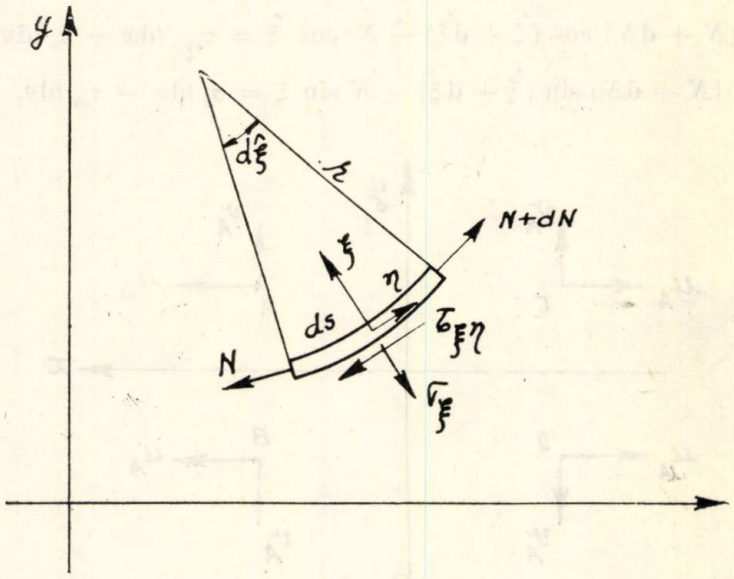


Fig. 3

Dacă pe conturul găurii ζ devine $\sigma = e^{i\theta}$, dacă $(-ie^{i\hat{\xi}})$ se înlocuieşte cu relaţia (7) şi dacă se observă că

$$\Phi_0'(z) = \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega(\zeta)},$$

relaţia (13) capătă următoarea formă:

$$\frac{NRP^{1/2}}{2t} = \sigma\omega'(\sigma)\left[\overline{\Phi(\sigma)} + \Psi(\sigma)\right] + \sigma\overline{\omega(\sigma)} + \Phi'(\sigma). \tag{14}$$

Se observă că partea stîngă a acestei ecuaţii este reală. Rezultă că partea ei dreaptă este egală cu conjugata ei complexă adică,

$$\sigma\omega'(\sigma)\left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \Phi(\sigma)\right] - \frac{1}{\sigma}\,\omega'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\left[\Phi(\sigma) + \Psi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right] + \tag{15}$$

$$+ \sigma\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)\Psi'(\sigma) - \frac{1}{\sigma}\,\omega(\sigma)\,\Phi'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.$$

Dacă această relaţie se înmulţeşte cu $d\sigma/2\pi i\,(\sigma-\zeta)$, unde $|\zeta| \geqslant 1$ şi se integrează de-a lungul cercului unitar, pe baza proprietăţilor formulei integrale a lui Cauchy se obţine prima condiţie de contur sub următoarea formă:

$$\zeta\omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta) = \frac{1}{8}(p_x + p_y)\left[\frac{1}{\zeta}\omega(\zeta) + \zeta\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \omega'(\zeta) - \omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\zeta}\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi(\zeta) - \zeta\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta) + b_1 R^2 +$$

$$+ R^2 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{4m-5}\left[a_n \sum_{k_1=\frac{n+3}{2}}^{2m-1}(2k_1 - 1 - n)c_{2k_1-1}\left(\zeta^{n+1-2k_1} + \zeta^{2k_1-1-n}\right)\right]. \quad (16)$$

În acest fel, funcţia $\Psi(\zeta)$ a fost exprimată prin funcţia $\Phi(\zeta)$ şi coeficientul b_1, ceea ce înseamnă că singurii coeficienţi care au rămas deocamdată necunoscuţi sînt b_1 şi a_n.

5.2. A DOUA CONDIŢIE DE CONTUR

Luîndu-se în consideraţie un element din întăritura găurii (fig. 3), ecuaţiile lui de echilibru pentru direcţiile ξ şi η sînt

$$N \sin\frac{d\hat{\xi}}{2} + (N + dN)\sin\frac{d\hat{\xi}}{2} - \sigma_\xi\, t\,ds = 0,$$

$$N\cos\frac{d\hat{\xi}}{2} - (N + dN)\cos\frac{d\hat{\xi}}{2} + \tau_{\xi\eta}\, t\,ds = 0,$$

şi care conduc la expresiile

$$\sigma_\xi = \frac{N}{rt}, \quad (17)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{1}{t}\frac{dN}{ds}, \quad (18)$$

unde r este raza de curbură curentă a conturului găurii.

Pe conturul găurii deformaţia întăriturii şi deformaţia plăcii trebuie să fie identice, adică cea de-a doua condiţie de contur este

$$\frac{N}{A} = \sigma_\eta - \mu\sigma_\xi, \quad (19)$$

unde A este aria secțiunii transversale a întăriturii găurii, iar ξ și η direcțiile arătate în figura 3.

Combinînd relațiile (17) și (19) se poate scrie cea de-a doua condiție de contur sub forma

$$\frac{N}{RtP^{1/2}} = \frac{1}{2} Q\,(\sigma_\xi + \sigma_\eta), \tag{20}$$

unde

$$Q = \frac{2P}{KP^{3/2} + (1+\mu)(\dot{X}\ddot{Y} - \dot{Y}\ddot{X})}, \tag{21}$$

ar

$$K = \frac{Rt}{A}. \tag{22}$$

În ceea ce privește suma eforturilor unitare de pe conturul găurii, aceasta se poate determina ușor, cu ajutorul relației (2) ținînd cont că $\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y$. În acest caz se obțin că

$$\frac{P}{8}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) = -\frac{1}{8}(p_x + p_y)\sum_{k_1=0}^{2m-1}(2k_1 - 1)\, c_{2k_1-1}\cos 2k_1\theta +$$

$$+ \sum_{n=1,3,5,..}^{\infty}\left[na_n\sum_{k_1=0}^{2m-1}(2k_1 - 1)\, c_{2k_1-1}\cos\,(n+1-2k_1)\theta\right]. \tag{23}$$

Expresia forței axiale N din întăritură capătă următoarea formă pentru cazul de solicitare (simetrie) studiat, dacă se folosește relația (14):

$$\frac{NP^{1/2}}{4Rt} = \frac{1}{8}(p_x + p_y)\sum_{k_1=0}^{2m-1} c_{2k_1-1}\cos 2k_1\theta + \frac{1}{8}(p_y - p_x)(2\cos 2\theta - c_1) +$$

$$+ \frac{1}{2}b_1 - \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\left[a_n\sum_{k_1=0}^{2m-1}(2k_1 - 1)c_{2k_1-1}\cos\,(n+1-2k_1\theta)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1,3,5..}^{4m-5}\left[a_n\sum_{k=\frac{n+3}{2}}^{2m-1}(2k_1 - 1 - n)\, c_{2k_1-1}\cos\,(2k_1 - 1 - n)\theta\right]. \tag{24}$$

În sfîrșit, constantele b_1 și a_n se pot determina dacă se ia în considerație cea de-a doua condiție de contur (20), în care se înlocuiește expresia sumei $(\sigma_\xi + \sigma_\eta)$ dată de relația (23) și a lui N dată de relația (24):

$$\frac{1}{2}b_1 - \sum_{n=1,3,5,..}^{\infty}\left[a_n(1+nQ)\sum_{k_1=0}^{2m-}(2k_1 - 1)\, c_{2k_1-1}\cos\,(n+1-2k_1)\theta\right] +$$

$$+\sum_{n=1,3,5..}^{4m-5}\left[a_n\sum_{k_1=\frac{n+3}{2}}^{2m-1}(2k_1-1-n)\,c_{2k_1-1}\cos\,(k_1-1-n)\theta\right]+$$

$$+\frac{1}{8}\,(p_x+p_y)\sum_{k_1=0}^{2m-1}c_{2k_1-1}\,[1+(2k_1-1)Q]\cos\,2k_1\theta+$$

$$+\frac{1}{8}\,(p_y-p_x)\,(2\cos\,2\theta-c_1)=0. \qquad (25)$$

Teoretic vorbind, această ecuaţie permite determinarea necunoscutelor b_1 şi a_n. Practic însă, este imposibil să se obţină un rezultat numai prin simplul procedeu al identificării coeficienţilor diferiţilor termeni în cosinus, deoarece Q este de asemenea o funcţie de θ. Chiar dacă aceste funcţii se dezvoltă în serii trigonometrice, rezultă un număr infinit de ecuaţii, fiecare avînd un număr infinit de necunoscute. De aceea este de recomandat o soluţie aproximativă prin reţinerea unui număr finit de coeficienţi a_n (să-i spunem M) şi satisfacerea condiţiei(25) într-un număr de $(M+1)$ puncte din domeniul $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. În acest fel se obţine un sistem de ecuaţii algebrice liniare cu ajutorul căruia se determină valorile b_1 şi a_n. De fapt, acest procedeu este foarte potrivit pentru folosirea unui calculator numeric. În acest caz se poate scrie un program general care să permită determinarea eforturilor unitare în jurul găurii, specificînd coeficienţii c_{2k_1-1} ai funcţiei transformării, aria A a secţiunii transversale a întăriturii şi starea de încărcare (la infinit).

Primită la redacţie la 9 decembrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. R. Hicks, *Reinforced Holes in Stressed Plates*, Journal of the Royal Aeronautical Society. Vol 61, October, 1957.
2. E.H. Mansfield, *Neutral Holes in Plane Sheet. Reinforced Holes wich are Elastically Equivalent to the Uncut Sheet*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Matematics, *6* (1953).
3. G.M. Savin, *Raspredelenie naprjaženij okolo otverstij*, Izd. Naukovo dumka, Kiev, 1968.
4. S. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, 2nd ed, Mc. Graw-Hill, NewYork, 1961.
5. A.A. Wells, *On the Plane Stress Distribution in an Infinite Plate with a Rim — Stiffened Elliptical Opening*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Matematics, **3** (1960).
6. W.H. Wittrick, *Stresses Around Reinforced Elliptical Holes with Aplications to Presure Cabin Windows*, The Aeronautical Quarterly, **X** (1959).
7. — *The Stresses Around Reinforced Elliptical Holes in Plane Sheet*, Aeronautical Research Laboratories Report A.H.L. SM 267.
8. — *Stress concentration for a family of uniformly reinforced square holes with rounded corners*, The Aeronautical Quarterly, **XIII**, *3* (1962).
9. — *Analysis of Stress Concentrations at Reinforced Holes in Infinite Sheets*, Aeronautical Quarterly, **XI** (1960).

CALCULUL TENSIUNILOR ÎN STRUCTURI AXIAL-SIMETRICE AFLATE ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE

de I. CONSTANTINESCU

Institutul Politehnic Bucureşti

Se prezintă calculul tensiunilor într-o structură formată dintr-un fund plan şi o manta cilindrică care are şi o porţiune în consolă. Solicitarea este dată de forţele de inerţie ce acţionează asupra structurii ca urmare a rotirii acesteia faţă de axa longitudinală. Mantaua propriu-zisă s-a considerat în trei variante : cu lungime semi-infinită, cu lungime finită şi margine liberă, respectiv cu lungime finită şi simetrie longitudinală.
Valorile tensiunilor adimensionale, exprimate funcţie de parametrii adimensionali care definesc geometria structurii, s-au determinat cu ajutorul unui calculator electronic numeric. Rezultatele obţinute se dau în lucrare sub formă de grafice.

1. INTRODUCERE

În componenţa unor instalaţii, maşini, aparate industriale sau de laborator intră deseori structuri care se află în mişcare de rotaţie, ca tobe, carcase, rotoare etc. Lucrarea de faţă îşi propune să determine starea de tensiune dintr-o astfel de structură, axial-simetrică, formată din o manta cilindrică şi un fund plan. Mantaua are o porţiune 0 — 1, de lungime L_1, în consolă (fig. 1). Pentru porţiunea 1—2 a mantalei s-au considerat trei variante :

a — lungime semi-infinită (fig. 1*a*) ;

b — lungime L_2 şi contur liber în 2 (fig. 1 *b*) ;

c — lungime L_2, structura fiind simetrică faţă de 2 (fig. 1*c*).

Structura s-a presupus omogenă, cu pereţi subţiri, realizată dintr-un material cu coeficientul de contracţie transversală μ, modulul de elasticitate longitudinal E şi greutatea volumică γ.

Solicitarea este cea datorită forţelor de inerţie aplicate structurii ca urmare a rotirii acesteia faţă de axa longitudinală, cu frecvenţa de rotaţie, ω. Astfel, asupra celor două învelişuri cilindrice 0—1 şi 1—2, vor acţiona sarcinile radiale, uniform distribuite :

$$f_1 = \frac{\gamma}{g} R_1 h_1 \omega^2, \qquad (1')$$

respectiv

$$f_2' = \frac{\gamma}{g} R_2 h_2 \omega^2,$$

în care g este accelerația gravitației, iar R_1, h_1, R_2, h_2 sînt notate pe figura 1.

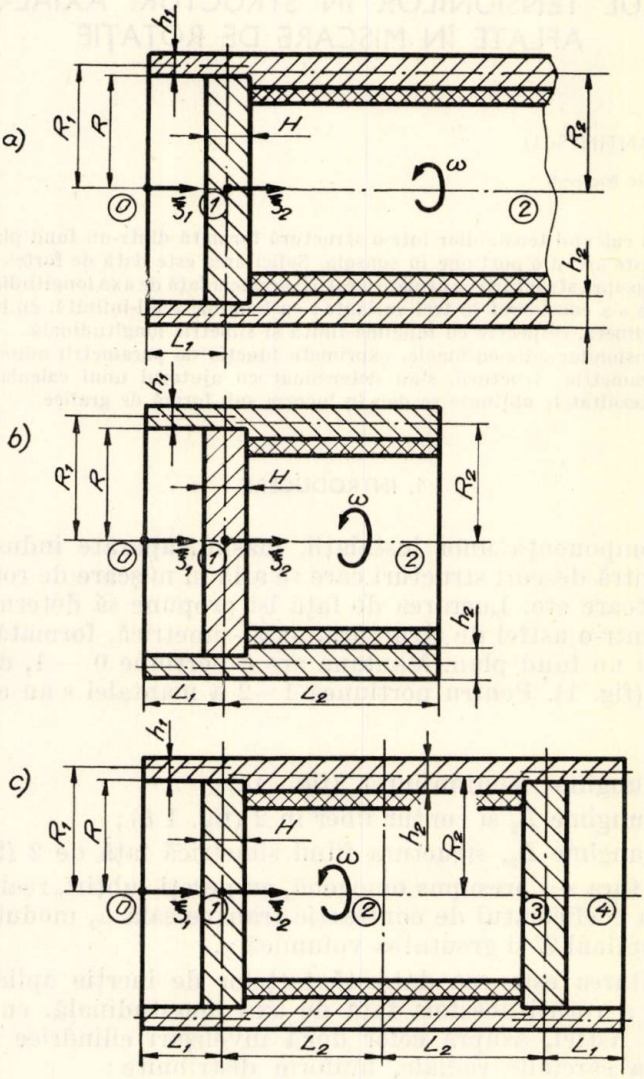


Fig. 1

În interiorul învelișului cilindric 1—2 s-a considerat un mediu ce se supune centrifugării, acesta producînd o sarcină radială suplimentară:

$$f_2'' = kf_2',$$

prin urmare sarcina radială totală a învelișului 1—2 va fi

$$f_2 = \frac{\gamma}{g} R_2 h_2 \omega^2 (1 + k). \tag{1''}$$

Pentru deplasarea radială $w_1(\xi_1)$ a învelișului cilindric scurt 0—1, aflat în consolă, cu contur liber în origine, se va folosi expresia

$$w_1(\xi_1) = C_1 V_1(\xi_1) + C_2 V_2(\xi_1) + \frac{\gamma \omega^2}{gE} R_1^3, \tag{2}$$

iar pentru învelișul 1—2, expresia

$$w_2(\xi_2) = e^{-\xi_2}(C_3 \sin \xi_2 + C_4 \cos \xi_2) + \frac{\gamma \omega^2}{gE} R_2^3 (1 + k), \tag{3}$$

în cazul variantei *a* și expresia

$$w_2(\xi_2) = C_3 V_1(\xi_2) + C_4 V_2(\xi_2) + C_5 V_3(\xi_2) + C_6 V_4(\xi_2) + \frac{\gamma \omega^2}{gE} R_2^3 (1+k), \tag{4}$$

pentru variantele *b* și *c*.

În expresiile (2)—(4),

$$\xi_1 = m_1 x_1, \quad \xi_2 = m_2 x_2, \tag{5}$$

sînt abscisele adimensionale,

$$m_1 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_1^2 h_1^2}}, \qquad m_2 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_1^2 h_2^2}} \tag{6}$$

și $V_1(\xi)$, $V_2(\xi)$, $V_3(\xi)$, $V_4(\xi)$ sînt funcțiile Krîlov.

Fundul plan al structurii este de tipul unei plăci circulare solicitate la întindere de forțele de inerție și de forța radială de legătură T_r precum și la încovoiere de către momentul de legătură M_r (fig. 2).

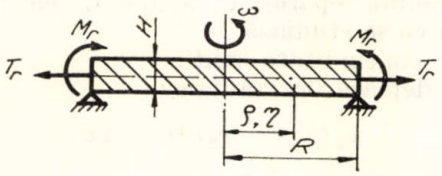


Fig. 2

Pentru scrierea condițiilor de continuitate la îmbinarea fundului cu cele două învelișuri cilindrice, sînt necesare expresiile eforturilor și deplasărilor fundului pe contur. Folosind soluțiile unor probleme simple, tra-

tate în lucrările [1], [2], [3] și însumînd efectele, se obțin următoarele expresii pentru :

— intensitățile momentelor încovoietoare :

$$M_r(\eta) = M_t(\eta) = M_r, \tag{7}$$

— rotirea pe contur ($\eta = 1$) :

$$\theta_{pl} = 12\,(1-\mu)\frac{M_r R}{EH^3}, \tag{8}$$

— deplasarea radială pe contur ($\eta = 1$) :

$$\Delta R = (1-\mu)\frac{R}{E}\left(\frac{T_r}{H} + \frac{\gamma\,\omega^2 R^2}{4g}\right), \tag{9}$$

în care

$$\eta = \frac{\rho}{R} \tag{10}$$

este abscisa adimensională.

Tensiunile în placă, datorite solicitării compuse de întindere și încovoiere, sînt :

$$\begin{aligned}\sigma_r(\eta) &= \frac{T_r}{H} \pm \frac{6\,M_r}{H^2} + \frac{\gamma\,\omega^2}{8g}(3+\mu)R^2\,(1-\eta^2),\\ \sigma_t(\eta) &= \frac{T_r}{H} \pm \frac{6M_r}{H^2} + \frac{\gamma\,\omega^2}{8g}(3+\mu)\,R^2\left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\,\eta^2\right).\end{aligned} \tag{11}$$

2. DETERMINAREA CONSTANTELOR DE INTEGRARE ȘI A EFORTURILOR DE LEGĂTURĂ

Constantele de integrare C_1, C_2, ..., C_6 din relațiile (2) — (4) și intensitățile eforturilor T_r și M_r se determină scriind condițiile de continuitate la îmbinarea fundului cu cele două învelișuri cilindrice. Pentru aceasta s-au reprezentat separat, în figura 3, cele trei elemente componente ale structurii ce se studiază.

Condițiile de continuitate sînt :

— egalitatea deplasărilor radiale :

$$w_1(\lambda_1) = w_2(0) = \Delta R,$$

în care

$$\lambda_1 = \xi_{1\max} = m_1 L_1 = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{L_1}{R_1}\sqrt{\frac{R_1}{h_1}}, \tag{12'}$$

— egalitatea rotirilor :

$$\theta_{c1}(\xi_1 = \lambda_1) = \theta_{c2}(\xi_2 = 0) = -\theta_{pl}(\eta_l = 1),$$

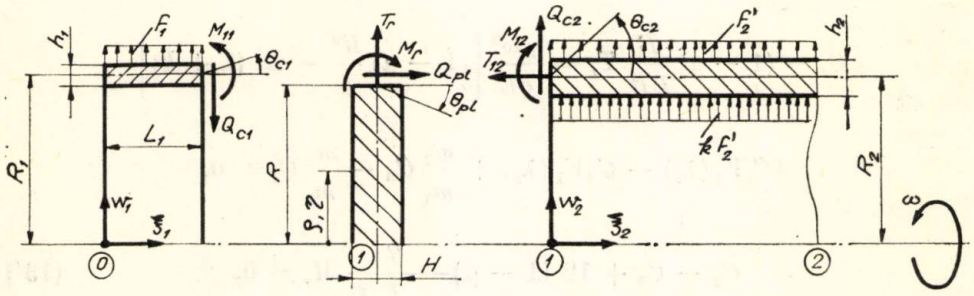


Fig. 3

— ecuația de echilibru a momentelor :

$$R_1 M_{11}(\xi_1 = \lambda_1) - R_2 M_{12}\ (\xi_2 = 0) - RM_r = 0,$$

— ecuația de echilibru a forțelor pe direcția radială :

$$R_1 Q_{c1}(\xi_1 = \lambda_1) - R_2 Q_{c2}(\xi_2 = 0) - RT_r = 0,$$

— ecuația de echilibru a forțelor pe direcția axială :

$$T_{12} = 0,$$

această condiție implicînd ipoteza unei cantități mici de mediu supus centrifugării (aflat în interiorul învelișului 1—2).

Pentru cazurile cînd învelișul 1—2 este scurt, se mai scriu condițiile la limită :

— varianta b (contur liber în 2) :

$$M_{12}(\xi_2 = \lambda_2) = 0,$$

$$Q_{c2}(\xi_2 = \lambda_2) = 0,$$

— varianta c (structura este simetrică față de 2) :

$$\theta_{c2}(\xi_2 = \lambda_2) = 0,$$

$$Q_{c2}(\xi_2 = \lambda_2) = 0.$$

Avînd în vedere relațiile de calcul ale eforturilor și rotirilor învelișurilor cilindrice precum și relațiile (2) — (10), condițiile de continuitate și condițiile la limită de mai sus duc la următorul sistem de ecuații :

BUDAPEST 1848 EGYETEM KÖNYVTÁR

— pentru varianta *a* (învelişul 1—2 de lungime semiinfinită):

$$C_1V_1(\lambda_1) + C_2V_2(\lambda_1) - C_4 = \frac{\gamma\omega^2}{gE}[R_2^3(1+k) - R_1^3],$$

$$C_4 - (1-\mu)\frac{R}{EH}T_r = \frac{\gamma\omega^2}{gE}\left[(1-\mu)\frac{R^3}{4} - R_2^3(1+k)\right],$$

$$4C_1V_4(\lambda_1) - C_2V_1(\lambda_1) + \frac{m_2}{m_1}C_3 - \frac{m_2}{m_1}C_4 = 0,$$

$$C_3 - C_4 + 12(1-\mu)\frac{R}{m_2EH^3}M_r = 0, \qquad (13')$$

$$\frac{R_1}{R_2}[4C_1V_3(\lambda_1) + 4C_2V_4(\lambda_1)] - 2\frac{m_2^2D_2}{m_1^2D_1}C_3 + \frac{1}{m_1^2D_1}\cdot\frac{R}{R_2}M_2 = 0,$$

$$\frac{R_1}{R_2}[4C_1V_2(\lambda_1) + 4C_2V_3(\lambda_1)] + 2\frac{m_2^3D_2}{m_1^3D_1}C_3 + 2\frac{m_2^3D_2}{m_1^3D_1}C_4 -$$

$$-\frac{1}{m_1^3D_1}\cdot\frac{R}{R_2}T_3 = 0,$$

în care

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_2 = \frac{Eh_2^3}{12(1-\mu^2)} \qquad (14)$$

sînt rigidităţile la încovoiere ale învelişurilor cilindrice;

— pentru variantele *b* şi *c* (învelişul 1—2 de lungime L_2):

$$C_1V_1(\lambda_1) + C_2V_2(\lambda_1) - C_3 = \frac{\gamma\omega^2}{gE}[R_2^3(1+k) - R_1^3],$$

$$C_3 - (1-\mu)\frac{R}{EH}T_r = \frac{\gamma\omega^2}{gE}\left[(1-\mu)\frac{R^3}{4} - R_2^3(1+k)\right],$$

$$4C_1V_4(\lambda_1) - C_2V_1(\lambda_1) + \frac{m_2}{m_1}\cdot C_4 = 0,$$

$$C_4 + 12(1-\mu)\frac{R}{m_2EH^3}M_r = 0, \qquad (13'')$$

$$\frac{R_1}{R_2}[4\,C_1V_3(\lambda_1)+4\,C_2V_4(\lambda_1)]+\frac{m_2^2D_2}{m_1^2D_1}C_5+\frac{1}{m_1^2D_1}\cdot\frac{R}{R_2}M_r=0,$$

$$\frac{R_1}{R_2}[4\,C_1V_2(\lambda_1)+4\,C_2V_3(\lambda_1)]+\frac{m_2^3D_2}{m_1^3D_1}C_6+\frac{1}{m_1^3D_1}\cdot\frac{R}{R_2}T_r=0,$$

$$C_3V_2(\lambda_2)+C_4V_3(\lambda_2)+C_5V_4(\lambda_2)-\frac{1}{4}C_6V_1(\lambda_2)=0,$$

la care se adaugă ecuația

$$4\,C_3V_3(\lambda_2)+4\,C_4V_4(\lambda_2)-C_5V_1(\lambda_2)-C_6V_2(\lambda_2)=0$$

pentru varianta *b* (margine liberă în 2), sau ecuația

$$-4\,C_3V_4(\lambda_2)+C_4V_1(\lambda_2)+C_5V_2(\lambda_2)+C_6V_3(\lambda_2)=0$$

pentru varianta *c* (structură simetrică față de 2).

În ecuațiile (13″) s-a notat

$$\lambda_2=\xi_{2\max}=m_2L_2=\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{L_2}{R_2}\sqrt{\frac{R_2}{h_2}}. \tag{12″}$$

3. CALCULUL TENSIUNILOR

Se aduc simplificări importante în calculul tensiunilor, dacă se introduc următoarele mărimi adimensionale:

— constantele de integrare adimensionale:

$$\bar{C}_i=C_i\frac{gE}{\gamma\omega^2R_2^3},\quad i=1,2,6,\ldots, \tag{15}$$

— intensitățile eforturilor adimensionale:

$$\bar{M}_r=M_r\frac{g}{\gamma\omega^2HR_2^3};\quad \bar{T}_r=T_r\cdot\frac{g}{\gamma\omega^2HR_2^2}, \tag{16}$$

— tensiunile adimensionale:

$$\bar{\sigma}=\sigma\cdot\frac{g}{\gamma\omega^2R_2^2(1+k)}, \tag{17}$$

în care σ poate fi oricare din tensiunile principale în elementul considerat, calculate pe suprafețele exterioară sau interioară ale structurii.

Tensiunile din cele două învelişuri cilindrice s-au notat cu doi indici, notaţie care s-a folosit şi pentru intensităţile momentelor şi forţelor normale, reprezentate în figura 3. Primul indice arată direcţia tensiunii: „1" pentru direcţia longitudinală, „2" pentru direcţia circumferenţială; al doilea indice arată la care înveliş se referă: „1" pentru învelişul 0—1 şi „2" pentru învelişul 1—2.

Tensiunile din placă au primit indicele r pentru direcţia radială şi indicele t pentru cea circumferenţială.

Fiecărei tensiuni i s-a atribuit menţiunea „int" sau „ext", pentru a preciza că este calculată într-un punct de pe suprafaţa interioară, respectiv exterioară a structurii.

Cu notaţiile (15) — (17), tensiunile adimensionale, calculate pentru solicitarea compusă de întindere şi încovoiere, într-un punct de abscisă oarecare, sînt:

— în învelişul cilindric 0—1:

$$\bar{\sigma}_{11} = \mp \frac{6}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+k} [\bar{C}_1 V_3(\xi_1) + \bar{C}_2 V_4(\xi_1)],$$

$$\bar{\sigma}_{21} = \frac{1}{1+k} \left\{ \frac{R_2}{R_1} [\bar{C}_1 V_1(\xi_1) + \bar{C}_2 V_2(\xi_1)] + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right\} \pm \mu \bar{\sigma}_{11}, \tag{18}$$

— în învelişul cilindric 1—2:

pentru varianta a

$$\bar{\sigma}_{12} = \pm \sqrt{\frac{3}{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{1+k} e^{-\xi_2} (-\bar{C}_3 \cos \xi_2 + \bar{C}_4 \sin \xi_2),$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{1+k} e^{-\xi_2} (\bar{C}_3 \sin \xi_2 + \bar{C}_4 \cos \xi_2) + 1 \pm \mu \bar{\sigma}_{12}, \tag{19'}$$

pentru variantele b şi c

$$\bar{\sigma}_{12} = \pm \frac{3}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1}{1+k} [-4\bar{C}_3 V_3(\xi_2) - 4\bar{C}_4 V_4(\xi_2) + \bar{C}_5 V_1(\xi_2) + \bar{C}_6 V_2(\xi_2)],$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{1+k} [\bar{C}_3 V_1(\xi_2) + \bar{C}_4 V_2(\xi_2) + \bar{C}_5 V_3(\xi_2) + \bar{C}_6 V_4(\xi_2)] + 1 \pm \mu \bar{\sigma}_{12}, \tag{19''}$$

— în placa circulară:

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{1+k}\left[\bar{T}_r + \frac{3+\mu}{8}\left(\frac{R}{R_2}\right)^2(1-\eta^2) \pm 6\cdot\frac{R_2}{h_2}\cdot\frac{h_2}{H}\cdot\bar{M}_r\right],$$

$$\bar{\sigma}_t = \frac{1}{1+k}\left[\bar{T}_r + \frac{3+\mu}{8}\left(\frac{R}{R_2}\right)^2\left(1-\frac{1+3\mu}{3+\mu}\eta^2\right) \pm 6\frac{R_2}{h_2}\cdot\frac{h_2}{H}\bar{M}_r\right]. \tag{20}$$

Pentru determinarea valorilor tensiunilor adimensionale (18) — (20) și a dependenței acestora de geometria structurii, s-a utilizat un calculator electronic numeric, calculul analitic fiind foarte laborios. În acest scop, tensiunile adimensionale s-au exprimat în funcție de următorii parametri adimensionali

$$\mu;\ \lambda_1;\ \lambda_2;\ k;\ R_2/h_2;\ H/h_2;\ h_2/h_1. \tag{21}$$

Parametrii R_2/R și R_2/R_1 pot fi determinați dacă se admite o anumită configurație a structurii. De exemplu, pentru structurile din figura 1, se obține

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{1+0{,}5\dfrac{h_2}{R_2}\left(1-\dfrac{h_1}{h_2}\right)},$$

$$\frac{R_2}{R} = \frac{1}{\dfrac{R_1}{R_2} - 0{,}5\dfrac{h_1}{h_2}\cdot\dfrac{h_2}{R_2}}. \tag{22}$$

S-a elaborat un program în FORTRAN [4], a cărui organigramă este reprezentată în figura 4.

Pentru ultimii trei parametri (21), în organigramă s-au utilizat notațiile R, $H2$, $H1$. De asemenea, s-au notat cu X constantele de integrare și intensitățile eforturilor de contur, care sînt necunoscutele sistemelor de ecuații (13). Coeficienții termenilor acestor ecuații s-au notat cu $A_{m.k}$ și B_l.

În vederea determinării dependenței stării de tensiune a structurii de parametrii (21), calculele numerice s-au efectuat pentru un număr NUM de șiruri de valori ai acestora. Șirul de valori al fiecărui parametru s-a obținut atribuindu-i fiecăruia o valoare inițială $A\mu$, $A\lambda_1$, $A\lambda_2$, ..., $AH2$, la care se adaugă un pas $V\mu$, $V\lambda_1$, $V\lambda_2$, ..., VH_2, operația efectuîndu-se de $I\mu$, $I\lambda_1$, $I\lambda_2$, ..., IH_2 ori.

Pentru a avea o imagine cît mai exactă a stării de tensiune în structurile studiate și pentru a determina cît mai precis valorile maxime, tensiunile au fost calculate pentru șiruri de valori ale absciselor corespunzătoare unor pași obținuți pentru $h_1/2$ în învelișul 0—1, $h_2/2$ în învelișul 1—2 și $R/10$ în placă. Pentru fiecare valoare a abscisei s-au calculat patru tensiuni: cele două tensiuni principale într-un punct de pe exteriorul structurii și două, într-un punct din interior.

Calculele s-au efectuat pe un calculator I.B.M. 1130.

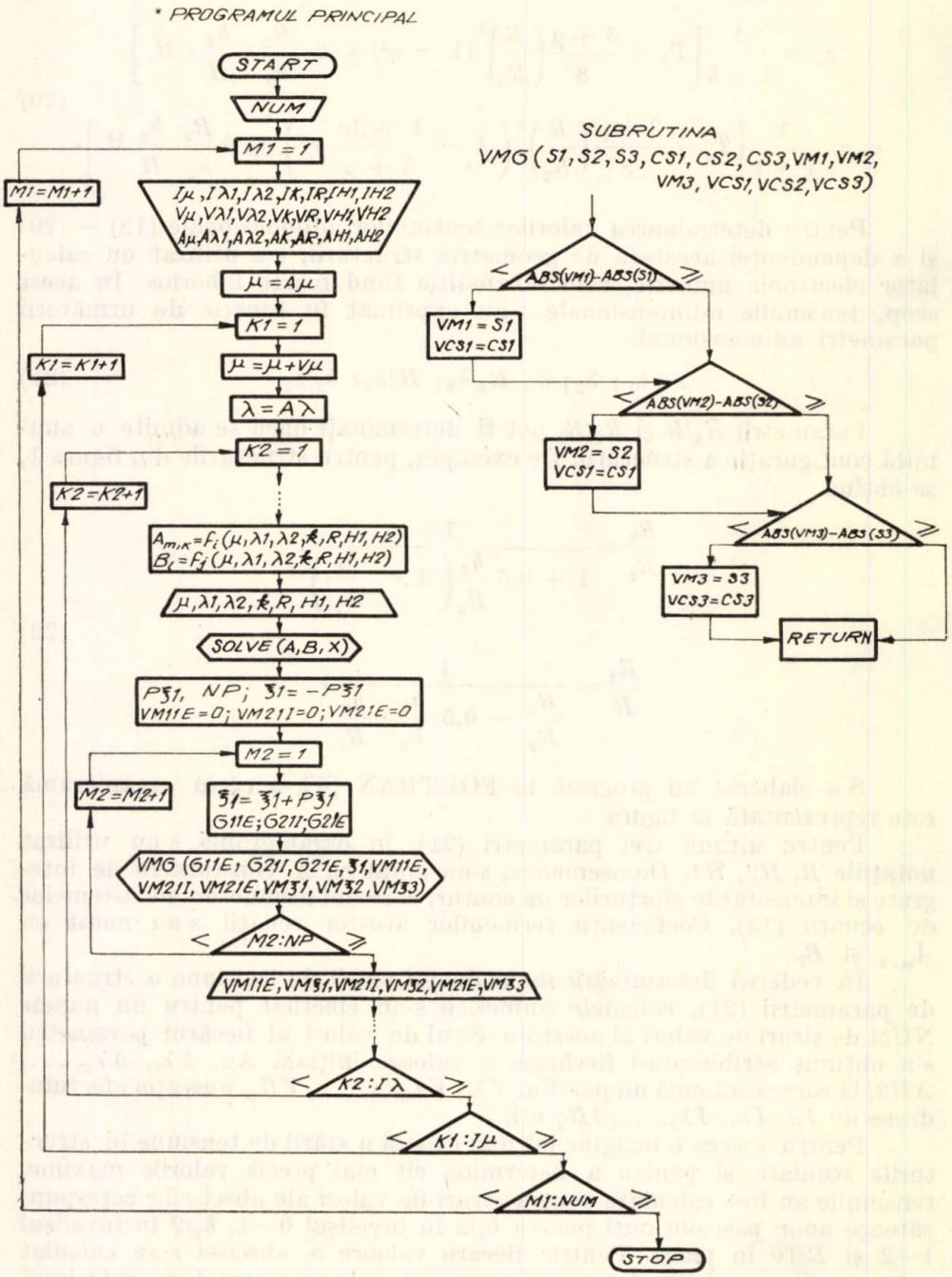

* PROGRAMUL PRINCIPAL
START
NUM
M1 = 1
M1 = M1+1
Iμ, Iλ1, Iλ2, IK, IR, IH1, IH2
Vμ, Vλ1, Vλ2, VK, VR, VH1, VH2
Aμ, Aλ1, Aλ2, AK, AR, AH1, AH2
μ = Aμ
K1 = 1
K1 = K1+1
μ = μ+Vμ
λ = Aλ
K2 = 1
K2 = K2+1
A_m,k = F_i (μ, λ1, λ2, k, R, H1, H2)
B_i = F_j (μ, λ1, λ2, k, R, H1, H2)
μ, λ1, λ2, k, R, H1, H2
SOLVE (A, B, X)
PS1, NP; S1 = −PS1
VM11E = 0; VM211 = 0; VM21E = 0
M2 = 1
M2 = M2+1
S1 = S1 + PS1
G11E; G211; G21E
VMG (G11E, G211, G21E, S1, VM11E, VM21I, VM21E, VM31, VM32, VM33)
M2 : NP
VM11E, VMS1, VM21I, VM32, VM21E, VM33
K2 : Iλ
K1 : Iμ
M1 : NUM
STOP
SUBRUTINA
VMG (S1, S2, S3, CS1, CS2, CS3, VM1, VM2, VM3, VCS1, VCS2, VCS3)
ABS(VM1) - ABS(S1)
VM1 = S1
VCS1 = CS1
ABS(VM2) - ABS(S2)
VM2 = S2
VCS1 = CS1
ABS(VM3) - ABS(S3)
VM3 = S3
VCS3 = CS3
RETURN

Fig. 4

În figura 5 s-au reprezentat grafic stările de tensiune din cele trei structuri considerate, calculate pentru unele valori uzuale ale parametrilor adimensionali (21). Figura 5*a* se referă la structura din figura 1*a*, figura 5*b* — la structura din figura 1*b* ș.a.m.d.

4. STUDIUL INFLUENȚEI VARIAȚIILOR PARAMETRILOR ADIMENSIONALI ASUPRA STĂRII DE TENSIUNE

Cunoașterea modului în care variațiile parametrilor adimensionali (21) influențează stările de tensiune din structurile studiate, permite determinarea unei geometrii optime a acestora din punctul de vedere al solicitărilor.

Deoarece în calculele de rezistență interesează în primul rînd tensiunile maxime, în programul FORTRAN elaborat s-a introdus subrutina de sortare VMσ care alege, în vederea tipăririi, numai tensiunile maxime și valorile absciselor corespunzătoare acestora. Această sortare se face separat pentru fiecare tensiune principală și pentru fiecare element component al structurii.

În cele ce urmează se prezintă, sub formă de grafice, dependența tensiunilor adimensionale maxime $\bar{\sigma}_{mex}$ de unii dintre parametri adimensionali. În abscisă s-a reprezentat parametrul considerat, iar în ordonată tensiunea $\bar{\sigma}_{max}$.

Astfel, în figura 6 sînt reprezentate tensiunile $\bar{\sigma}_{max}$ în funcție de λ_1 pentru structura cu mantaua 1—2 de lungime semiinfinită (fig. 1*a*). Se constată că, pentru valori ale lui λ_1 cuprinse între 0 și 0,5, tensiunea cea mai mare este $\bar{\sigma}_{22e}$, obținută în puncte ale căror abscise ξ_2 au valori cuprinse între 1,9281 și 2,4422. Valorile acestei tensiuni scad foarte lent cu creșterea lui λ_1 și sînt relativ puțin influențate de variații ale parametrilor H/h_2 și k. Pentru valori ale lui λ_1 mai mari decît 0,5, maximă devine tensiunea $\bar{\sigma}_{12i}$, calculată pentru $\xi_2=0$. Această tensiune crește sensibil pentru $0{,}5 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1{,}5$ și rămîne practic constantă pentru $\lambda_1 > 1{,}5$.

În figurile 7 și 8 sînt reprezentate grafic tensiunile $\bar{\sigma}_{max}$ în funcție de parametrii λ_1, respectiv λ_2, pentru structura care are mantaua 1—2 cu contur liber în 2 (fig. 1*b*), iar în figurile 9 și 10 sînt reprezentate aceleași curbe pentru structura simetrică față de 2 (fig. 1*c*). Din analiza acestor grafice rezultă că, pentru ambele structuri, tensiunile maxime sînt influențate sensibil de variațiile parametrilor λ_1, λ_2. Pentru $0{,}5 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1{,}5$, tensiunile $\bar{\sigma}_{max}$ sînt minime, valorile acestora cît și pozițiile lor în lungul axei absciselor fiind influențate de parametrul λ_2.

În figurile 11 — 15 sînt redate sub forma unor reprezentări grafice variațiile tensiunilor adimensionale maxime $\bar{\sigma}_{max}$ în funcție de parametrii μ, k, R_2/h_2, H/h_2, h_2/h_1, calculate atît pentru structura cu contur liber în 2, cît și pentru structura simetrică. Pentru ceilalți parametri s-au considerat valorile

$$\lambda_1 = 0{,}5, \qquad \lambda_2 = 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4, \qquad R_2/R = R_2/R_1 = 1.$$

Pentru toate rezultatele prezentate în figurile 11—15, maximă a fost una din tensiunile calculate pentru porțiunea 1—2 a mantalei (adică $\bar{\sigma}_{12i}$, $\bar{\sigma}_{22e}$, $\bar{\sigma}_{22i}$), valorile absciselor ξ_2 corespunzătoare acestora fiind cuprinse între 0 și 2,9975.

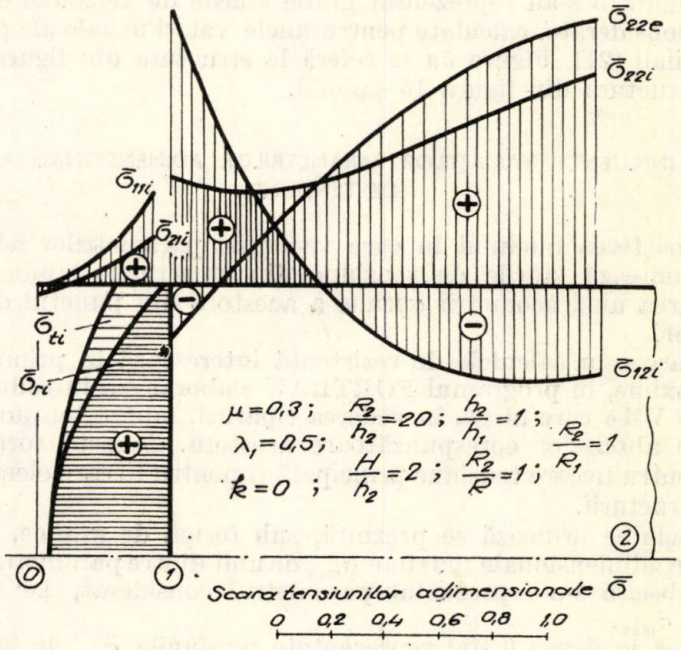

$\bar{\sigma}_{22e}$
$\bar{\sigma}_{22i}$
$\bar{\sigma}_{11i}$
$\bar{\sigma}_{21i}$
$\bar{\sigma}_{ti}$
$\bar{\sigma}_{ri}$
$\bar{\sigma}_{12i}$
$\mu = 0{,}3$; $\frac{R_2}{h_2} = 20$; $\frac{h_2}{h_1} = 1$; $\frac{R_2}{R_1} = 1$
$\lambda_1 = 0{,}5$; $\frac{H}{h_2} = 2$; $\frac{R_2}{R} = 1$;
$k = 0$;
0
1
2
Scara tensiunilor adimensionale $\bar{\sigma}$
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0

Fig. 5 *a*

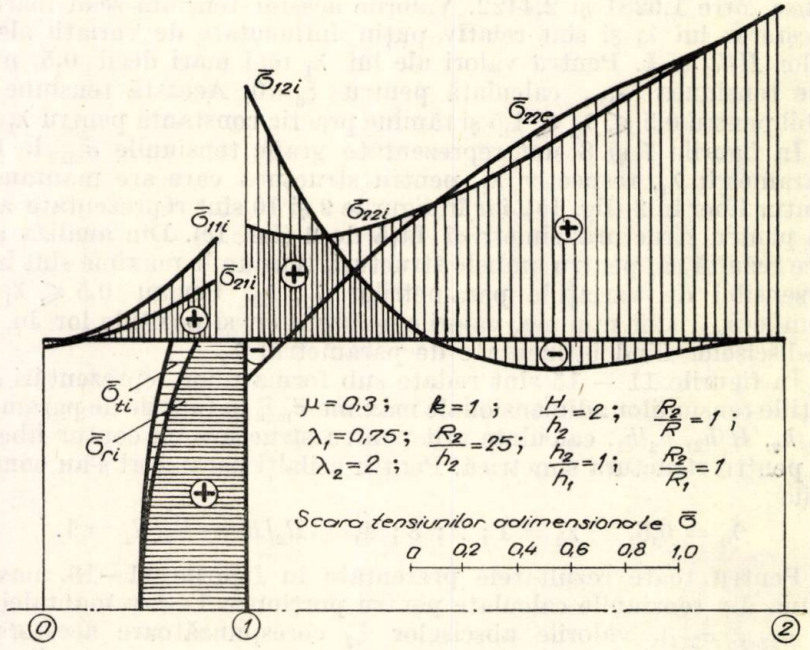

$\bar{\sigma}_{12i}$
$\bar{\sigma}_{22e}$
$\bar{\sigma}_{22i}$
$\bar{\sigma}_{11i}$
$\bar{\sigma}_{21i}$
$\bar{\sigma}_{ti}$
$\bar{\sigma}_{ri}$
$\mu = 0{,}3$; $k = 1$; $\frac{H}{h_2} = 2$; $\frac{R_2}{R} = 1$;
$\lambda_1 = 0{,}75$; $\frac{R_2}{h_2} = 25$; $\frac{h_2}{h_1} = 1$; $\frac{R_2}{R_1} = 1$
$\lambda_2 = 2$;
Scara tensiunilor adimensionale $\bar{\sigma}$
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0
0
1
2

Fig. 5 *b*

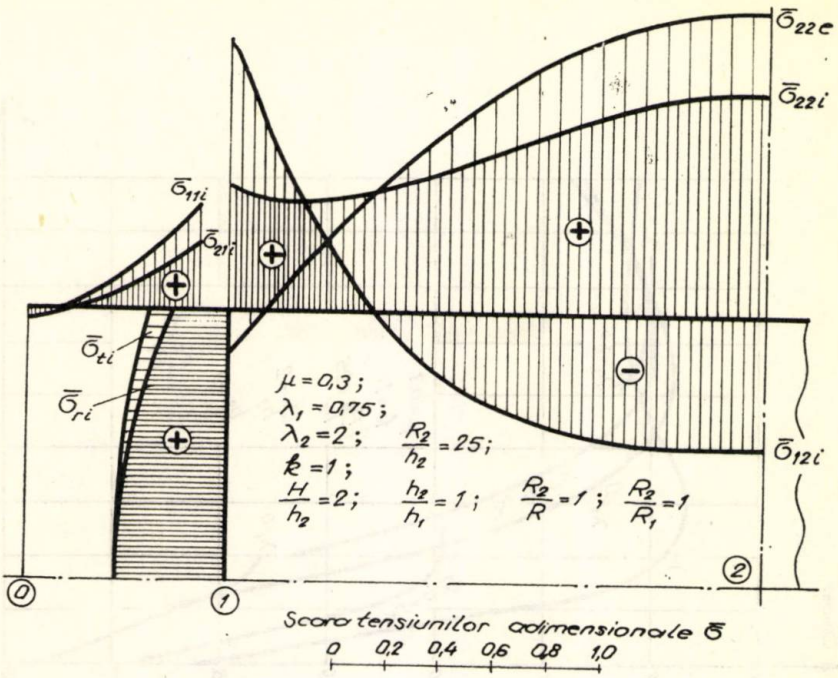

$\bar{\sigma}_{22e}$
$\bar{\sigma}_{22i}$
$\bar{\sigma}_{11i}$
$\bar{\sigma}_{21i}$
$\bar{\sigma}_{ti}$
$\bar{\sigma}_{ri}$
$\bar{\sigma}_{12i}$
$\mu = 0,3$;
$\lambda_1 = 0,175$;
$\lambda_2 = 2$; $\frac{R_2}{h_2} = 25$;
$k = 1$;
$\frac{H}{h_2} = 2$; $\frac{h_2}{h_1} = 1$; $\frac{R_2}{R} = 1$; $\frac{R_2}{R_1} = 1$
0
1
2
Scara tensiunilor adimensionale $\bar{\sigma}$
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0

Fig. 5 c

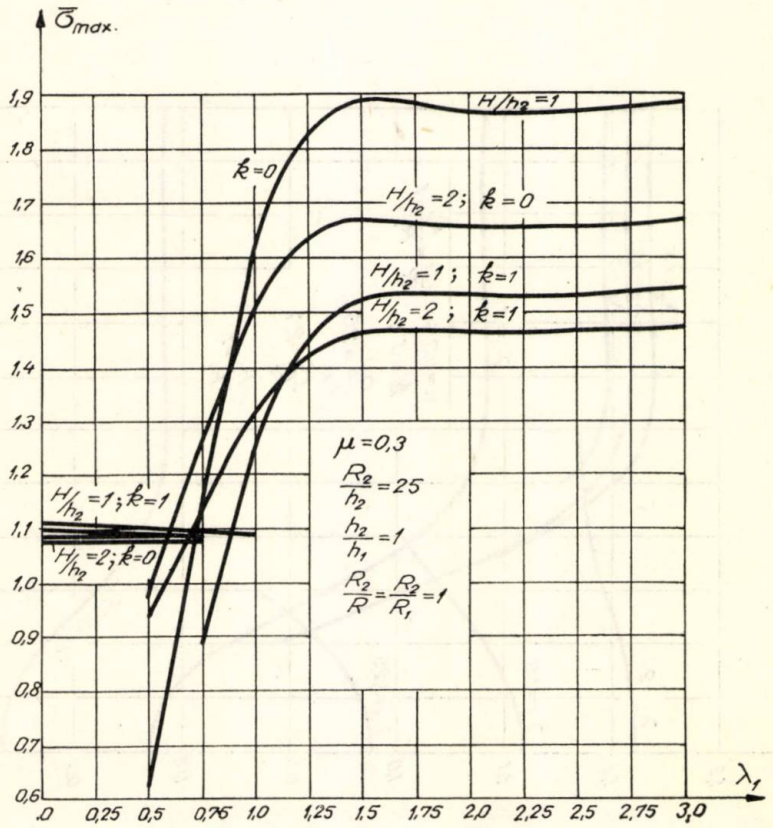

$\bar{\sigma}_{max.}$
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
$H/h_2 = 1$
$k = 0$
$H/h_2 = 2$; $k = 0$
$H/h_2 = 1$; $k = 1$
$H/h_2 = 2$; $k = 1$
$\mu = 0,3$
$\frac{R_2}{h_2} = 25$
$\frac{h_2}{h_1} = 1$
$\frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1} = 1$
$H/h_2 = 1$; $k = 1$
$H/h_2 = 2$; $k = 0$
λ_1
0 0,25 0,5 0,75 1,0 1,25 1,5 1,75 2,0 2,25 2,5 2,75 3,0

Fig. 6

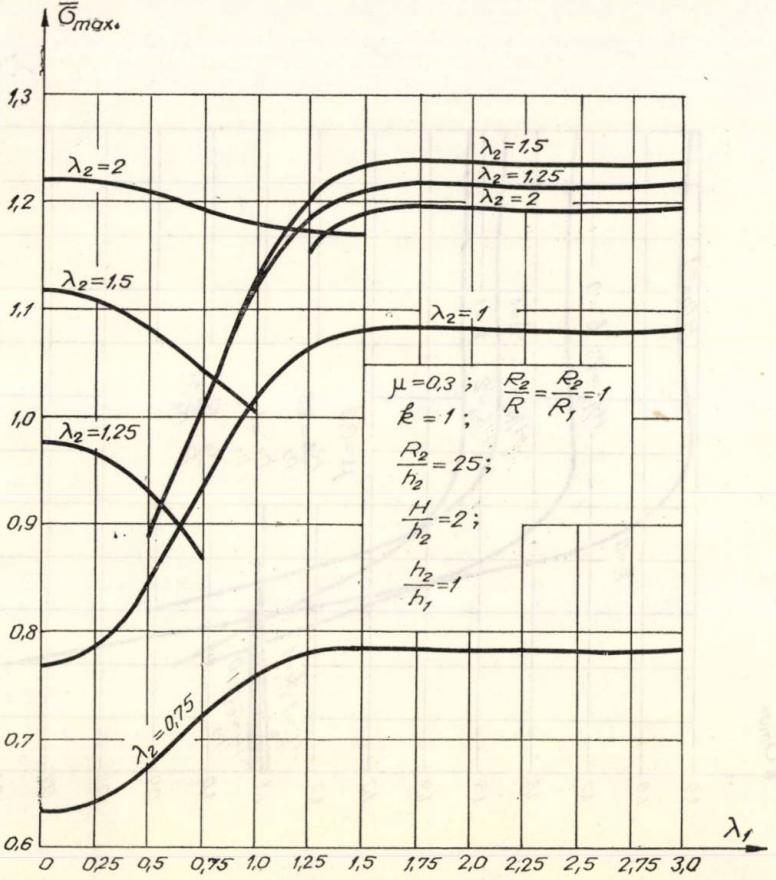

$\bar{\sigma}_{max.}$
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=1,5$
$\lambda_2=1,25$
$\lambda_2=1,5$
$\lambda_2=1,25$
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=0,75$
$\mu=0,3$; $\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$
$k=1$;
$\frac{R_2}{h_2}=25$;
$\frac{H}{h_2}=2$;
$\frac{h_2}{h_1}=1$
0 0,25 0,5 0,75 1,0 1,25 1,5 1,75 2,0 2,25 2,5 2,75 3,0
λ_1

Fig. 7

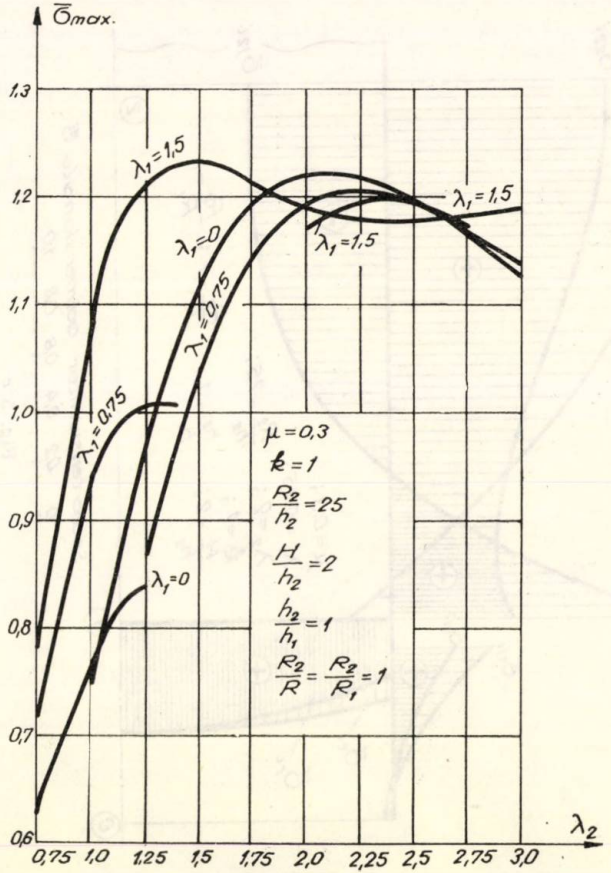

$\bar{\sigma}_{max.}$
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
$\lambda_1=1,5$
$\lambda_1=0$
$\lambda_1=0,75$
$\lambda_1=1,5$
$\lambda_1=0,75$
$\lambda_1=0$
$\lambda_1=1,5$
$\mu=0,3$
$k=1$
$\frac{R_2}{h_2}=25$
$\frac{H}{h_2}=2$
$\frac{h_2}{h_1}=1$
$\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$
0,75 1,0 1,25 1,5 1,75 2,0 2,25 2,5 2,75 3,0
λ_2

Fig. 8

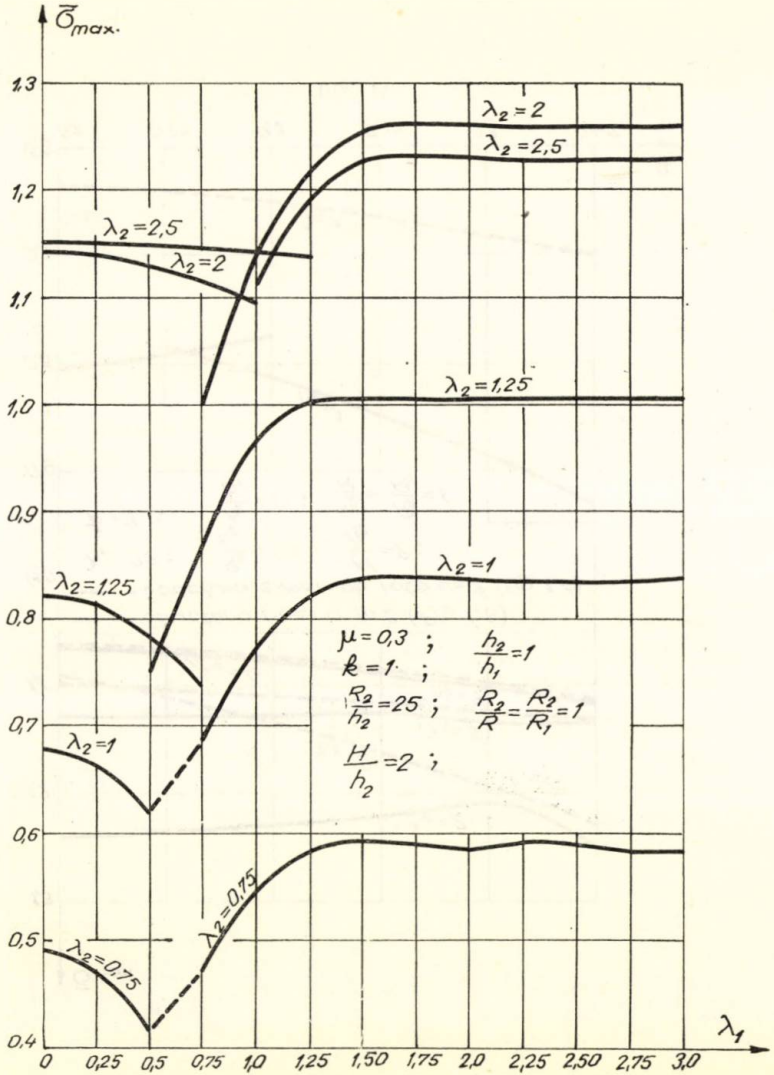

$\bar{\sigma}_{max.}$
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=2,5$
$\lambda_2=2,5$
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=1,25$
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=1,25$
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=0,75$
$\lambda_2=0,75$
$\mu=0,3$; $\frac{h_2}{h_1}=1$
$k=1$; $\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$
$\frac{R_2}{h_2}=25$;
$\frac{H}{h_2}=2$;
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0 0,25 0,5 0,75 1,0 1,25 1,50 1,75 2,0 2,25 2,50 2,75 3,0
λ_1

Fig. 9

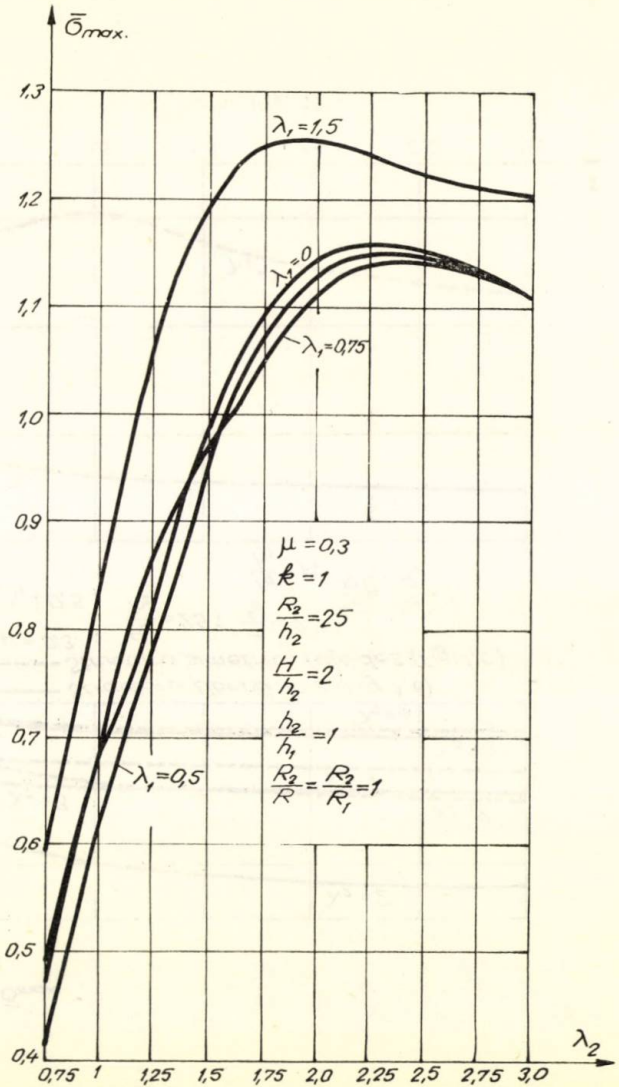

$\bar{\sigma}_{max.}$
$\lambda_1=1,5$
$\lambda_1=0$
$\lambda_1=0,75$
$\lambda_1=0,5$
$\mu=0,3$
$k=1$
$\frac{R_2}{h_2}=25$
$\frac{H}{h_2}=2$
$\frac{h_2}{h_1}=1$
$\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,75 1 1,25 1,5 1,75 2,0 2,25 2,5 2,75 3,0
λ_2

Fig. 10

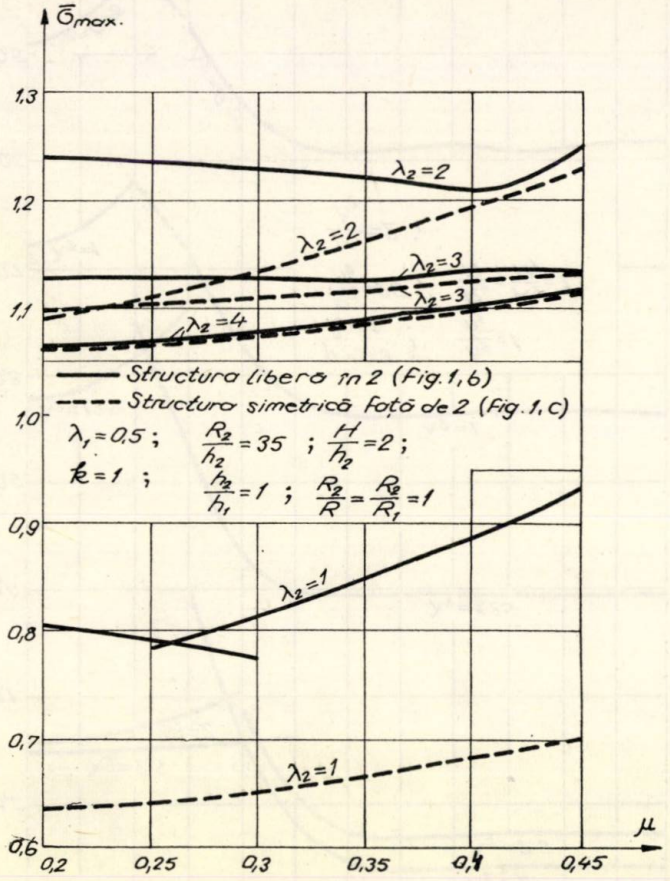

$\bar{\sigma}_{max.}$
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,2
0,25
0,3
0,35
0,4
0,45
μ
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=4$
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=1$
Structura liberă în 2 (Fig. 1, b)
Structura simetrică față de 2 (Fig. 1, c)
$\lambda_1=0,5$; $\frac{R_2}{h_2}=35$; $\frac{H}{h_2}=2$;
$k=1$; $\frac{h_2}{h_1}=1$; $\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$

Fig. 11

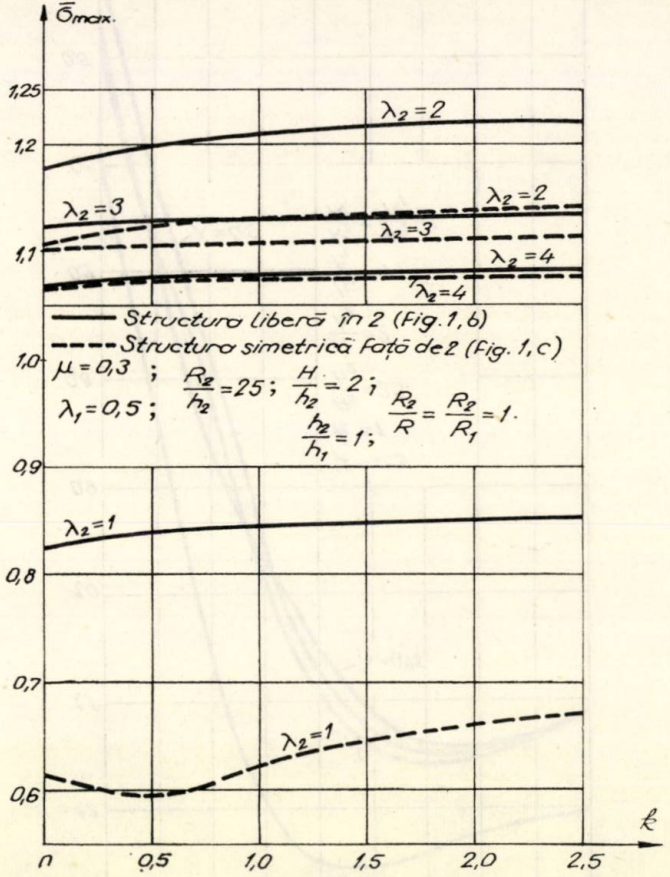

$\bar{\sigma}_{max.}$
1,25
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
k
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=4$
$\lambda_2=4$
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=1$
Structura liberă în 2 (Fig. 1, b)
Structura simetrică față de 2 (Fig. 1, c)
$\mu=0,3$; $\frac{R_2}{h_2}=25$; $\frac{H}{h_2}=2$;
$\lambda_1=0,5$; $\frac{h_2}{h_1}=1$; $\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$.

Fig. 12

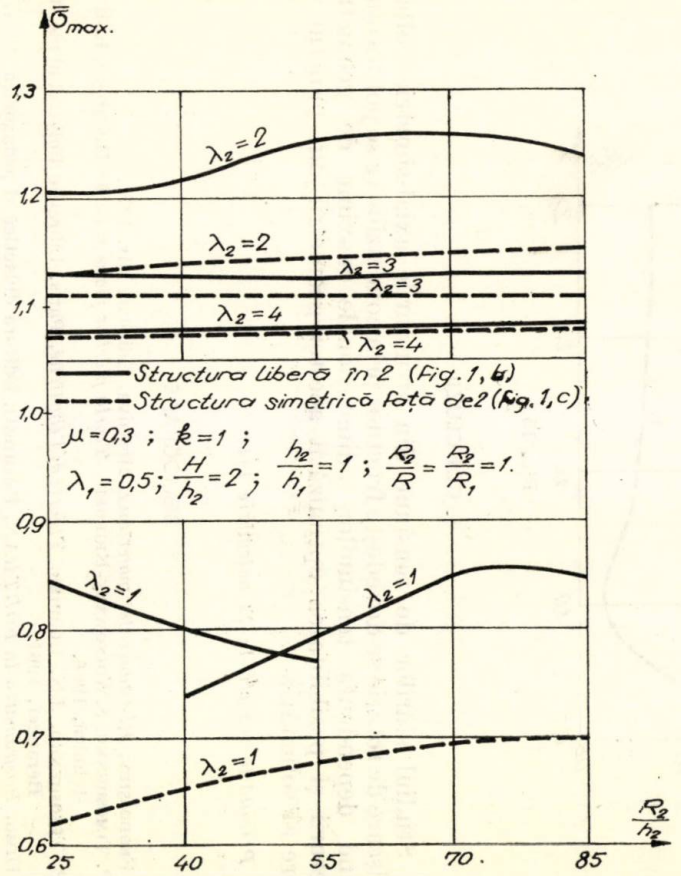

$\bar{\sigma}_{max.}$
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=4$
$\lambda_2=4$
Structura liberă în 2 (Fig. 1, b)
Structura simetrică față de 2 (Fig. 1, c)
$\mu=0,3$; $k=1$;
$\lambda_1=0,5$; $\frac{H}{h_2}=2$; $\frac{h_2}{h_1}=1$; $\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$.
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=1$
25
40
55
70
85
$\frac{R_2}{h_2}$

Fig. 13

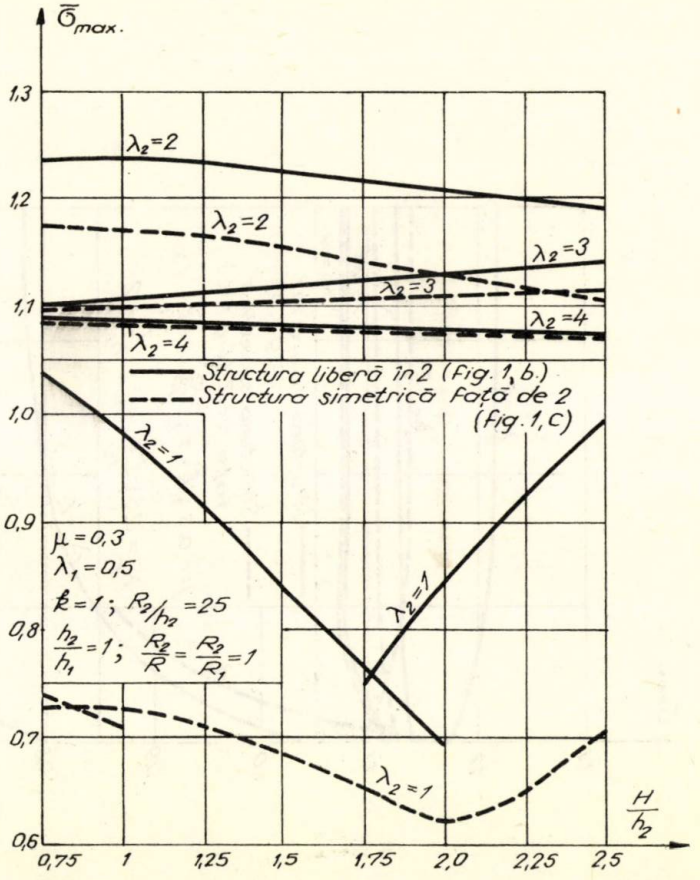

$\bar{\sigma}_{max.}$
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=2$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=3$
$\lambda_2=4$
$\lambda_2=4$
Structura liberă în 2 (Fig. 1, b.)
Structura simetrică față de 2 (Fig. 1, c)
$\lambda_2=1$
$\mu=0,3$
$\lambda_1=0,5$
$k=1$; $R_2/h_2=25$
$\frac{h_2}{h_1}=1$; $\frac{R_2}{R}=\frac{R_2}{R_1}=1$
$\lambda_2=1$
$\lambda_2=1$
0,75
1
1,25
1,5
1,75
2,0
2,25
2,5
$\frac{H}{h_2}$

Fig. 14

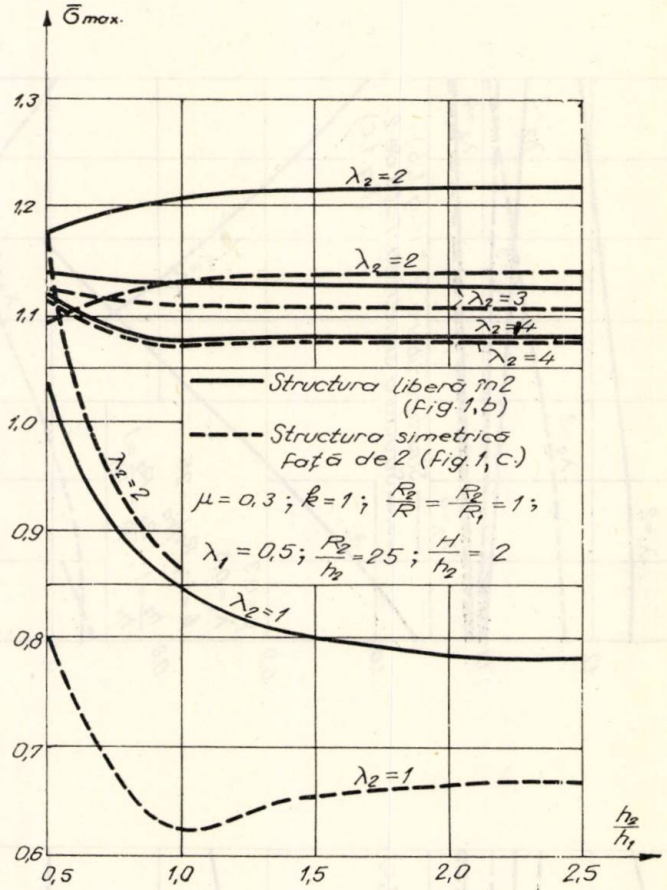


Fig. 15

5. CONCLUZII

Studiul stărilor de tensiune din structurile axial-simetrice aflate în mișcare de rotație se dovedește fructuos prin concluziile ce se pot formula privind dependența tensiunilor adimensionale maxime de geometria structurii și posibilitatea optimizării acestei geometrii din punctul de vedere al solicitării.

Primită la redacție la 23 noiembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. V. Feodossiev, *Résistance des materiaux*, Moscova, Editions Mir, 1971.
2. S.P. Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, *Teoria plăcilor plane și curbe*, București, Editura tehnică, 1968.
3. S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Théorie de l'élasticité*, Paris, Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, 1961.
4. P. Dimo, *Programarea în FORTRAN*, București, Editura didactică și pedagogică, 1971.

CONTRIBUȚII LA CALCULUL PLĂCILOR ORTOTROPE, CU NERVURI DE RIGIDIZARE PE O SINGURĂ PARTE. II*)

de M. V. SOARE

Institutul de Construcții București

Constantele de integrare sînt determinate pentru cazul în care, într-o secțiune oarecare, acționează o sarcină liniară $P(x)$. Această sarcină este apoi particularizată pentru cazul sarcinii sinusoidale, uniforme și sarcinii provenind din încărcarea cu autocamioane STAS. Studiul se încheie cu observații și concluzii.

6. DETERMINAREA CONSTANTELOR DE INTEGRARE

În continuare se va trece la determinarea constantelor de integrare C_{1m} și C_{2m}. Să considerăm, pentru exemplificare, cazul cînd banda de lățime a are o lungime infinită și, într-o secțiune oarecare aleasă drept axă Ox, acționează o sarcină liniară $P(x)$.

Din motive de simetrie, în secțiunea $y = 0$ vor subzista următoarele condiții la limită:

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \text{și} \quad Q_y(x, 0) = -\frac{1}{2} P(x). \tag{32}$$

Pentru explicitarea condițiilor la limită, vom exprima, în prealabil, încărcarea liniară sub forma seriei trigonometrice cu coeficienți constanți

$$P(x) = \sum P_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{33}$$

în care coeficienții P_m sînt presupuși cunoscuți.

Condiția de forță tăietoare se simplifică și este echivalentă cu următoarea

$$\frac{\partial^3 w(x, 0)}{\partial y^3} = -\frac{1}{2} \frac{P(x)}{K_y} = -\frac{1}{2K_y} \sum_m P_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{34}$$

dacă se ține seama că, în expresia lui Q_y, termenul $\partial M_{xy}/\partial y$ conține pe W'_m care este nul în virtutea primei condiții la limită.

*) Partea I a apărut în st. cerc. mec. apl., **33**, *4*, 717–732 (1974)

Cu aceste considerente, pentru determinarea lui C_{1m} și C_{2m} rezultă sistemul:

$$\alpha C_{1m} - \beta C_{2m} = 0,$$

$$(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)C_{1m} - (3\alpha^2\beta - \beta^3)C_{2m} = -\frac{P_m a^3}{2K_y \pi^3 m^3};$$

rădăcinile ecuațiilor precedente se scriu:

$$C_{1m} = \frac{a^3}{4\sqrt{K_x K_y}\,\pi^3\alpha}\frac{P_m}{m^3}, \quad C_{2m} = \frac{a^3}{4\sqrt{K_x K_y}\,\pi^3\beta}\frac{P_m}{m^3}. \tag{35}$$

Ținînd seama de (35), expresiile (30) devin:

$$w = \frac{a^3}{4\sqrt{K_x K_y}\pi^3}\sum_m \frac{P_m}{m^3}\left(\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} + \frac{1}{\beta}\Phi_{2m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{a^2}{2\pi^2\sqrt{K_x K_y - H^2}}\sum_m \frac{P_m}{m^2}\Phi_{2m}\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$N_x = \frac{1-\mu}{8\pi}\frac{Da(e_x+e_y)}{K_y}\sum_m \frac{P_m}{m}\left(\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} - \frac{1}{\beta}\Phi_{2m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$N_y = \frac{1-\mu}{8\pi}\frac{Da(e_x+e_y)}{\sqrt{K_x K_y}}\sum_m \frac{P_m}{m}\left(\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} + \frac{1}{\beta}\Phi_{2m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$N_{xy} = N_{yx} = -\frac{1-\mu}{4\pi}\frac{Da(e_x+e_y)}{\sqrt{K_x K_y - H^2}}\sum_m \frac{P_m}{m}\Phi_{2m}\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$M_x = \frac{a}{4\pi}\sqrt{\frac{K_x}{K_y}}\sum_m \frac{P_m}{m}\left[\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} + \frac{1}{\beta}\Phi_{2m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu(K + De_x e_y)}{\sqrt{K_x K_y}}\left(\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} - \frac{1}{\beta}\Phi_{2m}\right)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{36}$$

$$M_y = \frac{a}{4\pi}\sum_m \frac{P_m}{m}\left[\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} - \frac{1}{\beta}\Phi_{2m} + \frac{\mu(K + De_x e_y)}{\sqrt{K_x K_y}}\left(\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\beta}\Phi_{2m}\right)\right]\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$M_{xy} = \frac{(1-\mu)a}{2\pi\sqrt{K_x K_y - H^2}}\left[K + 2K_{xy} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} De_x(e_x + e_y)\right]\sum_m \frac{P_m}{m}\Phi_{2m}\cos\frac{mx\pi}{a},$$

$$M_{yx} = \frac{(1-\mu)a}{2\pi\sqrt{K_x K_y}}\left[K + 2K_{yx} + \frac{1}{2} De_y(e_x + e_y)\right]\sum_m \frac{P_m}{m}\left(\Phi_{1m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{K_x K_y}}{\sqrt{K_x K_y - H^2}}\Phi_{2m}\right)\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$Q_x = \frac{1}{4K_y}\sum_m P_m\left\{\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} + \frac{1}{\beta}\Phi_{2m} + \left[K + 2K_{yx} + De_y\left(\frac{1+\mu}{2}e_x + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1-\mu}{2}e_y\right)\right]\left(\frac{1}{\alpha}\Phi_{1m} - \frac{1}{\beta}\Phi_{2m}\right)\right\}\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$Q_y = \frac{1}{2}\sum_m P_m\left[\Phi_{1m} - \frac{H}{\sqrt{K_x K_y - H^2}}\right.$$

$$\left.\frac{K + 2K_{xy} + De_x\left(\frac{1+\mu}{2}e_y + \frac{1-\mu}{2}e_x\right)}{\sqrt{K_x K_y}}\Phi_{2m}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

7. EXEMPLE DE CALCUL

7.1 DATE NUMERICE

Pentru analizarea formulelor stabilite în paragraful 6, vom studia cîteva cazuri de încărcare ale unei plăci ortotrope la care rigidităţile la încovoiere după cele două direcţii sînt mult diferite. Secţiunile transversale prin placă, necesare stabilirii tuturor elementelor de calcul sînt redate în figura 2 *a*, *b*.

Constantele elastice ale materialului sînt

$$E = 0{,}21 \times 10^7 \text{ daN/cm}^2,\ \mu = 0{,}3 \text{ şi } G = \frac{E}{2{,}6}.$$

Pentru secţiunile aferente fiecărei nervuri reprezentate în figura 2 *a*, *b* rezultă :

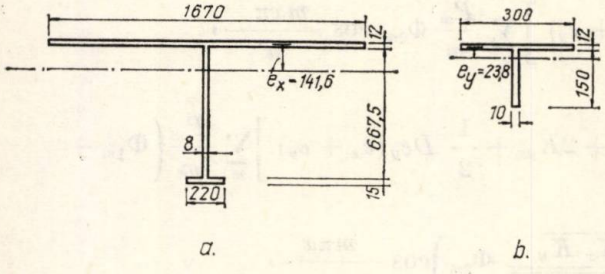


Fig. 2. — Elementele geometrice necesare determinării rigidităţilor plăcii ortotrope : *a*) în secţiunea transversală x = const. ; *b*) în secţiunea transversală y = const.

a. *b.*

— poziţia centrului de greutate (raportată la mijlocul grosimii tablei)

$$e_x = 14{,}16 \text{ cm}, \quad e_y = 2{,}38 \text{ cm};$$

— momentele de inerţie

$$I_x = 177019{,}76 \text{ cm}^4; \quad I_y = 981{,}98 \text{ cm}^4.$$

Cu aceste valori se calculează rigidităţile axială, la încovoiere şi la torsiune :

$$D = \frac{E\delta}{1-\mu^2} = \frac{0{,}21 \times 10^7 \times 1{,}2}{1-0{,}3^2} = 0{,}2769 \times 10^7 \text{ daN/cm},$$

$$K = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{0{,}21 \times 10^7 \times 1{,}2^3}{12\,(1-0{,}3^2)} = 0{,}0332 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$K_x = \frac{EI_x}{b_x} = \frac{0{,}21 \times 10^7 \times 177019{,}76}{167} = 222{,}60 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$K_y = \frac{EI_y}{b_y} = \frac{0{,}21 \times 10^7 \times 981{,}98}{30} = 6{,}874 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$K_{xy} = 1{,}1 \frac{G}{3b_x}(t_1^3 h_1 + t_2^3 h_2) = \frac{1{,}1 \times 0{,}21 \times 10^7}{2{,}6 \times 3 \times 167}(0{,}8^3 \times 66{,}75 +$$

$$+ 1{,}5^3 \times 22) = 0{,}0192 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$K_{yx} = \frac{Gt^3 h}{3b_x} = \frac{0{,}21 \times 10^7 \times 1{,}0^3 \times 15}{3 \times 30} = 0{,}0135 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$\mu D e_x e_y = 0{,}3 \times 0{,}2769 \times 10^7 \times 14{,}16 \times 2{,}38 = 2{,}7995 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$\frac{1-\mu}{4} D (e_x + e_y)^2 = \frac{1 - 0{,}3}{4} \times 0{,}2769 \times 10^7 (14{,}16 + 2{,}38)^2 =$$

$$= 13{,}2566 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$H = K + K_{xy} + K_{yx} + D e_x e_y + \frac{1-\mu}{4} D (e_x + e_y)^2 =$$

$$= (0{,}0332 + 0{,}0192 +$$

$$+ 0{,}0135 + 2{,}7995 + 13{,}2566) \times 10^7 = 16{,}1220 \times 10^7 \text{ daNcm}.$$

Din valorile numerice precedente rezultă:

$$\sqrt{K_x K_y} = 39{,}1172 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$\sqrt{K_x K_y - H^2} = 35{,}6404 \times 10^7 \text{ daNcm},$$

$$\sqrt{\frac{K_x}{K_y}} = 5{,}9700$$

şi apoi părţile reală şi imaginară ale rădăcinilor ecuaţiei caracteristice (26)

$$\alpha = 2{,}0390\,; \quad \beta = 1{,}3462.$$

Deschiderea între reazeme $a = 870$ cm.

7.2. ACŢIUNEA UNEI SARCINI LINIARE SINUSOIDALE

Vom presupune că sarcina liniară (în secţiunea $y = 0$) are o variaţie sinusoidală (fig. 3*a*); în acest caz, seria (33) se reduce la primul termen

$$P(x) = \frac{4P}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \quad \left(m = 1,\ P_1 = \frac{4P}{\pi}\right). \tag{37}$$

Dintre mărimile (36) ne vom ocupa de w, M_x și N_x. Expresiile lor au forma următoare :

$$w = \frac{Pa^3}{\pi^4 \sqrt{K_x K_y}} \left(\frac{1}{\alpha} \Phi_{11} + \frac{1}{\beta} \Phi_{21} \right) \sin \frac{\pi x}{a},$$

$$N_x = \frac{1 - \mu}{2\pi^2} \frac{Da\,(e_x + e_y)}{K_y} P \left(\frac{1}{\alpha} \Phi_{11} - \frac{1}{\beta} \Phi_{21} \right) \sin \frac{\pi x}{a}, \tag{38}$$

$$M_x = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{K_x}{K_y}} Pa \left[\frac{1}{\alpha} \Phi_{11} + \frac{1}{\beta} \Phi_{21} + \frac{\mu\,(K + De_x e_y)}{\sqrt{K_x K_y}} \left(\frac{1}{\alpha} \Phi_{11} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\beta} \Phi_{21} \right) \right] \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Dacă se notează

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha}, \tag{39a}$$

săgeţile se anulează în secţiunile

$$y_0 = \frac{a}{\beta} \left(k - \frac{\varphi}{\pi} \right) \quad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{39b}$$

Eforturile normale N_x se anulează în secţiunile

$$y_1 = \frac{a}{\beta} \left(k + \frac{\varphi}{\pi} \right) \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \tag{39c}$$

Notînd

$$\theta = \mu \frac{K + De_x e_y}{\sqrt{K_x K_y}}, \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 + \theta}{1 - \theta}, \tag{39d}$$

rezultă că momentele încovoietoare M_x se anulează în secţiunile

$$y_2 = \frac{a}{\beta} \left(k - \frac{\varphi'}{\pi} \right) \quad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \tag{39e}$$

Cu valorile numerice adoptate şi considerînd $P = 100$ daN/cm, rezultă diagramele de variaţie pentru w, M_x şi N_x reprezentate în figurile 4*a*, 5*a*, 6*a*.

Ţinînd seama de datele numerice, secţiunile în care se anulează săgeata w, efortul normal N_x şi momentul încovoietor M_x sînt următoarele :

— pentru w :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1{,}3462}{2{,}0390} = 0{,}66022 \quad \varphi = 33°26'01'' \; (= 0{,}232039\,\pi),$$

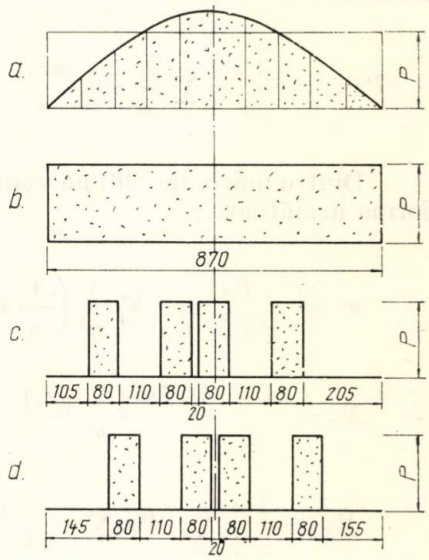


Fig. 3. — Sarcina liniară (în secţiunea $y = -0$) : *a*) sinusoidală ; *b*) constantă ; *c*) provenind din încărcarea cu două autocamioane dispuse nesimetric ; *d*) provenind din încărcarea cu două autocamioane dispuse simetric.

$$y_0 = \frac{870}{1{,}3462}(k - 0{,}232039) = 646{,}26355k - 149{,}95834$$

(fie 496,3 cm ; 1142,6 cm ; 1788,8 cm ; 2435,1 cm primele valori) ;

— pentru N_x :

$$y_1 = \frac{870}{1{,}3462}(k + 0{,}232039) = 646{,}26355k + 149{,}95834$$

(fie 150,0 cm ; 796,2cm ; 1442,5 cm ; 2088,7 cm primele valori) ;

— pentru M_x :

$$\operatorname{tg}\ \varphi' = 0{,}76240 \quad \varphi' = 37°19'20'' \; (= 0{,}207346\pi),$$

$$y_2 = \frac{870}{1{,}3462}(k - 0{,}207346) = 646{,}26355k - 133{,}99995$$

(fie 512,3 cm ; 1158,5 cm ; 1804,8 cm ; 2451,1 cm primele valori).

Forma funcţiilor Φ_{11} şi Φ_{21} arată că mărimile secţionale variază după exponenţiale amortizate, cu argumente diferite.

7.3. ACŢIUNEA UNEI SARCINI LINIARE CONSTANTE

Dacă sarcina liniară din secţiunea $y = 0$ este constantă (fig. 3*b*), seria (33) se scrie :

$$P(x) = \frac{4P}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \left(m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ ;\ P_m = \frac{4P}{\pi m}\right).$$

Dintre mărimile (36) ne vom ocupa de w, N_x şi M_x. Expresiile lor iau forma următoare :

$$w = \frac{Pa^3}{\pi^4 \sqrt{K_x K_y}} \sum_m \frac{1}{m^4} \left(\frac{1}{\alpha} \Phi_{1m} + \frac{1}{\beta} \Phi_{2m}\right) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$N_x = \frac{1-\mu}{2\pi^2} \frac{Da\,(e_x + e_y)}{K_y} P \sum_m \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{\alpha} \Phi_{1m} - \frac{1}{\beta} \Phi_{2m}\right) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$M_x = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{K_x}{K_y}}\, Pa \sum_m \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{\alpha} \Phi_{1m} + \frac{1}{\beta} \Phi_{2m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu\,(K + De_x + e_y)}{\sqrt{K_x K_y}} \left(\frac{1}{\alpha} \Phi_{1m} - \frac{1}{\beta} \Phi_{2m}\right)\right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1,3,5,\ldots).$$

Aceste relaţii generalizează pe cele de la punctul 7.2 ; încărcarea de la punctul 7.2 constituie un caz particular cînd $m = 1$, rezultanta încărcării sinusoidale (37) reprezentînd $8/\pi^2 \approx 0{,}8106$ din încărcarea uniform distribuită.

Cu valorile numerice adoptate şi considerînd $P = 100$ daN/cm, rezultă diagramele de variaţie pentru w, N_x şi M_x reprezentate în figurile 4*b*, 5*b*, 6*b*.

Din aceste figuri reiese că secţiunile în care w, N_x şi M_x se anulează sînt aproape aceleaşi cu cele din cazul încărcării sinusoidale. În privinţa mărimii lor, diferenţele sînt relativ reduse.

7.4. ÎNCĂRCAREA CU AUTOCAMIOANE

Vom considera osiile din spate a două autocamioane A_{30} dispuse alăturat la distanţa minimă (datele numerice conform STAS 3221—63 PODURI PENTRU AUTOSTRĂZI ŞI ŞOSELE — Convoaie tip şi clase

de încărcare). Pentru suprafaţa amprentei se va ţine seama de repartizarea la 45° a presiunilor prin îmbrăcămintea de pe pod. Considerînd această grosime de 5 cm şi neglijînd, în mod acoperitor, distribuţia în sens longitudinal, rezultă că fiecare roată transmite o încărcare de 6 000 daN distribuită pe lăţimea $2c = 80$ cm. Centrele celor patru sarcini liniare de intensitate $P = 6\,000/80 = 75$ daN/cm au abscisele (fig. 7):

$$u_1 = 145 \text{ cm}; \; u_2 = 335 \text{ cm}; \; u_3 = 435 \text{ cm}; \; u_4 = 625 \text{ cm}.$$

Dezvoltarea în serie trigonometrică a acestei încărcări are coeficientul de rang m:

$$P_m = \frac{4P}{\pi m} \sin \frac{m\pi c}{a} \sum_i \sin \frac{m\pi u_i}{a}$$

$$(i = 1, \; 2, \; 3, \; 4; \; m = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots).$$

Pentru calcul au fost luaţi în considerare $m = 100$ termeni. Variaţia încărcării reprezentate de această sumă trigonometrică este reprezentată în figura 7; reiese că aproximaţia funcţiei de încărcare este absolut satisfăcătoare. Seriile pentru săgeţi, eforturi şi momente sînt mai rapid convergente decît seria încărcării, de aceea pentru calculul lor numeric este necesar un număr mai mic de termeni.

Pentru a putea compara direct rezultatele obţinute cu acelea de la punctele 7.2 şi 7.3, s-a considerat $P = 100$ daN/cm. Au rezultat astfel diagramele de variaţie pentru w, N_x şi M_x reprezentate în figurile 4*c*, 5*c*, 6*c*.

Încărcarea din figura 3*c* este dispusă astfel încît o roată să calce chiar la mijlocul deschiderii a. Pentru a se studia şi influenţa deplasării încărcării în secţiune transversală, a mai fost examinat şi cazul cînd cele două autocamioane sînt dispuse simetric faţă de centru (secţiunea $x = a/2$). Abscisele corespunzătoare sînt atunci

$$u_1' = 195 \text{ cm}; \; u_2' = 385 \text{ cm}; \; u_3' = 485 \text{ cm}; \; u_4' = 675 \text{ cm}.$$

Dezvoltarea în serie trigonometrică a noii încărcări are coeficientul de rang m:

$$P_m = \frac{4P}{\pi m} \sin \frac{m\pi c}{a} \sum_i \sin \frac{m\pi u_i'}{a}$$

$$(i = 1, \; 2, \; 3, \; 4; \; m = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots),$$

în care $u_i' = u_i + 50$ cm.

Considerînd din nou $P = 100$ daN/cm, au rezultat diagramele de variaţie pentru w, N_x şi M_x reprezentate în figurile $4d$, $5d$, $6d$.

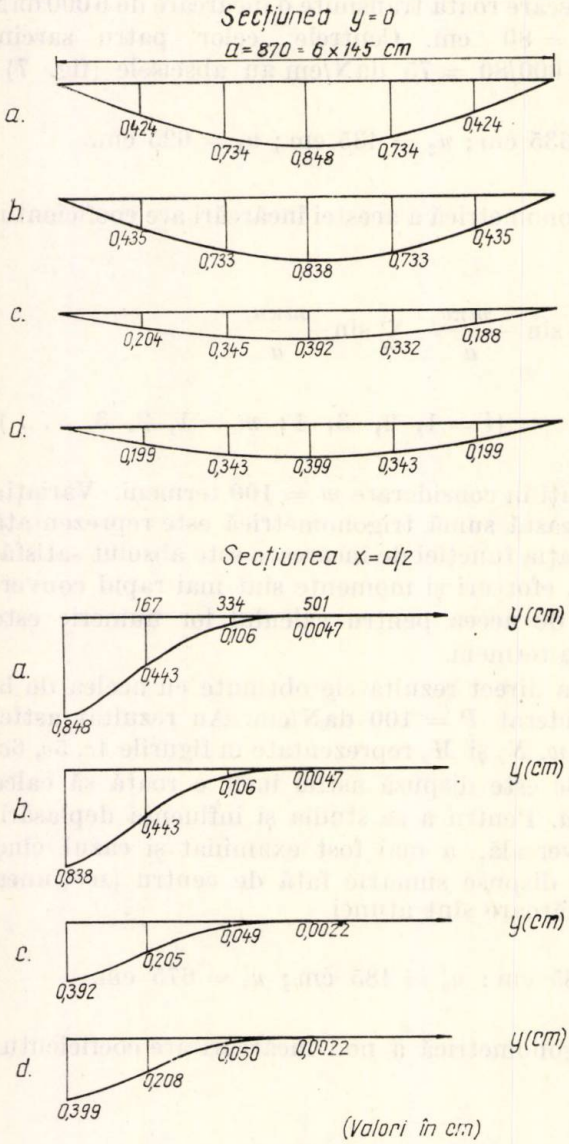


Fig. 4. — Variaţia săgeţilor w în secţiunile $y = 0$ şi $x = a/2$ pentru sarcina : *a*) sinusoidală ; *b*) constantă ; *c*) provenind din două autocamioane dispuse nesimetric ; *d*) provenind din două autocamioane dispuse simetric.

8. OBSERVAŢII. CONCLUZII

În studiul de faţă a fost stabilită o soluţie a plăcilor ortotrope, bazată pe netezirea nervurilor pe ambele direcţii ale plăcii. În literatura de specialitate (vezi de exemplu [7]) este studiat cazul în care rigidităţile

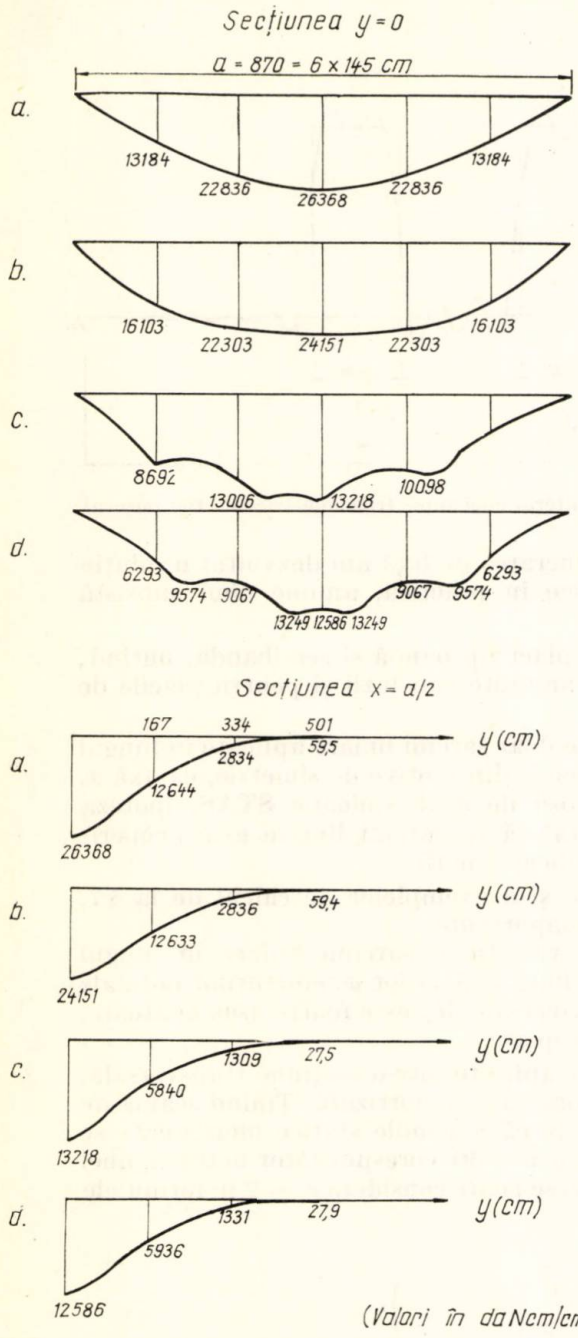


Fig. 5. — Variația momentului încovoietor M_x în secțiunile $y = 0$ și $x = a/2$ pentru sarcina: *a*) sinusoidală; *b*) constată; *c*) provenind din două autocamioane dispuse nesimetric; *d*) provenind din două autocamioane dispuse simetric.

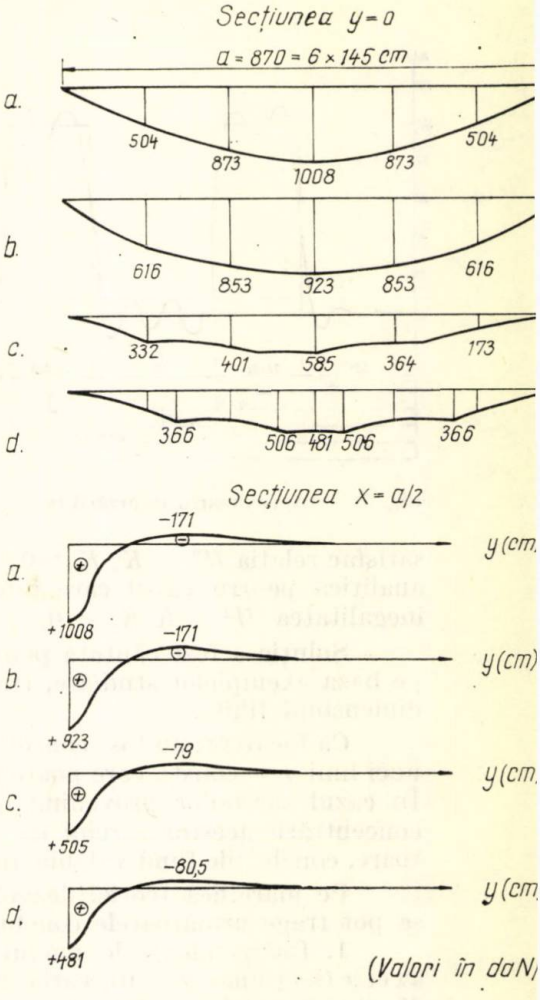


Fig. 6. — Variația efortului longitudinal N_x în secțiunile $y = 0$ și $x = a/2$ pentru sarcina: *a*) sinusoidală; *b*) constantă; *c*) provenind din două autocamioane dispuse nesimetric; provenind două autocamioane dispuse simetric.

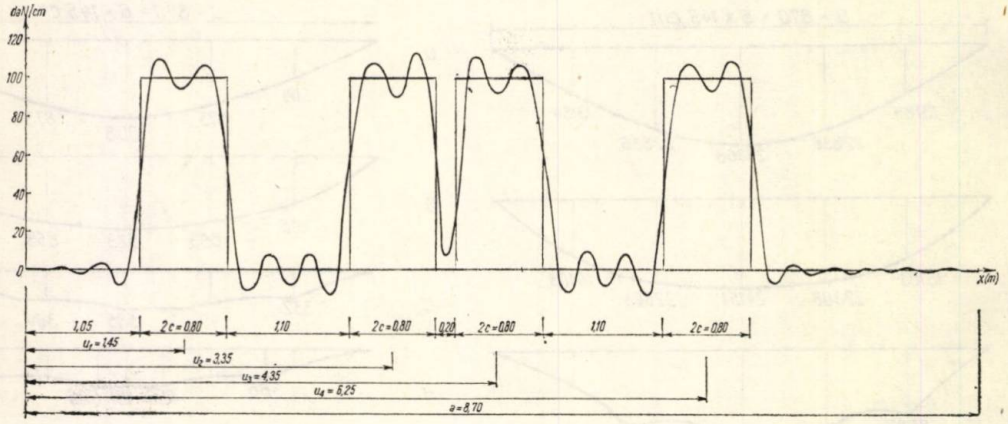


Fig. 7. — Aproximarea încărcării reale cu ajutorul unei sume trigonometrice de 100 termeni.

satisfac relaţia $H^2 - K_x K_y > 0$; în lucrarea de faţă am dezvoltat o soluţie analitică pentru cazul care intervine în practică, anume cînd subzistă inegalitatea $H^2 - K_x K_y < 0$.

Soluţia a fost căutată pentru plăci tip bandă şi semibandă, putînd, pe baza exemplelor studiate, trage anumite concluzii şi pentru plăcile de dimensiuni finite.

Ca încărcări au fost considerate doar sarcini liniare aplicate în lungul unei linii $y = \text{const.}$, care poate fi luată, din motive de simetrie, ca axă x. În cazul sarcinilor provenind din osii de autocamioane STAS, ipoteza concentrării acestor sarcini de suprafaţă în sarcini liniare este acoperitoare, concluziile fiind valabile în ambele situaţii.

Pe marginea teoriei dezvoltate şi a exemplelor de calcul de la § 7, se pot trage următoarele concluzii importante.

1. Independent de modul de variaţie a sarcinii liniare în lungul axei x (secţiunea $y = 0$), variaţia în lung a săgeţilor w, eforturilor normale N_x şi momentelor încovoietoare transversale M_x este foarte asemănătoare, secţiunile de anulare fiind foarte apropiate.

2. Influenţa unei sarcini liniare aplicate într-o secţiune transversală, fie $y = 0$, se pierde după o lege exponenţială amortizată. Ţinînd seama de concluzia precedentă, se poate admite că mărimile statice menţionate se anulează în secţiunile date de formulele (39) corespunzător acţiunii unei sarcini sinusoidale. În mod acoperitor, se poate considera $k = 2$ în formulele precedente, rezultînd astfel

$$\text{— pentru săgeţile } w \qquad y_0 = \frac{a}{\beta}\left(2 - \frac{\varphi^\circ}{\pi}\right),$$

$$\text{— pentru momentele } M_x y_2 = \frac{a}{\beta}\left(2 - \frac{\varphi'}{\pi}\right). \tag{40}$$

3. În felul acesta o placă ortotropă foarte lungă poate fi limitată la o placă a cărei lungime (în sensul axei y) se întinde cu y_0 sau y_2 de la ultima sarcină aplicată. Dintre cele două distanțe y_0 sau y_2 se recomandă să se aleagă distanța cea mai mare. Placa se va considera simplu rezemată în aceste două secțiuni.

4. Dacă placa ortotropă este încărcată identic în mai multe secțiuni transversale, suprafețele $w(x,y)$, M_x (x,y),... pot fi privite ca niște suprafețe de influență și se poate lucra prin suprapunerea efectelor, adică prin sumarea convenabilă a ordonatelor (probleme similare sînt întîlnite și la grinzile pe mediu elastic, semiplanul elastic, etc).

5. Legea de variație a sarcinii liniare are importanță în secțiunea corespunzătoare. Pentru a avea o idee asupra ordinului de mărime, în toate exemplele considerate s-a admis $P = 100$ daN/cm; de aici, în mod evident, a rezultat că sarcina uniform distribuită este cea mai defavorabilă.

6. Pentru poziția în sens transversal a celor două osii de autocamioane a reieșit că poziția corespunzătoare cazului cînd o roată calcă la mijloc este cea mai defavorabilă; diferența dintre acest caz și acela în care autocamioanele sînt dispuse simetric față de centru, în ce privește valorile lui M_x, este de cca 5% (autocamioanele sînt deplasate cu 50 cm în sens transversal, în exemplul considerat).

7. Alura diagramei de momente este puternic influențată de distribuția sarcinii discontinue (din autocamioane) — vezi figurile 5*c* și *d*-. Oscilațiile curbei dispar însă rapid cu cît ne depărtăm de secțiunea încărcată.

8. Soluția analitică dezvoltată condiționează modul de rezemare a plăcii, impunînd ca două laturi opuse să fie simplu rezemate; celelalte două laturi pot fi la distanță finită, în care caz toate cele patru familii de constante de integrare C_{1m}, ... C_{4m} trebuie să fie determinate, sau la distanță infinită, așa cum s-a dezvoltat soluția analitică de față.

Ținînd însă seama de propunerea de la punctele 2 și 3, placa poate fi considerată simplu rezemată după cealaltă direcție, iar în sensul axei Ox pot fi considerate rezemări mai complexe, cum ar fi prezența unor console ale plăcii ortotrope.

9. Ca ordin de mărime, solicitarea locală a plăcii ortotrope nu este dominantă pentru dimensionarea ei. Pentru aceasta, vom verifica placa ortotropă pentru cazul de încărcare din autocamioane dispuse în poziția cea mai defavorabilă (vezi punctul 7.4).

Pentru momentul de inerție I_x corespund modulii de rezistență (vezi figura 2):

$$W_{x\,\text{sup.}} = \frac{177020}{14{,}76} = 11993{,}2 \text{ cm}^3,$$

$$W_{x\,\text{inf.}} = \frac{177020}{54{,}69} = 3236{,}8 \text{ cm}^3$$

Analog se obține aria $A_x = 286{,}8$ cm^2.

Momentul încovoietor şi efortul axial aferent se obţin prin însumarea momentelor M_x, respectiv a eforturilor N_x în sensul axei y, pe lăţimea aferentă b; în mod aproximativ, se va efectua numeric această integrală *

$$\mathcal{M}_x = 2\int_0^{b/2} M_x dy \approx \frac{\Delta y}{3}(M_{-1} + 4M_0 + M_1) = \frac{2}{3}\Delta y(2M_0 + M_1) =$$

$$= \frac{167}{3}(2 \times 13218{,}2 + 9466{,}76) = 1998609 \text{ daNcm},$$

$$\mathcal{N}_x = \frac{2}{3}\Delta y(2N_0 + N_1) = \frac{167}{3}(2 \times 505{,}368 + 79{,}831) = 60708{,}2 \text{ daN}.$$

Se ţine seama că intensitatea încărcării reale este 75 daN/cm (în loc de 100), deci corespunde efortul unitar maxim

$$\sigma_{xi} = \frac{75}{100}\left(\frac{60708{,}2}{286{,}8} + \frac{1998609}{3236{,}8}\right) = 158{,}75 + 463{,}41 = 622{,}2 \text{ daN/cm}^2$$

*

Ultima problemă care se ridică este însă aceea a valabilităţii teoriei bazate pe netezirea nervurilor pe cele două direcţii.

Întreaga literatură „clasică" admite în mod intuitiv această ipoteză. După părerea noastră însă, ea nu poate da decît o imagine globală asupra deformatei şi secţiunilor transversale la care putem limita propagarea influenţei unor sarcini transversale. În cazul în care nervurile de pe cele două direcţii diferă sensibil ca rigiditate proprie şi ca echidistanţă, netezirea nu mai este justificată, lucru semnalat şi de I. Beleş [2], N.M. Dehousse [10], [11] şi Wah Thein şi L.R. Calcote [12].

Toate valorile numerice au fost obţinute la un calculator electronic IRIS, în baza unui program elaborat de ing. Aureli Pârvu, căruia autorul îi aduce şi pe această cale mulţumirile sale.

Primită la redacţie la 14 septembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

10. N.M. Dehousse, J. Desprez, *Les bordages orthotropes plans. Calcul d'une porte plane d'écluse.* Mémoires CERES, *22*, (1967), p. 3—125.

11. N.M. Dehousse, *Contribution au calcul des portes planes d'écluses*, Annales des Travaux Publics de Belgique, *5* (1967).

12. Wah Thein, L.R. Calcote, *Structural Analysis by Finite Difference Calculus*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

* Datele numerice au fost obţinute de la calculatorul electronic pentru secţiuni echidistante cu $b = 83{,}5$ cm.

UN MODEL DE ELEMENT FINIT PENTRU PLĂCI CURBE DE ROTAȚIE ÎNCHISE

de N. GRĂDINARU

Centrul de mecanică a solidelor

Pentru plăcile curbe de rotație închise se propune pentru calculul lor în regim dinamic un model de element finit de înaltă precizie. În acest scop se utilizează, ecuațiile clasice ale teoriei plăcilor curbe elastice subțiri, precizia fiind asigurată prin reprezentarea componentelor vectorului deplasării prin polinoame de ordinul trei pentru deplasările tangențiale și polinom de ordinul 7 pentru deplasarea după normală.
Condiția de periodicitate a soluției este asigurată prin dezvoltarea componentelor în serii Fourier trigonometrice. Aplicînd principiul deplasărilor virtuale este stabilită ecuația frecvențelor proprii pentru a n^{-a} armonică. Pentru rezolvarea acestei ecuații poate fi elaborat un program de calcul și în acest scop pot fi folosite rezultatele date în anexă.

1. FORMULELE DE BAZĂ ALE TEORIEI PLĂCILOR CURBE DE ROTAȚIE ÎNCHISE

1.1. PARAMETRII GEOMETRICI

Considerăm suprafața de rotație referită la un sistem de coordonate ortogonal ξ, θ, ζ. Coordonata ξ este adimensională și reprezintă una dintre mărimile z/L, r/L, s/L, Ψ, unde r este raza de girație, s lungimea arcului de meridian, iar Ψ unghiul pe care îl face normala la meridian cu axa de rotație în sensul pozitiv al arcului s (fig. 1).

Mărimea L este o dimensiune caracteristică a suprafeței. Coordonatele unui punct oarecare M de pe suprafață mediană a plăcii se exprimă sub forma

$$x = L\varphi(\xi)\cos\theta, \quad y = L\varphi(\xi)\sin\theta,$$

$$z = L\,\Phi(\xi). \qquad (1.1.1)$$

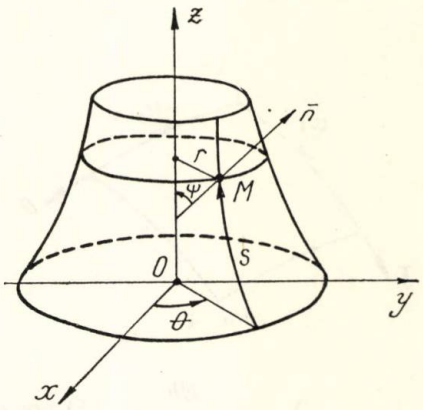


Fig. 1

Coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței și razele principale de curbură sînt

$$A = L\,a(\xi), \quad B = L\,b(\xi), \qquad (1.1.2)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{L}\, k_1(\xi), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{L}\, k_2(\xi), \tag{1.1.3}$$

unde

$$a(\xi) = (\varphi'^2 + \Phi'^2)^{1/2}, \; b(\xi) = \varphi, \tag{1.1.4}$$

$$k_1(\xi) = -(\varphi'\Phi'' - \varphi''\Phi')/a^3(\xi), \; k_2(\xi) = -\Phi'/a(\xi)b(\xi). \tag{1.1.5}$$

1.2. COMPONENTE FIZICE

Sensul pozitiv al forţelor şi momentelor este prezentat în figura 2 şi figura 3, semnificaţia lor fizică fiind cunoscută [1].

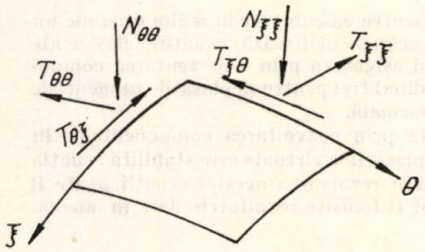


Fig. 2

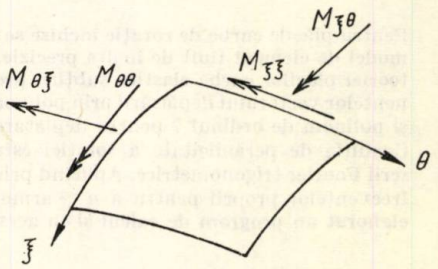


Fig. 3

Deplasările tangenţiale u_ξ, u_θ şi deplasarea normală w sînt orientate ca în figura 4.

Deoarece în lucrarea de faţă se studiază numai plăcile de rotaţie închise putem considera pentru componentele fizice următoarele expresii :

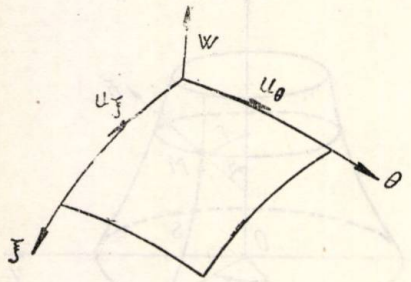


Fig. 4

$$u_\xi = LU_1(\xi)\cos n\theta, \; u\theta = LU_2(\xi)\sin n\theta, \; w = LW(\xi)\cos n\theta, \tag{1.2.1}$$

$$T_{\xi\xi} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\, t_{11}(\xi)\cos n\theta, \; T_{\xi\theta} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\, t_{12}(\xi)\sin n\theta, \; T_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\, t_{22}(\xi)\cos n\theta, \tag{1.2.2}$$

$$N_{\xi\xi} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\, n_{11}(\xi)\cos n\theta, \; N_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\, n_{22}(\xi)\sin n\theta, \tag{1.2.3}$$

$$M_{\xi\xi} = \frac{1}{L}\,\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\, m_{11}(\xi)\cos n\theta, \; M_{\xi\theta} = \frac{1}{L}\,\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\, m_{12}(\xi)\sin n\theta, \; M_{\theta\theta} = \frac{1}{L}\,\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\, m_{22}(\xi)\cos n\theta, \tag{1.2.4}$$

(E — modulul de elasticitate, μ — coeficientul lui Poisson, h — grosimea plăcii).

1.3. DEFORMAȚII DE MEMBRANĂ ȘI DE ÎNCOVOIERE

Ținînd seama de (1.2.2) și (1.2.4) deformațiile de membrană și cele de încovoiere au forma:

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{11}(\xi) \cos n\theta, \quad \varepsilon_{\xi\theta} = \varepsilon_{12}(\xi) \sin n\theta, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{22}(\xi) \cos n\theta, \tag{1.3.1}$$

$$x_{\xi\xi} = x_{11}(\xi) \cos n\theta/L, \quad x_{\xi\theta} = x_{12}(\xi) \sin n\theta/2L, \quad x_{\theta\theta} = x_{22}(\xi) \cos n\theta/L. \tag{1.3.2}$$

Introducînd vectorii

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}\}, \tag{1.3.3}$$

$$\{x\}^T = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}\}, \tag{1.3.4}$$

și vectorul deplasărilor generalizate

$$\{D_g\}^T = \{U_1, U_1', U_2, U_2', W, W', W'', W'''\}, \tag{1.3.5}$$

ecuațiile de deformații se pot scrie

$$\{\varepsilon\} = [R_\varepsilon]\{D_g\}, \quad \{x\} = [R_x]\{D_g\}. \tag{1.3.6}$$

Matricile $[R_\varepsilon]$ și $[R_x]$ se găsesc în anexă.

1.4. LEGEA CONSTITUTIVĂ

În lucrare se adoptă legea constitutivă sub forma simplificată propusă de Löve [1], [2].

Introducînd vectorii

$$\{t\}^T = \{t_{11}, t_{12}, t_{22}\}, \tag{1.4.1}$$

$$\{m\}^T = \{m_{11}, m_{12}, m_{22}\}, \tag{1.4.2}$$

și ținînd seama de (1.3.3) și (1.3.4) legea constitutivă este

$$\{t\} = [H]\{\varepsilon\}, \tag{1.4.3}$$

$$\{m\} = [H]\{x\}, \tag{1.4.4}$$

unde matricea $[H]$ are forma

$$[H] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & \dfrac{1-\mu}{2} & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4.5}$$

1.5. ENERGIA INTERNĂ DE DEFORMAȚIE

Energia internă de deformație are expresia [1], [2].

$$E_d = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_S (T_{\xi\xi}\, \varepsilon_{\xi\xi} + T_{\xi\theta}\, \varepsilon_{\xi\theta} + T_{\theta\theta}\, \varepsilon_{\theta\theta} + M_{\xi\xi}\, x_{\xi\xi} + \right.$$

$$\left. + 2\, M_{\xi\theta}\, x_{\xi\theta} + M_{\theta\theta}\, x_{\theta\theta})\, AB\, d\xi\, d\theta \right) d\xi. \tag{1.5.1}$$

Introducînd (1.2.2), (1.2.4), (1.3.1) şi (1.3.2) în relaţia de mai sus şi ţinînd seama de (1.1.2), (1.3.3) şi (1.3.2) se obţine

$$E_d = \pi \frac{Eh L^2}{1-\mu^2} \int \left(\{\varepsilon\}^T \{t\} + \frac{h^2}{12 L^2} \{x\}^T \{m\} \right) ab \, d\xi. \tag{1.5.2}$$

1.6. LUCRUL MECANIC AL FORŢELOR INERŢIALE

Lucrul mecanic al forţelor inerţiale are expresia

$$L_{in} = -\rho \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_S (u_\xi \ddot{u}_\xi + u_\theta \ddot{u}_\theta + w \ddot{w}) AB d\xi d\theta \right) d\zeta \tag{1.6.1}$$

(ρ — densitatea specifică).

Considerînd că toate mărimile fizice sînt de forma

$$\varepsilon_f = \varepsilon \cos \omega t, \tag{1.6.2}$$

unde ω este frecvenţa circulară şi introducînd (1.2.1) în (1.6.1) obţinem

$$L_{in} = \pi m L^4 \omega^2 \int (U_1^2 + U_2^2 + W^2) ab \, d\xi, \tag{1.6.3}$$

unde m este masa unităţii de suprafaţă ($m = \rho h$).

2. MODELUL ELEMENTULUI FINIT

Elementul finit de placă curbă de rotaţie închisă se obţine prin secţionarea plăcii cu două plane perpendiculare pe axa de rotaţie (fig. 5).

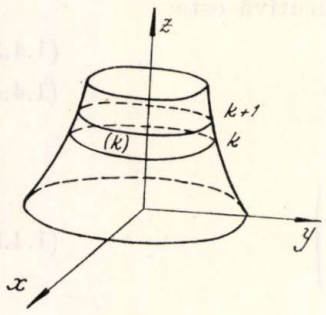


Fig. 5

2.1. FUNCŢII DE INTERPOLARE

Pentru fiecare element finit se consideră coordonata locală $\bar{\xi}$ legată de coordonata ξ prin relaţia

$$\xi = \bar{\xi} (\xi_{k+1} - \xi_k)/2 + (\xi_{k+1} + \xi_k)/2, \tag{2.1.1}$$

unde ξ_k şi ξ_{k+1} sînt coordonatele punctelor de diviziune k şi $k+1$. Se observă uşor că

$$\bar{\xi} \in [-1, +1]. \tag{2.1.2}$$

Ca funcţii de interpolare se aleg polinoame de ordinul trei pentru deplasările tangenţiale şi polinom de ordinul şapte pentru deplasarea după normala, adică

$$\begin{aligned} U_1 &= p_0 + p_1\bar{\xi} + p_2\bar{\xi}^2 + p_3\bar{\xi}^3, \\ U_2 &= q_0 + q_1\bar{\xi} + q_2\bar{\xi}^2 + q_3\bar{\xi}^3, \\ W &= r_0 + r_1\bar{\xi} + r_2\bar{\xi}^2 + r_3\bar{\xi}^3 + r_4\bar{\xi}^4 + r_5\bar{\xi}^5 + r_6\bar{\xi}^6 + r_7\bar{\xi}^7. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Fie vectorii

$$\{D\}^T = \{U_1,\ U_2,\ W\}, \tag{2.1.4}$$

$$\{c\}^T = \{p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ r_0,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ r_5,\ r_6,\ r_7\}. \tag{2.1.5}$$

Relaţiile (2.1.3) se scriu matriceal

$$\{D\} = [N]\ \{c\}. \tag{2.1.6}$$

Matricea $[N]$ este dată în anexă.

2.2. CALCULUL COEFICIENŢILOR POLINOMIALI

Fiecărei margini a elementului finit i se ataşează vectorul deplasărilor generalizate $\{D_g\}$. Introducem şi vectorul

$$\{\bar{D}_g\}^T = \left\{ U_1, \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\xi},\ U_2, \frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}\xi}\ W, \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}\ \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\xi^2}, \frac{\mathrm{d}^3W}{\mathrm{d}\xi^3} \right\}. \tag{2.2.1}$$

Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{2}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \tag{2.2.2}$$

se poate scrie

$$\{\bar{D}_g\} = [T]\{D_g\}. \tag{2.2.3}$$

Calculînd componentele vectorului $\{\bar{D}_g\}$ în punctele de diviziune k şi $k+1$ rezultă

$$\begin{Bmatrix} \bar{D}_g^{(k)} \\ \bar{D}_g^{(k+1)} \end{Bmatrix} = [R]\ \{c\}, \tag{2.2.4}$$

de unde, utilizînd (2.2.3), se obţine

$$\{c\} = [Q] \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_g^{(k)} \\ D_g^{(k+1)} \end{Bmatrix}, \quad ([Q] = [R]^{-1}). \tag{2.2.5}$$

Matricile $[Q]$ şi $[T]$ sînt date în anexă.

2.3. CALCULUL DEFORMAŢIILOR DE MEMBRANĂ ŞI DE ÎNCOVOIERE

Ţinînd seama de (2.1.3) şi de (1.3.5) rezultă

$$\{D_g\} = [F]\ \{c\}. \tag{2.3.1}$$

Introducînd (2.3.1) în (1.3.6) obţinem

$$\{\varepsilon\} = [R_\varepsilon]\ [P]\ \{c\}, \tag{2.3.2}$$

$$\{\varkappa\} = [R_\varkappa]\ [P]\ \{c\}, \tag{2.3.3}$$

unde

$$[P] = [T][\bar{P}]. \tag{2.3.4}$$

Matricea $[\bar{P}]$ este dată în anexă.

3. MATRICEA DE RIGIDITATE ŞI MATRICEA MASELOR

3.1. CALCULUL MATRICII DE RIGIDITATE

Din (1.4.3) şi (1.4.4) se obţine, ţinînd seama de (2.3.2) şi (2.3.3),

$$\{t\} = [H][R_\varepsilon]\ [P]\ \{c\}, \tag{3.1.1}$$

$$\{m\} = [H]\ [R_x]\ [P]\ \{c\}. \tag{3.1.2}$$

Introducînd (2.3.2), (2.3.3), (3.1.1) şi (3.1.2) în expresia energiei de deformaţie rezultă

$$E_d = \pi \frac{Eh\,L^2}{1-\mu^2}\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \{c\}^T\ [P]^T\ ([R_\varepsilon]^T\ [H]\ [R_\varepsilon] +$$

$$+ \frac{h^2}{12\,L^2}[R_x]^T\ [H]\ [R_x])\ [P]\ \{c\}\ ab\ \mathrm{d}\xi. \tag{3.1.3}$$

Ţinînd seama de (2.2.5) obţinem în final

$$E_d = \pi \frac{Eh\,L^2}{1-\mu^2}\{D_g^{(k)},\ D_g^{(k+1)}\}\ [K]_k \begin{Bmatrix} D_g^{(k)} \\ D_g^{(k+1)} \end{Bmatrix}, \tag{3.1.4}$$

unde $[K]_k$ este matricea de rigiditate a elementului k şi are expresia

$$[K]_k = \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} [S]^T\ [P]^T \Big([R_\varepsilon]^T\ [H]\ [R_\varepsilon] +$$

$$+ \frac{h^2}{12\,L^2}\ [R_x]^T\ [H]\ [R_x] \Big) [P]\ [S]\ ab\mathrm{d}\xi. \tag{3.1.5}$$

Matricea $[S]$ este

$$[S] = [Q]\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}. \tag{3.1.6}$$

3.2. CALCULUL MATRICEI MASELOR

Ţinînd seama de (2.1.4) expresia lucrului mecanic al forţelor inerţiale devine

$$L_{\text{in}} = \pi m L^4 \omega^2 \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \{D\}^T\ \{D\}\, ab\mathrm{d}\xi. \tag{3.2.1}$$

Introducînd în relaţia de mai sus (2.1.6) şi (2.2.5) se obţine

$$L_{\text{in}} = \pi m L^4 \omega^2 \{D_g^{(k)}, D_g^{(k+1)}\} [M]_k \begin{Bmatrix} D_g^{(k)} \\ D_g^{(k+1)} \end{Bmatrix}, \tag{3.2.2}$$

unde $[M]_k$ este matricea maselor a elementului k şi are expresia

$$[M]_k = \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} [S]^T [N]^T [N] [S] ab \mathrm{d}\xi. \tag{3.2.3}$$

4. SPECTRUL VALORILOR PROPRII

Fie

$$[K] = \sum_k^{1,l} [K]_k \tag{4.1.1}$$

şi

$$[M] = \sum_k^{1,l} [M]_k \tag{4.1.2}$$

matricea de rigiditate şi matricea maselor pentru întreaga placă curbă divizată în l elemente finite (asamblarea matricelor de element se face după regulile bine cunoscute).
Notăm

$$\{D_t\}^T = \{D_g^{(1)}, D_g^{(2)}, \ldots, D_g^{(l)}\} \tag{5.1.3}$$

vectorul deplasărilor generalizate în punctele de diviziune 1, 2, ... l.

Utilizînd principiul deplasărilor virtuale rezultă

$$\delta (\{D_t\})^T ([K] - \lambda [M]) \{D_t\} = 0, \tag{5.1.4}$$

de unde obţinem ecuaţia care determină spectrul valorilor proprii :

$$\det | [K] - \lambda [M] | = 0, \tag{5.1.5}$$

cu notaţia

$$\lambda = \frac{1 - \mu^2}{Eh} m L^2 \omega^2. \tag{5.1.6}$$

Vectorii proprii $\{D_t\}$ sînt ortogonali în sensul relaţiei

$$\{D_t\}_i^T [M] \{D_t\}_j = \delta_{ij}, \tag{5.1.7}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

ANEXĂ

1. Matricea $[R_\varepsilon]$ – dimensiune 3×8

0	$1/a$	0	0	k_1	0	0	0
$-n/b$	0	$-b'/ab$	$1/a$	0	0	0	0
b'/ab	0	n/b	0	k_2	0	0	0

2 Matricea $[R_x]$ – dimensiune 3×8

k_1'/a	k_1/a	0	0	0	a'/a^3	$-1/a^2$	0
$-2nk_1/b$	0	$-2b'k_2/ab$	$2k_2/a$	$-2nb'/ab^2$	$2n/ab$	0	0
$b'k_1/ab$	0	nk_2/b	0	n^2/b^2	$-b'/a^2b$	0	0

3 Matricea $[N]$ – dimensiune 3×16

1	$\overline{\xi}$	$\overline{\xi}^2$	$\overline{\xi}^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	$\overline{\xi}$	$\overline{\xi}^2$	$\overline{\xi}^3$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\overline{\xi}$	$\overline{\xi}^2$	$\overline{\xi}^3$	$\overline{\xi}^4$	$\overline{\xi}^5$	$\overline{\xi}^6$	$\overline{\xi}^7$

cu $\overline{\xi} = 2\xi/(\xi_{k+1} - \xi_k) - (\xi_{k+1} + \xi_k) / (\xi_{k+1} - \xi_k)$

4. Matricea $[Q]$ — dimensiune 16 × 16

1/2	1/4	0	0	0	0	0	0	1/2	−1/4	0	0	0	0	0	0
−3/4	−1/4	0	0	0	0	0	0	3/4	−1/4	0	0	0	0	0	0
0	−1/4	0	0	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0	0
1/4	1/4	0	0	0	0	0	0	−1/4	1/4	0	0	0	0	0	0
0	0	1/2	1/4	0	0	0	0	0	0	1/2	−1/4	0	0	0	0
0	0	−3/4	−1/4	0	0	0	0	0	0	3/4	−1/4	0	0	0	0
0	0	0	−1/4	0	0	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0
0	0	1/4	1/4	0	0	0	0	0	0	−1/4	1/4	0	0	0	0
0	0	0	0	1/2	11/32	3/32	1/96	0	0	0	0	1/2	−11/32	3/32	−1/96
0	0	0	0	−35/32	−19/32	−1/8	−1/96	0	0	0	0	35/32	19/32	1/8	1/96
0	0	0	0	0	−15/32	−7/32	−1/32	0	0	0	0	0	15/32	−7/32	1/32
0	0	0	0	35/32	35/32	5/16	1/32	0	0	0	0	−35/32	35/32	−5/16	1/32
0	0	0	0	0	5/32	5/32	1/32	0	0	0	0	0	− 5/32	5/32	−1/32
0	0	0	0	−21/32	−21/32	−1/14	−1/32	0	0	0	0	21/32	−21/32	1/4	−1/32
0	0	0	0	0	−1/32	−1/32	−1/96	0	0	0	0	0	1/32	−1/32	1/96
0	0	0	0	5/32	5/32	1/16	1/96	0	0	0	0	−5/32	5/32	−1/16	1/96

5. Matricea $[T]$ – dimensiune 8×8

Este o matrice diagonală cu
diag $[T] = \{1, d, 1, d, 1, d, d^2, d^3\}$,
unde

$$d = (\xi_{k+1} - \xi_k)/2.$$

6. Matricea $[\bar{P}]$ – dimensiune 8×16

1	$\bar{\xi}$	$\bar{\xi}^2$	$\bar{\xi}^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	$2\bar{\xi}$	$3\bar{\xi}^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	$\bar{\xi}$	$\bar{\xi}^2$	$\bar{\xi}^3$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	$2\bar{\xi}$	$3\bar{\xi}^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\bar{\xi}$	$\bar{\xi}^2$	$\bar{\xi}^3$	$\bar{\xi}^4$	$\bar{\xi}^5$	$\bar{\xi}^6$	$\bar{\xi}^7$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$2\bar{\xi}$	$3\bar{\xi}^2$	$4\bar{\xi}^3$	$5\bar{\xi}^4$	$6\bar{\xi}^5$	$7\bar{\xi}^6$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	$6\bar{\xi}$	$12\bar{\xi}^2$	$20\bar{\xi}^3$	$30\bar{\xi}^4$	$42\bar{\xi}^5$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	$24\bar{\xi}$	$60\bar{\xi}^2$	$120\bar{\xi}^3$	$210\bar{\xi}^4$

BIBLIOGRAFIE

1. V.V. Novojilov, *Teoria plăcilor curbe subțiri* (în l. rusă), Moscova, 1951.
2. A.L. Goldenweizer, *Teoria plăcilor curbe elastice subțiri* (în l. rusă), Gostehizdat, Moscova, 1953.

Primită la redacție la 30 martie 1974.

STABILITATEA CILINDRULUI CIRCULAR REALIZAT DIN MATERIAL ELASTO-PLASTIC CU CONSOLIDARE LINIARĂ, SOLICITAT DE O PRESIUNE RADIALĂ URMĂRITOARE

de DAN COȘA, IOAN DEUTSCH
Universitatea Brașov

Lucrarea tratează într-o concepție unitară, valabilă în toate registrele de solicitare (elastic, elasto-plastic, plastic), problema stabilității cilindrului circular solicitat de o presiune radială urmăritoare, în ipotezele micilor deplasări și a materialului elasto-plastic cu consolidare liniară. Problema este echivalentă studierii stabilității unui inel circular a cărui rigiditate și poziție a fibrei neutre de încovoiere diferă în funcție de sensul variației de curbură și de intensitatea solicitării. Lucrarea se încheie cu prezentarea algoritmului de calcul și cu o aplicație numerică.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

1.1. PARTICULARITĂȚILE PROBLEMEI STUDIATE

Problema stabilității (turtirii) cilindrului circular solicitat de o presiune radială urmăritoare reprezintă o problemă teoretică de larg interes practic care se poate pune la orice conductă circulară de joasă presiune care străbate un fluid aflat la o presiune ridicată.

Strîns legată de problema similară a inelului circular, turtirea tubului ridică aceleași întrebări ca și aceasta, la care se adaugă necesitatea considerării efectului pe care eforturile și deformațiile în lungul generatoarei îl au asupra stabilității, și aceasta cu atît mai mult, cu cît în cazul pierderii stabilității în stadiul elasto-plastic efectul celei de-a treia direcții de solicitare (după generatoare) conjugat cu cel al eforturilor după celelalte două direcții (radială și tangențială) poate fi determinant în precizarea caracteristicilor mecanice ale diverselor straturi de material ce alcătuiesc tubul.

Dacă se admite că cilindrul este solicitat identic pe toată lungimea sa, care este mare în raport cu diametrul, în secțiuni diferite, suficient de depărtate de capete pentru ca efectul acestora să poată fi neglijat, fenomenul de instabilitate se produce identic.

În aceste condiții problema stabilității tubului se reduce la problema stabilității unui inel de lățime unitate detașat din tub prin două secțiuni plane și normale pe generatoare, obligate să rămînă plane și normale pe generatoare și după deformarea secțiunii transversale a tubului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 1, 1975, P.. 55–76

Găsirea presiunii critice corespunzătoare stadiului elastic nu comportă dificultăți deosebite, soluția problemei fiind cunoscută și unanim acceptată.

Diversitatea de păreri apare abia la studierea pierderii stabilității în stadiul superelastic, potrivit cu modalitățile pe care diferiți cercetători le-au ales pentru soluționarea problemelor specifice solicitării superelastice a tubului.

În mare, s-au cristalizat două modalități de rezolvare și anume:

1. Deducerea pe baza unui mare număr de încercări experimentale la scară naturală, prelucrate statistic, a unor relații simple de calcul; un exemplu reprezentativ în acest sens îl constituie Normele A.P.I. pentru calculul presiunilor critice ale burlanelor de tubaj din industria petroliferă.

2. Imaginarea pe baza unor ipoteze inițiale ferme a unor algoritme de calcul, bine fundamentate din punct de vedere teoretic, depinzînd de un număr redus de parametri a căror determinare se face experimental.

Privind comparativ cele două modalități de abordare a problemei pot fi evidențiate principalele lor avantaje și dezavantaje.

Astfel, aplicarea la proiectare a unor norme obținute pe prima cale, oferă o mare siguranță în exploatare și permite utilizarea unor coeficienți de siguranță mici, dar în același timp trebuie ținut seama că astfel de norme necesită efectuarea pentru fiecare tip dimensiune și calitate de material a unor experiențe costisitoare și complicate.

La cea de-a doua modalitate dificultățile constau în alegerea ansamblului de ipoteze care să exprime cît mai fidel fenomenul fizic și în obținerea unui algoritm de calcul simplu, aplicabil unei varietăți cît mai mari de calități ale materialului; dacă însă aceste dificultăți pot fi depășite, avantajele ce decurg din existența unui mod unitar de interpretare a fenomenului de instabilitate în toate registrele de solicitare și pentru diferite materiale la care este suficientă cunoașterea doar a unui număr minim de caracteristici mecanice, devin deosebit de importante, suficiente pentru a justifica interesul și eforturile cercetătorilor în această direcție.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm un algoritm general pentru calculul presiunii critice a cilindrului circular solicitat radial de o presiune urmăritoare uniformă. Acest algoritm ne-a fost sugerat de cîteva observații importante, și anume:

(a) Pierderea stabilității formei circulare nu se poate face fără modificarea *în ambele sensuri* a curburii inițiale a peretelui cilindrului.

(b) Pentru tubul solicitat de o presiune radială, uniformă, intensitatea solicitării unitare globale interioare variază pe grosimea peretelui, scăzînd de la interior către exterior.

(c) La tipurile uzuale de oțeluri, pentru eforturi ce depășesc limita de elasticitate (rămânînd totuși inferioare celor ce provoacă ecruisarea), modulul de elasticitate instantaneu corespunzător creșterii încărcării este *strict necrescător* (la descărcare modulul de elasticitate este unic și egal cu cel din stadiul elastic).

Prin corelarea observațiilor (a), (b) și (c) se ajunge la concluzia că *pentru solicitări exterioare cărora le corespund solicitări interioare peste limita de elasticitate, la modificări mici ale formei secțiunii transversale (de tipul celor ce apar în momentul pierderii stabilității) rigiditatea de ansamblu a peretelui diferă în funcție de sensul de variație a curburii inițiale și de*

intensitatea solicitării exterioare; de asemenea în funcție de aceiași parametri diferă și poziția fibrei neutre.

Cu privire la necesitatea cunoașterii cît mai exacte a caracteristicilor mecanice ale materialului, trebuie arătat că în comparație cu problema instabilității superelastice a barei drepte, în care precizia rezultatelor depindea direct și exclusiv de aproximarea curbei caracteristice, în cazul instabilității inelului această curbă intervine sub formă prelucrată care în condițiile unei schematizări judicioase (fie ea chiar și foarte simplă) poate asigura continuitatea și veridicitatea rezultatelor.

1.2. IPOTEZE DE CALCUL. CONȚINUTUL LUCRĂRII

Cadrul în care se vor face toate considerațiile care urmează este delimitat de următoarele ipoteze de bază :

(I) Materialul este elasto-plastic cu consolidare liniară.

(II) Se alege drept criteriu de plastificare a materialului criteriul intensității eforturilor unitare ale lui A.A. Iliușin.

(III) Deformațiile în lungul generatoarelor cilindrului sînt nule (stare de deformație plană).

(IV) Secțiunea inelară a tubului va fi considerată ca o bară cu curbură mică.

(V) La modificarea prin încovoiere a formei secțiunii transversale a tubului, se admite ca valabilă ipoteza lui Bernoulli.

(VI) Deplasările sînt mici și pot fi asimilate cu niște infiniți mici de ordinul I.

Cu privire la asnamblul de ipoteze enunțate mai sus, trebuie subliniat faptul că el nu conține contradicții și că este adecvat tipului de problemă pe care ne-am propus-o spre rezolvare.

Importanța și rolul fiecăreia din cele șase ipoteze de bază vor fi evidențiate pe parcursul lucrării, în acele puncte cheie ale argumentării teoretice în care ele s-au impus cu necesitate.

Elaborarea algoritmului de calcul al încărcării critice la cilindrul circular solicitat de o presiune radială urmăritoare, presupune rezolvarea cîtorva probleme distincte a căror prezentare va fi făcută în paragrafele următoare ale lucrării.

Astfel, o primă problemă este aceea a precizării pentru o presiune exterioară dată a naturii stării de solicitare în care se află tubul (elastică, elasto-plastică sau plastică).

O a doua problemă o constituie examinarea comportării unui element infinitezimal aflat în peretele tubului, și a comportării globale a unei secțiuni radiale prin tub, la modificări mici ale formei secțiunii transversale a tubului.

A treia problemă, și ultima, este găsirea presiunii critice a unui inel la care rigiditățile și pozițiile fibrelor neutre diferă în funcție de sensul variației de curbură.

Considerarea celor trei probleme, ca aspecte simultane ale problemei stabilității cilindrului, și indicarea rezolvării lor corelate reprezintă algoritmul de calcul căutat.

Lucrarea se încheie cu exemplificarea algoritmului pe o aplicație numerică.

2. DETERMINAREA STADIULUI DE SOLICITARE A TUBULUI SUPUS LA O PRESIUNE EXTERIOARĂ DATĂ

Întrucît problema stării de efort a unui tub cu pereți groși în ipotezele (I), (II) și (III) a fost deja rezolvată și poate fi găsită ca atare în literatura de specialitate, ne vom limita doar la a prelua și prelucra acele relații care prezintă interes din punctul nostru de vedere.

La un tub cu pereți groși (fig. 1) a cărui rază interioară este R_i și cea exterioară este R_e, solicitat de o presiune exterioară $-p_e$, care provoacă plastificare unei coroane circulare cu limita maximă R^*, efortul σ_r într-un punct aflat în zona elastică la distanța R de centrul secțiunii ($R^* \leqslant R \leqslant R_e$) are, potrivit lucrării [1], expresia

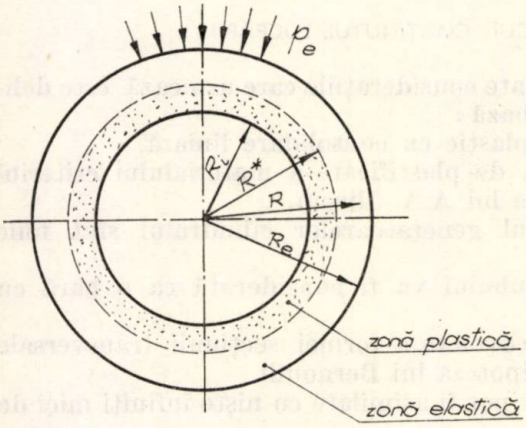


Fig. 1

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[\frac{R^{*2}}{R_i^2} - \frac{R^{*2}}{R^2} - \left(1 - \frac{E_i^*}{E_i}\right)\left(\frac{R^{*2}}{R_i^2} - 1 + 2\ln\frac{R^*}{R_i}\right)\right], \tag{1}$$

în care E_i și E_i^* reprezintă pantele corespunzătoare porțiunilor elastică și, respectiv, plastică a curbei caracteristice a materialului elasto-plastic cu consolidare liniară, ca reprezentare grafică a relației între intensitatea eforturilor unitare σ_i și intensitatea deformațiilor ε_i.

Punînd condiția $R = R_e$, σ_r din (1) devine egal cu $-p_e$, iar relația astfel obținută devine ecuația din a cărei rezolvare se află R^*

$$\sqrt{3}\frac{p_e}{\sigma_c} = \frac{R^{*2}}{R_i^2}\left(1 - \frac{R_i^2}{R_e^2}\right) - \left(1 - \frac{E_i^*}{E_i}\right)\left(\frac{R^{*2}}{R_i^2} - 1 + 2\ln\frac{R^*}{R_i}\right). \tag{2}$$

Ecuația (2) are soluții acceptabile doar dacă tubul se află realmente într-o stare elasto-plastică ceea ce conduce în mod firesc la necesitatea precizării intervalului în care poate varia p_e pentru a se realiza o astfel de stare.

Dacă în (1) se consideră $R = R_e$ și $R^* = R_i$, se obține valoarea maximă a presiunii exterioare pentru care starea tubului este în întregime elastică

$$(p_e)_{el} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{R_i^2}{R_e^2}\right]. \tag{3}$$

Dacă în (1) se consideră $R = R_e$ și $R^* = R_e$, se obține valoarea minimă a presiunii exterioare pentru care starea tubului este în întregime plastică

$$(p_e)_{pl} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}}\left[\frac{E_i^*}{E_i}\left(\frac{R_e^2}{R_i^2} - 1\right) + 2\left(1 - \frac{E_i^*}{E_i}\right)\ln\frac{R_e}{R_1}\right]. \tag{4}$$

Rezultă deci că pentru $(p_e)_{el} \leqslant p_e \leqslant (p_e)_{pl}$, starea tubului este elasto-plastică, şi pentru a preciza cît din grosimea tubului lucrează elastic şi cît lucrează plastic se procedează la rezolvarea ecuaţiei (2).

Pentru uşurarea rezolvării acestei ecuaţii, se rearanjează sub forma

$$\alpha = 1 - (1 - \beta)\frac{1}{\rho^2} - 2 \ln \rho, \tag{5}$$

în care cu α, β şi ρ s-au notat

$$\alpha = \sqrt{3}\,\frac{p_e}{\sigma_c}\,\frac{1}{1 - \dfrac{E_i^*}{E_i}}; \qquad \beta = \frac{1 - \dfrac{R_i^2}{R_e^2}}{1 - \dfrac{E_i^*}{E_i}}; \qquad \rho = \frac{R_i}{R^*}, \tag{6}$$

şi s-au intabulat valorile funcţiei $\alpha = \alpha(\beta, \rho)$ pentru valori uzuale ale lui β şi ρ.

Deoarece pentru un anume caz concret interesează ρ, se calculează α şi β şi se caută în tabel ρ corespunzător.

Ţinem să atragem atenţia asupra faptului că atunci cînd în tabel pentru un anumit grupaj de valori α şi β există două valori ale lui ρ, valoarea care interesează este cea mai mare dintre ele.

În figura 2 s-au reprezentat valorile lui α pentru cîteva valori date ale lui β şi o variaţie continuă a lui ρ.

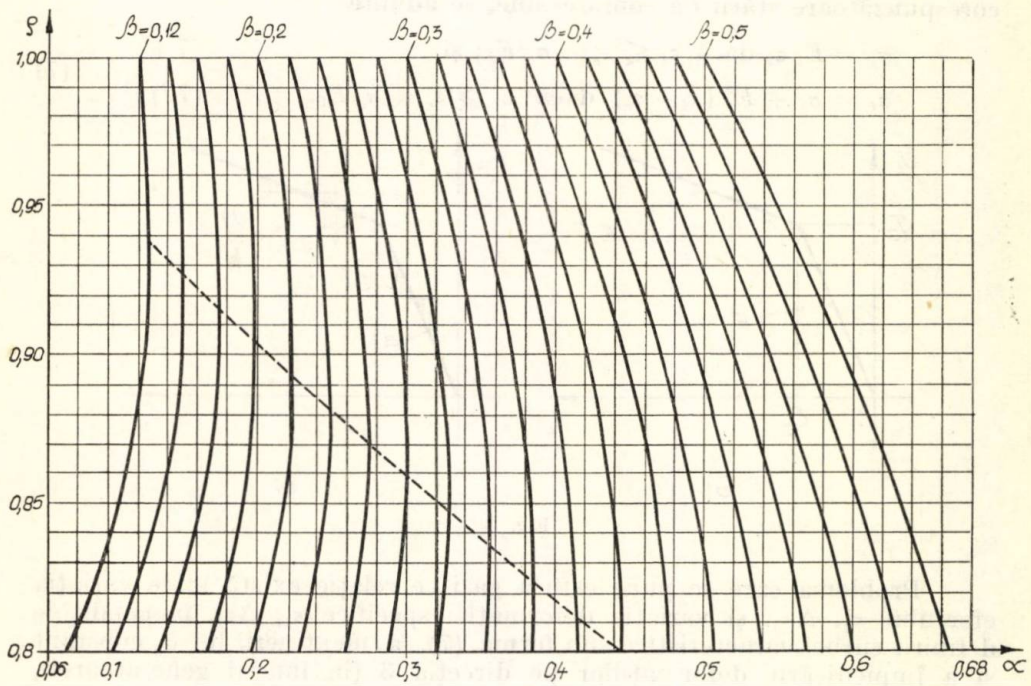


Fig. 2

3. STUDIUL RIGIDITĂȚILOR LA ÎNCOVOIERE A PERETELUI TUBULUI

Studiul stabilității formei circulare a secțiunii transversale a tubului solicitat de o presiune radială uniformă, ne obligă la cunoașterea caracteristicilor de deformabilitate a peretelui tubului, la tendința de modificare a formei secțiunii transversale.

Prezența presiunii exterioare influențează în mod decisiv aceste caracteristici atît la nivelul unui element infinitezimal de perete, cît și la nivelul unei întregi secțiuni radiale prin peretele tubului.

3.1. DEFORMABILITATEA UNUI ELEMENT INFINITEZIMAL

Dată fiind natura solicitării tubului, un element infinitezimal din peretele său se află, ținînd seama și de ipoteza (III), într-o stare de compresiune triaxială care, în funcție de intensitatea presiunii exterioare și a poziției în perete a elementului infinitezimal, poate fi elastică sau plastică.

Ipoteza (IV) ne permite ca la calculul caracteristicilor de deformabilitate considerațiile să fie făcute pe un element de formă paralelipipedică care este solicitat în momentul apariției tendinței de modificare a formei de eforturile unitare de compresiune σ_1 (după tangentă), σ_2 (după rază) și σ_3 (după generatoare).

Reprezentarea analitică a curbei caracteristice a unui material elasto-plastic cu consolidare liniară poate fi făcută sub forma (7), ca în figura 3*a*.

Considerînd ca pozitive eforturile unitare și deformațiile specifice corespunzătoare stării de compresiune, se admite

$$\begin{aligned} &\sigma_i = E_i\,\varepsilon_i \text{ dacă } \varepsilon_i \leqslant \varepsilon_c = \sigma_c/E_i\,; \text{ și} && (7') \\ &\sigma_i = \sigma_c + E_i^*\,(\varepsilon_i - \varepsilon_c) \text{ dacă } \varepsilon_i \geqslant \varepsilon_c = \sigma_c/E_i\,. && (7'') \end{aligned} \qquad (7)$$

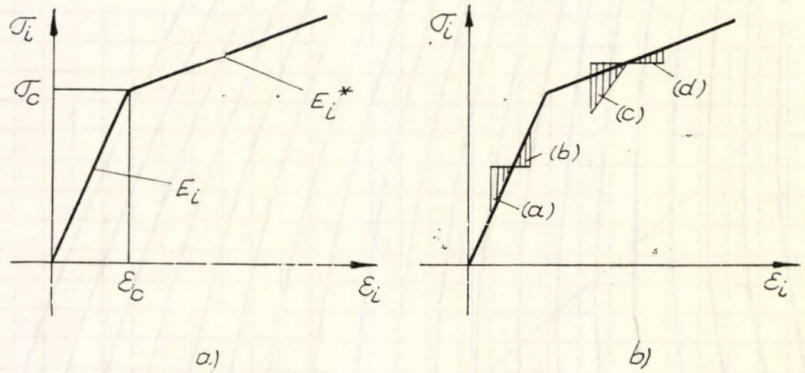


Fig. 3

Problema care se pune este a găsi ce relație există între variația efortului σ_1, $\Delta\sigma_1$, și variația deformației specifice ε_1, $\Delta\varepsilon_1$, în condițiile definirii curbei caracteristice sub forma (7), a menținerii lui σ_2 constant și a împiedicării deformațiilor pe direcția 3 (în lungul generatoarei), $\varepsilon_3 = \Delta\varepsilon_3 = 0$.

Întrucît efortul unitar σ_1 este de compresiune, se va considera *încărcare* acea modificare a stării de tensiune care provoacă creşterea compresiunii, şi *descărcare* modificarea care provoacă scăderea ei.

Urmărind figura 3*b* se pot distinge patru cazuri care se pot ivi : încărcare sau descărcare pentru stadiul elastic sau plastic.

Potrivit definiţiei, σ_i şi ε_i se calculează în cazul cel mai general cu relaţiile

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}. \tag{9}$$

Admiţînd că tensiunile σ_1, σ_2, σ_3 variază foarte puţin cu mărimile $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$, intensitatea σ_i a eforturilor unitare suferă o variaţie $\Delta\sigma_i$ de acelaşi ordin de mărime.

$$\sigma_i+\Delta\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_1-\sigma_2)+(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2)]^2+[(\sigma_2-\sigma_3)+(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_3)]^2+ \atop +[(\sigma_3-\sigma_1)+(\Delta\sigma_3-\Delta\sigma_1)]^2}. \tag{10}$$

Ţinînd seama de (8) şi de faptul că variaţiile eforturilor sînt mici, după unele transformări elementare, care presupun neglijarea variaţiilor de ordinul doi sau mai mare, se obţine din (10) expresia variaţiei $\Delta\sigma_i$

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2\sigma_i}[(\sigma_1-\sigma_2)(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2)+(\sigma_2-\sigma_3)(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_3)+(\sigma_3-\sigma_1)(\Delta\sigma_3-\Delta\sigma_1)]. \tag{11}$$

În mod analog se obţine pentru $\Delta\varepsilon_i$ expresia

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{2}{9\varepsilon_i}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\Delta\varepsilon_1-\Delta\varepsilon_2)+(\varepsilon_2+\varepsilon_3)(\Delta\varepsilon_2-\Delta\varepsilon_3)+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)(\Delta\varepsilon_3-\Delta\varepsilon_1)]. \tag{12}$$

Întrucît în literatura de specialitate pot fi întîlnite cu referire la modulele de elasticitate ale materialului două definiţii în funcţie de semnificaţia mărimilor σ şi ε pentru care se dă curba caracteristică, este necesară corelarea acestor mărimi cu modulul de elasticitate corespunzător stării de deformaţie plană care ne interesează.

Se notează cu

E_1 şi E_1^* modulii de elasticitate ce se obţin direct la încercarea de tracţiune (compresiune) monoaxială,

E_i şi E_i^* modulii de elasticitate corespunzători reprezentării curbei caracteristice prin mărimile (σ_i, ε_i),

E şi E^* modulii de elasticitate pentru starea de deformaţie plană.

În stadiul elastic, cazurile (b) și (a) din figura 3*b*, comportarea materialului este identică la încărcare și la descărcare, iar între caracteristicile elastice E_1, E_i și E există relațiile

$$E = \frac{1}{1-\mu^2} E_1; \qquad E_i = \frac{3}{2(1+\mu)} E_1; \qquad E = \frac{2}{3(1-\mu)} E_i, \tag{13}$$

în care μ este coeficientul lui Poisson.

Considerînd $\Delta\sigma_2 = 0$, rezultă că

$$\Delta\sigma_1 = E \cdot \Delta\varepsilon_1. \tag{14}$$

În stadiul plastic la descărcare, cazul (c), în virtutea binecunoscutei „teoreme a descărcării" materialul se comportă ca și în stadiul elastic, relația (14) fiind valabilă și în acest caz.

Pentru încărcarea în domeniul plastic, cazul (d), stabilirea unei relații de tip (14) pornește de la relația evidentă

$$\Delta\sigma_i = E_i^* \cdot \Delta\varepsilon_i \tag{15}$$

și de la condițiile (16) de compatibilitate a deformațiilor în domeniul plastic,

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1), \end{aligned} \tag{16}$$

în care s-a considerat că materialul este incompresibil ($\varepsilon_\gamma = 0$).

Relația între E_i^* și E_1^* se obține pornind de la (15) în care $\Delta\sigma_i$ și $\Delta\varepsilon_i$, avînd expresiile (11) și, respectiv, (12), se calculează corespunzător variației de solicitare monoaxială $\Delta\sigma_1$ ($\sigma_2 = \sigma_3 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\ \varepsilon_1$ și $\Delta\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon_3 = -0{,}5\ \Delta\varepsilon_1$). Întrucît $\Delta\sigma_i = \Delta\sigma_1$ și $\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon_1$, rezultă că $E_i^* = E_1^*$.

Pentru obținerea relației între E^* și E_i^* se pleacă tot de la relația (15), în care $\Delta\sigma_i$ și $\Delta\varepsilon_i$ sînt calculate pentru o stare de deformație plană la o variație a solicitării pe direcția 1, $\Delta\sigma_1$ ($\Delta\sigma_2 = 0$; $\varepsilon_3 = \Delta\varepsilon_3 = 0$) ca în figura 4.

Incompresibilitatea materialului, asociată cu obligarea elementului de volum la o deformație plană, ne conduce la $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ și $\Delta\varepsilon_2 = -\Delta\varepsilon_1$,

iar relațiile (16) particularizate corespunzător acestei situații devin

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_1,$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = -\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_1, \qquad (17)$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = -\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_1.$$

Variația intensității deformației are valoarea $\Delta\varepsilon_i = 4\varepsilon_1$. $\Delta\varepsilon_1/3\varepsilon_i$ iar cea a intensității efortului unitar total, calculată pe bază relațiilor (17), are valoarea $\Delta\sigma_i = \varepsilon_1 \cdot \Delta\sigma_1/\varepsilon_i$, în consecință $E^* = \Delta\tau_1/\Delta\varepsilon_1 = 4E_i^*/3$. Rezultă

$$E^* = \frac{4}{3}E_1^*; \qquad E_i^* = E_1^*; \qquad (18)$$

$$E^* = \frac{4}{3}E_i^*.$$

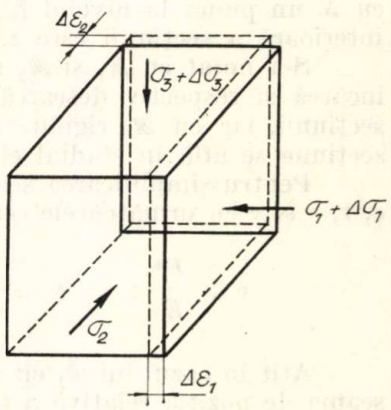


Fig. 4

Este interesant de observat că relațiile (18) pot fi obținute din (13) pentru $\mu = 0{,}5$ (concluzia nu este banală).

3.2. CALCULUL RIGIDITĂȚILOR GLOBALE LA ÎNCOVOIERE A PERETELUI TUBULUI

Recapitulînd cele arătate în paragraful precedent, reținem că o fibră inelară a peretelui tubului are la variații mici ale stării de solicitare caracteristici elastice diferite, în funcție de starea anterioară (elastică sau plastică) modificării de solicitare și de sensul acestei modificări după cum urmează :

(I) — în zonă plastică : $E_{(+)} = E^*$; $E_{(-)} = E$,

(II) — în zonă elastică : $E_{(+)} = E_{(-)} = E$.

Întrucît solicitarea oricărei fibre a inelului, anterioară modificării formei secțiunii transversale, este de compresiune, s-a notat cu $E_{(+)}$ modulul de elasticitate la încărcare (creșterea compresiunii) și cu $E_{(-)}$ modulul de elasticitate la descărcare (scăderea compresiunii).

Ipoteza (V) permite determinarea caracteristicilor globale de rigiditate la încovoiere a peretelui tubului ; prin două secțiuni paralele, normale pe generatoare, se extrage un inel care resecționat radial prezintă o secțiune dreptunghiulară de lățime unitate și înălțime t (grosimea peretelui cilindrului) din care o parte, de înălțime x, adiacentă feței interioare a peretelui, conține fibre cu proprietăți elastice de tip (I), iar restul, de înălțime $t-x$, conține fibre cu proprietăți de tip (II).

Este evident că, întrucît materialul aflat în porțiunea (I) se comportă diferit la încărcare și descărcare, comportarea de ansamblu a unui element de inel, și implicit caracteristica sa de rigiditate va fi diferită în funcție de sensul de încovoiere, după cum variația de solicitare predominantă a porțiunii (I) este de încărcare sau de descărcare.

Înțelegînd prin rigiditate la încovoiere $\mathscr{R}$ modulul raportului între momentul încovoietor M și variația de curbură δq pe care el o provoacă fibrei neutre a elementului de bară ($\mathscr{R} = |M/\delta q|$, ținînd seama că ipoteza (IV) ne permite să neglijăm efectul curburii inițiale asupra lui $\mathscr{R}$, în lucrarea [4] am tratat tocmai cazul care ne interesează. Rezultatele lucrării [4] vor fi prezentate pe scurt în cele ce urmează.

S-a notat cu P un punct situat la limita porțiunilor (I) și (II), iar cu N un punct la nivelul fibrei neutre a cărui distanță la extremitatea interioară a secțiunii este z.

S-a notat cu $\mathscr{R}_1$ și $\mathscr{R}_2$ rigiditățile corespunzătoare încovoierii care încarcă și respectiv descarcă fibra situată la extremitatea interioară a secțiunii, iar cu $\mathscr{R}_0$ rigiditatea la încovoiere pentru cazul cînd întreaga secțiune se află în stadiul elastic ($x = 0$).

Pentru simplificarea scrierii s-au introdus coeficienții adimensionali e, r, s și τ cu următoarele semnificații :

$$e = \frac{E^*}{E}; \qquad s = \frac{x}{t}; \qquad \tau_{1,2} = \frac{z_{1,2}}{t}; \qquad r_{1,2} = \frac{\mathscr{R}_{1,2}}{\mathscr{R}_0}. \tag{19}$$

Atît în cazul lui $\mathscr{R}_1$ cît și al lui $\mathscr{R}_2$ calculul a fost făcut ținîndu-se seama de poziția relativă a punctelor P și N, după cum s este mai mic sau mai mare decît τ.

Rezultatele lucrării [4] prezentate sintetic sînt următoarele :

Rigiditatea $\mathscr{R}_1$;

$$z_1 = \tau_1 t; \qquad \mathscr{R}_1 = r_1 \mathscr{R}_0.$$

Cazul A $0 \leqslant s \leqslant \dfrac{1}{1+\sqrt{e}}$ (figura 5 *a*),

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(1-e)s^2}{1-(1-e)s}, \tag{20}$$

$$r_1 = 4\,[(1-\tau_1)^3 + e\tau_1^3 + (1-e)\,(\tau_1 - s)^3]. \tag{21}$$

Cazul B $\dfrac{1}{1+\sqrt{e}} \leqslant s \leqslant 1$ (figura 5 *b*),

$$\tau_1 = \frac{1}{1+\sqrt{e}}, \tag{22}$$

$$r_1 = \frac{4e}{(1+\sqrt{e})^2}. \tag{23}$$

Rigiditatea $\mathscr{R}_2$:

$$z_2 = \tau_2 t; \qquad \mathscr{R}_2 = r_2 \mathscr{R}_0.$$

Cazul A $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}$ (figura 6 *a*),

$$\tau_2 = \frac{1}{2}, \tag{24}$$

$$r_2 = 1. \tag{25}$$

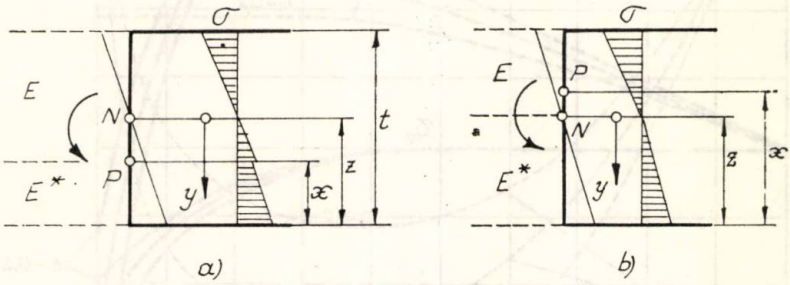


Fig. 5

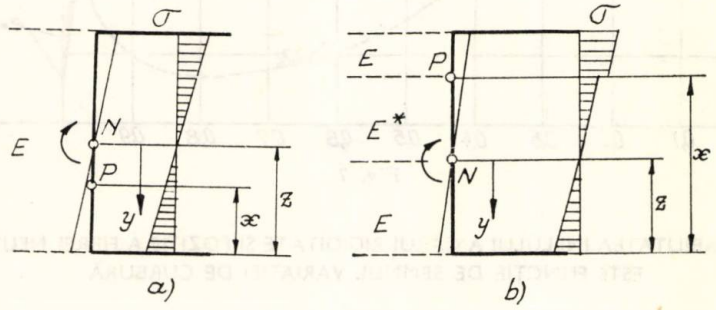


Fig. 6

Cazul B $\frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1$ (figura 6 *b*),

$$\tau_2 = \frac{\sqrt{1 - (1-e)(2s-1)} + (1-e)s - 1}{1-e}, \tag{26}$$

$$r_2 = 4\,[(1-\tau_2)^3 + \tau_2^3 - (1-e)(s-\tau_2)^3]. \tag{27}$$

Pentru ușurarea lucrului cu relațiile (20)—(27), valorile coeficienților τ_1, τ_2, r_2, și $k = r_1/r_2$ au fost intabulate ca funcții de e și s; în figura 7 sînt reprezentate pentru cîteva valori date ale lui e, variațiile în funcție de s a tuturor acestor coeficienți.

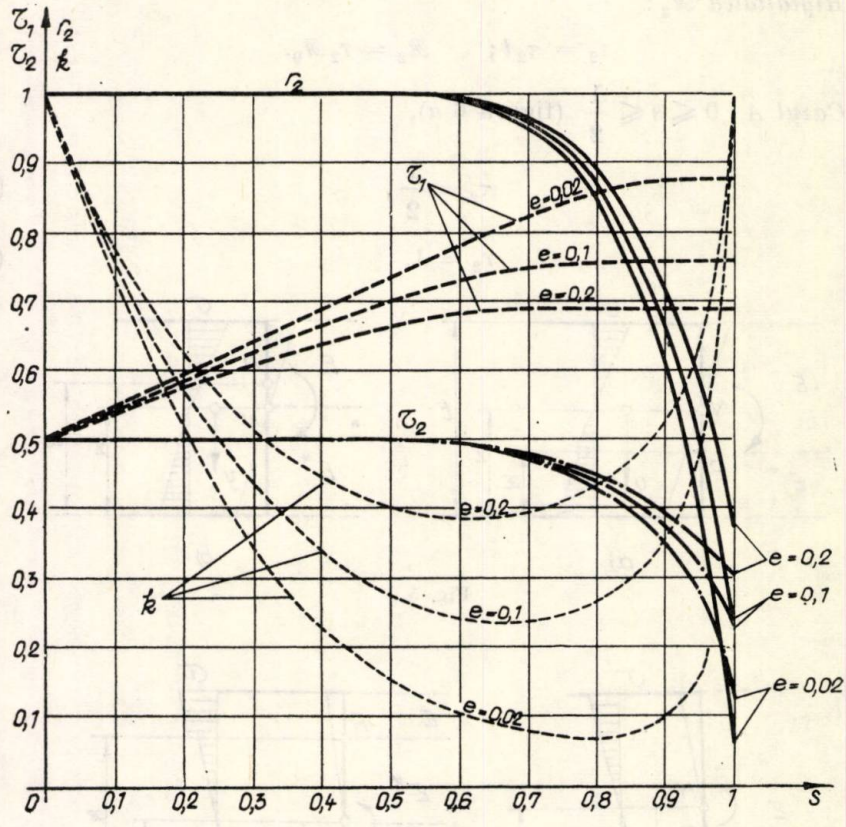


Fig. 7

4. STABILITATEA INELULUI A CĂRUI RIGIDITATE ȘI POZIȚIE A FIBREI NEUTRE ESTE FUNCȚIE DE SEMNUL VARIAȚIEI DE CURBURĂ

În cadrul ipotezei (VI), problema stabilității formei circulare a secțiunii transversale a cilindrului solicitat exterior de o presiune urmăritoare uniformă, se poate reduce în esență, indiferent de stadiul său de solicitare (elastic, elasto-plastic, plastic) la problema stabilității cvasielastice (în sensul Engesser-Karman) a unui inel a cărui rigiditate și poziție a fibrei neutre este funcție de semnul variației de curbură.

O problemă similară mai simplă a fost rezolvată în lucrarea [5] fiind considerat în calcul efectul semnului variației de curbură doar asupra rigidității.

Fie inelul circular din figura 8. Admitem că deformata inelului la pierderea stabilității prezintă pe porțiunile (1) creșteri ale curburii inițiale ($\delta q_1 > 0$), iar pe porțiunile (2) scăderi ale curburii inițiale ($\delta q_2 < 0$).

Unei porțiuni (1) a cărei rigiditate este $\mathscr{R}_1$ și cu fibra neutră la distanța R_1 de centrul cercului, îi corespunde un unghi la centru φ_1, iar pentru porțiunea (2) rigiditatea este $\mathscr{R}_2$, poziția fibrei neutre R_2 și unghiul la centru φ_2.

La nivelul fibrelor neutre, încărcările radiale ale porțiunilor (1) și (2) vor fi p_1 și, respectiv, p_2.

$$p_1 = p_e \frac{R_e}{R_1}; \quad p_2 = p_e \frac{R_e}{R_2}. \tag{28}$$

Provenite din p_e, încărcările p_1 și p_2 păstrează caracterul urmăritor al acesteia.

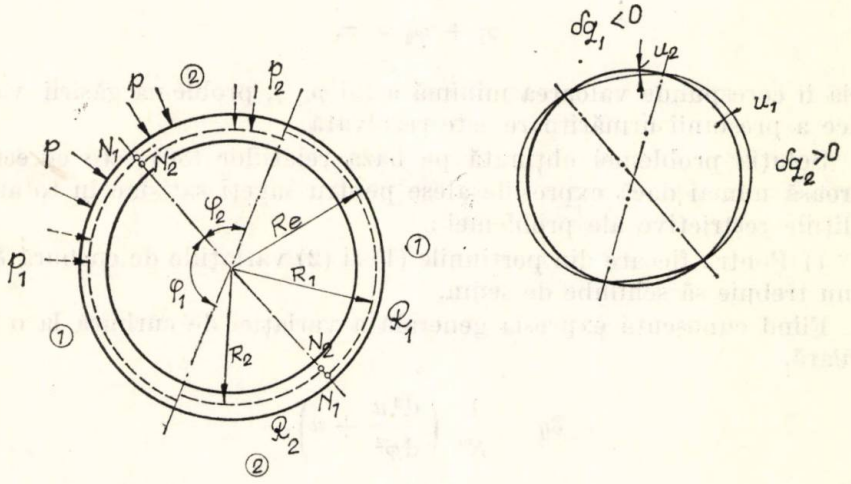


Fig. 8

După cum este cunoscut [2], ecuația săgeților normale u ale unei bare avînd raza de curbură R (măsurată la nivelul fibrei neutre) și rigiditatea $\mathscr{R}$ constante, solicitată de o presiune urmăritoare p, este

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}+1\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}+\frac{pR^2}{\mathscr{R}}+1\right)u = 0. \tag{29}$$

Se observă că ecuația (29) poate admite soluții de forma $u(\varphi) = U \sin \lambda\varphi$; scriind relația (29) corespunzător porțiunilor (1) și (2) (cu R_1, p_1, $\mathscr{R}_1$ și respectiv R_2, p_2, $\mathscr{R}_2$) alegînd pentru $u_1(\varphi)$ și $u_2(\varphi)$ expresiile

$$u_1(\varphi) = U_1 \sin \frac{\pi}{\varphi_1}\varphi; \qquad u_2(\varphi) = U_2 \sin \frac{\pi}{\varphi_2}\varphi, \tag{30}$$

condițiile ca (30) cu U_1 și U_2 nenule să satisfacă ecuațiile (29) particularizate, ne conduc la valorile critice ale presiunilor p_1 și p_2

$$p_{1,\,cr} = \frac{\mathscr{R}_1}{R_1^3}\left[\left(\frac{\pi}{\varphi_1}\right)^2 - 1\right]; \quad p_{2,\,cr} = \frac{\mathscr{R}^2}{R_2^3}\left[\left(\frac{\pi}{\varphi_2}\right)^2 - 1\right]. \tag{31}$$

Admițînd sub rezerva unei verificări ulterioare că soluțiile de forma (30) satisfac toate condițiile restrictive ale problemei, presiunea exterioară critică, aceeași pentru porțiunile (1) și (2), are una din expresiile (32).

$$p_{e,\,cr} = \frac{\mathscr{R}_1}{R_e R_1^2}\left[\left(\frac{\pi}{\varphi_1}\right)^2 - 1\right] = \frac{\mathscr{R}_2}{R_e R_2^2}\left[\left(\frac{\pi}{\varphi_2}\right)^2 - 1\right]. \tag{32}$$

Ataşînd la relaţiile (32), condiţia

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi, \tag{33}$$

căreia îi corespunde valoarea minimă a lui $p_{e,\,cr}$, problema găsirii valorii critice a presiunii urmăritoare este rezolvată.

Soluţia problemei obţinută pe baza relaţiilor (30) este corectă şi riguroasă numai dacă expresiile alese pentru săgeţi satisfac în totalitate condiţiile restrictive ale problemei :

1) Pentru fiecare din porţiunile (1) şi (2) variaţiile de curbură δq_1 şi δq_2 nu trebuie să schimbe de semn.

Fiind cunoscută expresia generală a variaţiei de curbură la o bară circulară,

$$\delta q = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u\right),$$

rezultă că

$$\delta q_1 = \frac{U_1}{R_1^2}\left[1 - \left(\frac{\pi}{\varphi_1}\right)^2\right]\sin\frac{\pi}{\varphi_1}\varphi\,; \quad \delta q_2 = \frac{U_2}{R_2^2}\left[1 - \left(\frac{\pi}{\varphi_2}\right)^2\right]\sin\frac{\pi}{\varphi_2}\varphi,$$

expresii care nu schimbă de semn pentru $\varphi \in (0,\ \varphi_1)$, respectiv pentru $\varphi \in (0,\ \varphi_2)$.

2) La limita între cele două zone, în punctele $N_1 \in (1)$ şi $N_2 \in (2)$ trebuie să existe continuitate pentru linia deformată şi pentru eforturi.

Continuitatea săgeţilor şi a momentelor este asigurată automat prin faptul că

$$u_1(N_1) = u_2(N_2) = 0,$$

$$M_1(N_1) = M_2(N_2) = 0.$$

Pentru verificarea celorlalte două condiţii de continuitate, a rotirii θ şi a forţei tăietoare T, se pleacă de la expresiile lor generale

$$\theta = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\,; \qquad T = -\frac{\mathscr{R}}{R^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}\varphi^3} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right),$$

ţinîndu-se seama şi de faptul că sensurile de creştere ale unghiurilor φ pentru cele două porţiuni sînt diferite, condiţiile de continuitate se scriu astfel:

$$\theta_1(N_1) = -\theta_2(N_2); \qquad T_1(N_1) = -T_2(N_2).$$

Prima condiţie este satisfăcută, dacă se alege $U_1/\varphi_1 R_1 = U_2/\varphi_2 R_2$, îndeplinindu-se totodată şi relaţia $\delta q_1 \cdot \delta q_2 < 0$.

Cea de-a doua condiţie se scrie sub forma

$$-\frac{\mathscr{R}_1}{R_1^3} U_1 \frac{\pi}{\varphi_1}\left[1-\left(\frac{\pi}{\varphi_1}\right)^2\right] = \frac{\mathscr{R}_2}{R_2^3} U_2 \frac{\pi}{\varphi_2}\left[1-\left(\frac{\pi}{\varphi_2}\right)^2\right],$$

condiţie evident satisfăcută dacă se ţine seama de relaţia între U_1 şi U_2, precum şi de egalitatea (32).

Fiind satisfăcute toate condiţiile restrictive ale problemei, rezultă că soluţia obţinută este corectă.

Calculul efectiv al presiunii critice cu una din relaţiile (32) presupune rezolvarea prealabilă a sistemului de ecuaţii

$$K\left[\left(\frac{\pi}{\varphi_1}\right)^2 - 1\right] = \left(\frac{\pi}{\varphi_2}\right)^2 - 1, \tag{34}$$

$$\frac{\varphi_1}{\pi} + \frac{\varphi_2}{\pi} = 1,$$

în care K s-a notat

$$K = \frac{\mathscr{R}_1}{\mathscr{R}_2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2. \tag{35}$$

S-a adoptat pentru calculul lui $p_{e,\,cr}$ expresia de forma

$$p_{e,\,cr} = \frac{3\mathscr{R}_2}{R_e R_2^2}\psi, \tag{36}$$

în care ψ este un coeficient subunitar

$$\psi = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\pi}{\varphi_2}\right)^2 - 1\right]. \tag{37}$$

Asociind relaţia (37) la sistemul (34), s-a exprimat coeficientul K în funcţie de ψ

$$K = \frac{3\psi(3\psi + 2 - 2\sqrt{3\psi+1})}{2\sqrt{3\psi+1} - 1}. \tag{38}$$

S-au intabulat valorile funcției $K(\psi)$, fapt care permite găsirea pentru un K dat, a coeficientului ψ corespunzător; graficul funcției $K(\psi)$ este reprezentat în figura 9.

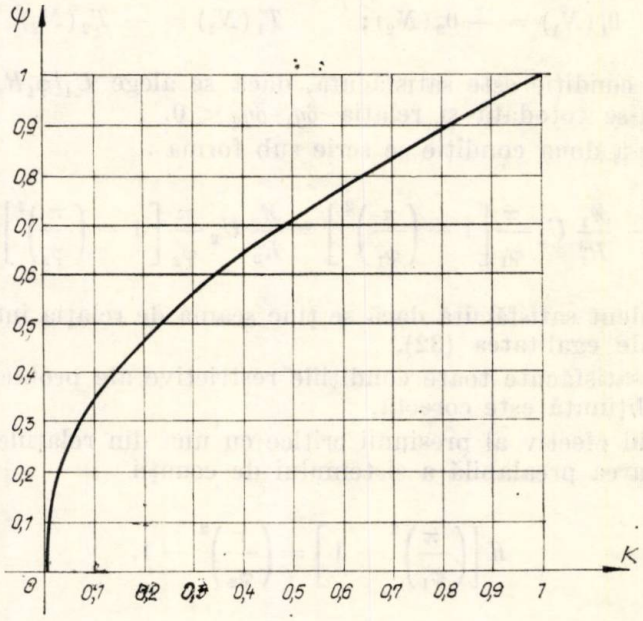


Fig. 9

5. DESCRIEREA ALGORITMULUI DE CALCUL

Fiind dat un tub de diametru exterior D și grosime a peretelui t, alcătuit dintr-un material elasto-plastic cu consolidare liniară ale cărui caracteristici sînt cunoscute pe baza unor încercări de tracțiune monoaxială (σ_c, μ, E_1, E_1^*), se cere să se afle valoarea critică a unei presiuni exterioare urmăritoare uniforme pentru care forma circulară a secțiunii transversale a tubului încetează de a mai fi stabilă.

Calculul presiunii critice presupune parcurgerea, în ordine, a următoarelor etape:

Se determină prin calcul caracteristicile elastice transformate E_i și E_i^*, E și E^* precum și raporturile e_i și e:

$$E_i = \frac{3}{2(1+\mu)} E_1; \qquad E_i^* = E_1^*; \qquad e_i = \frac{E_i^*}{E_i}, \tag{39}$$

$$E = \frac{1}{1-\mu^2} E_1; \qquad E^* = \frac{4}{3} E_1^*; \qquad e = \frac{E^*}{E}. \tag{40}$$

Se calculează caracteristica convențională de zveltețe a peretelui tubului

$$\Lambda = \frac{D}{t}. \tag{41}$$

Pierderea stabilității se produce elastic, elasto-plastic sau plastic după cum $p_{e,cr} \leqslant (p_e)_{el}$, $(p_e)_{el} \leqslant p_{e,cr} \leqslant (p_e)_{pl}$ sau $p_{e,cr} \geqslant (p_e)_{pl}$.

Ca și în cazul barelor drepte, este posibilă cunoașterea prealabilă în funcție de Λ, a domeniului în care are loc pierderea stabilității.

Pentru găsirea valorilor lui Λ la limitele celor trei domenii de instabilitate, se exprimă $p_{e,cr}$, $(p_e)_{el}$ și $(p_e)_{pl}$ în funcție de Λ.

$$R_e = \frac{1}{2} \cdot D = \frac{1}{2} \Lambda t,$$

$$R_i = \frac{1}{2} \cdot D - t = \left(\frac{1}{2} \Lambda - 1\right) t,$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot D - t + \tau_1 t = \left(\frac{1}{2} \Lambda - 1 + \tau_1\right) t,$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot D - t + \tau_2 t = \left(\frac{1}{2} \Lambda - 1 + \tau_2\right) t.$$

Rezultă

$$p_{e,cr} = \frac{3 \mathscr{R}_2}{R_e R_2^2} \psi(K) = E \frac{2 r_2 \cdot \psi(K)}{\Lambda (\Lambda - 2 + 2\tau_2)^2}, \tag{36'}$$

unde

$$K = \frac{\mathscr{R}_1}{\mathscr{R}_2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = k \left(\frac{\Lambda - 2 + 2\tau_2}{\Lambda - 2 + 2\tau_1}\right)^2. \tag{35'}$$

Coeficientii k, τ_1 și τ_2 sînt la rîndul lor funcții de starea de solicitare în care se află tubul

$$k = k(e, s); \qquad \tau_1 = \tau_1(e, s); \qquad \tau_2 = \tau_2(e, s),$$

$$(p_e)_{el} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{R_i^2}{R_e^2}\right] = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \frac{4(\Lambda - 1}{\Lambda^2}, \tag{3'}$$

$$(p_e)_{pl} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \left[\frac{E_i^*}{E_i} \left(\frac{R_e^2}{R_i^2} - 1\right) + 2 \left(1 - \frac{E_i^*}{E_i}\right) \ln \frac{R_e}{R_i}\right] =$$

$$= \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \left[e_i \frac{4(\Lambda - 1)}{(\Lambda - 2)^2} + 2(1 - e_i) \ln \frac{\Lambda}{\Lambda - 2}\right]. \tag{4'}$$

Pentru găsirea lui Λ_{el} la limita de demarcație între domeniul elastic și cel elasto-plastic se rezolvă ecuația

$$p_{e,cr} = (p_e)_{el},$$

coeficienții, k, r_2, τ_1, și τ_2 avînd valorile calculate corespunzător lui $s = 0$,

$$E \frac{2 \cdot r_2 \cdot \psi(K)}{\Lambda(\Lambda - 2 + 2\tau_2)^2}\Bigg|_{s=0} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \frac{4(\Lambda - 1)}{\Lambda^2}. \tag{42}$$

Pentru $s = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = 0,5$, $r_2 = k = K = \psi = 1$, relația (42) devine

$$\frac{2E}{\Lambda(\Lambda - 1)^2} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4(\Lambda - 1)}{\Lambda^2}$$

sau

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E}{\sigma_c} = \frac{(\Lambda - 1)^3}{\Lambda}. \tag{43}$$

Întrucît $\Lambda_{el} > 10$, se poate utiliza cu o foarte bună aproximație ca soluție a ecuației (43), relația

$$\Lambda_{el} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{21}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E}{\sigma_c}}. \tag{44}$$

Pentru găsirea lui Λ_{pl} la limita între pierderea elastoplastică și cea plastică a stabilității, se rezolvă ecuația

$$p_{e,cr} = (p_e)_{pl},$$

coeficienții k, r_2, τ_1 și τ_2 avînd valorile calculate corespunzător lui $s = 1$

$$E \frac{2r_2 \psi(K)}{\Lambda(\Lambda - 2 + 2\tau_2)^2}\Bigg|_{s=1} = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} \left[e_i \frac{4(\Lambda - 1)}{(\Lambda - 2)^2} + 2(1 - e_i) \ln \frac{\Lambda}{\Lambda - 2} \right]. \tag{45}$$

Pentru $s = 1$, $r_1^{pl} = r_2^{pl} = \dfrac{4e}{(1 + \sqrt{e})^2}$; $\quad k_{pl} = 1$,

$$\tau_1^{pl} = \frac{1}{1 + \sqrt{e}}; \qquad \tau_2^{pl} = \frac{\sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}},$$

$$K_{pl} = \left[\frac{\Lambda(1 + \sqrt{e}) - 2}{\Lambda(1 + \sqrt{e}) - 2\sqrt{e}} \right]^2, \tag{46}$$

Λ_{pl} mai poate fi considerat ca soluție a sistemului (47) de două ecuații cu necunoscute Λ_{pl} și ψ

$$\frac{3\psi(3\psi + 2 - 2\sqrt{3\psi + 1})}{2\sqrt{3\psi + 1} - 1} = \left[\frac{\Lambda(1 + \sqrt{e}) - 2}{\Lambda(1 + \sqrt{e}) - 2\sqrt{e}} \right]^2,$$

$$\sqrt{3} \frac{E}{\sigma_c} \cdot \frac{8e\psi}{\Lambda[\Lambda(1 + \Lambda\sqrt{e}) - 2]^2} = e_i \frac{4(\Lambda - 1)}{(\Lambda - 2)^2} + 2(1 - e_i) \ln \frac{\Lambda}{\Lambda - 2}, \tag{47}$$

a cărui rezolvare se face prin încercări.

Se observă că atît Λ_{el}, cît şi Λ_{pl} depind în exclusivitate de proprietăţile materialului din care este realizat tubul.

Comparînd pe Λ din cazul concret cu Λ_{el} şi Λ_{pl}, ne putem situa într-unul din următoarele trei cazuri:

Cazul I, $\Lambda > \Lambda_{el}$ — instabilitate elastică:

$$p_{e,cr} = \frac{2E}{\Lambda(\Lambda-1)^2}.$$

Cazul II, $\Lambda_{pl} < \Lambda < \Lambda_{el}$ — instabilitate elasto-plastică:

Calculul presiunii critice presupune găsirea prealabilă a porţiunii plastificate $x = st$ din grosimea peretelui.

Egalînd pe p_e din (2) cu p_{cr} sub forma (36'), obţinem o ecuaţie în care necunoscuta este x, sau în mărimi adimensionale, s

$$\sqrt{3}\,\frac{E}{\sigma_c}\cdot\frac{2r_2\cdot\psi(K)}{\Lambda(\Lambda-2+2\tau_2)^2} = \left[\frac{\Lambda-2(1-s)}{1-2}\right]^2 \frac{4(\Lambda-1)}{\Lambda^2} - \tag{48}$$
$$-(1-e_i)\left\{\left[\frac{\Lambda-2(1-s)}{\Lambda-2}\right]-1+2\ln\left[\frac{\Lambda-2(1-s)}{\Lambda-2}\right]\right\},$$

a cărei rezolvare se obţine prin încercări, ţinîndu-se seama că r_2, τ_2 şi K sînt funcţii de s.

Rezolvarea poate fi uşurată dacă se folosesc tabelele de rezolvare a ecuaţiei (48) adusă la forma (5)

$$\alpha = 1-(1-\beta)\frac{1}{\rho^2} - 2\ln\rho, \tag{5}$$

în care

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{1-e_i}\cdot\frac{E}{\sigma_c}\cdot\frac{r_2\psi(K)}{\Lambda(\Lambda-2+2\tau_2)^2}; \qquad \beta = \frac{4}{1-e_i}\cdot\frac{\Lambda-1}{\Lambda^2};$$

$$\rho = \frac{\Lambda-2}{\Lambda-2(1-s)}.$$

Odată aflat s, calculul presiunii critice pe baza relaţiei (36') nu mia prezintă nici o dificultate.

Cazul III $\Lambda \leqslant \Lambda_{pl}$ — instabilitate plastică

$$p_{e,cr} = E\,\frac{2r_2^{pl}\cdot\psi(K)}{\Lambda(\Lambda-2+\tau_2^{pl})^2},$$

K_{pl}, τ_2^{pl} şi r_2^{pl} au expresiile deduse anterior cu ocazia calculării lui Λ_{pl}.

Observaţie. Pentru obţinerea prin încercări fie a valorii lui Λ_{pl}, fie a mărimii lui s pentru un $\Lambda \in (\Lambda_{el}, \Lambda_{pl})$, se recomandă calcularea coefi-

cientului α pe două căi diferite : α' din considerente de tub cu perete gros solicitat elasto-plastic, şi α'' din considerente de instabilitate a inelului birigid. Condiţia care ne conduce la valoarea căutată este, evident, cea pentru care $\alpha' = \alpha''$.

Limita de aplicare a algoritmului. Potrivit ipotezei (IV) algoritmul este valabil doar pentru acele tuburi a căror secţiune transversală poate fi interpretată ca bară cu curbură mică (rază medie/grosime tub $\geqslant 5$),

$$\frac{R_m}{t} = \frac{D-t}{2t} \geqslant 5. \tag{50}$$

Din relaţia (50) rezultă valoarea minimă a lui Λ pentru care algoritmul propus este valabil.

$$\Lambda_{\min} = 11.$$

Aplicaţie numerică

Pentru tuburi realizate dintr-un material elasto-plastic cu consolidare liniară, ale cărui caracteristici sînt cunoscute ($E_i = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm^2; $\sigma_c = 2400$ daN/cm^2; $e_i = 0{,}1$; $\mu = 0{,}333$), se cere să se determine limitele de demarcaţie ale diferitelor tipuri de instabilitate, presiunile critice la aceste limite, precum şi presiunile critice corespunzătoare unor zvelteţi Λ ale tuburilor egale cu 34, cu 25 şi cu 13.

Rezolvare

Se determină caracteristicile materialului :

$$E = \frac{2}{3(1-\mu)} E_i = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2; \qquad \frac{E}{\sigma_c} = 0{,}875 \cdot 10^3,$$

$$e = 2(1-\mu)\, e_i = 0{,}133.$$

Se calculează Λ_{el} din condiţia $p_{e,cr} = (p_e)_{el}$:

$$\Lambda_{el} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{21}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{E}{\sigma_c}} = 29{,}2.$$

Se calculează Λ_{pl} din condiţia $p_{e,cr} = (p_e)_{pl}$:

$$\tau_1^{pl} = \frac{1}{1+\sqrt{e}} = 0{,}732; \qquad \tau_2^{pl} = \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} = 0{,}268;$$

$$r_2^{pl} = \frac{4e}{(1+\sqrt{e})^2} = 0{,}287,$$

$$K_{pl} = \left[\frac{\Lambda(1+\sqrt{e})-2}{\Lambda(1+\sqrt{e})-2\sqrt{e}}\right]^2 = \left(\frac{1{,}365\,\Lambda - 2}{1{,}365\,\Lambda - 0{,}73}\right)^2,$$

$$\beta = 4{,}444\,\frac{\Lambda-1}{\Lambda^2}; \qquad \rho_{pl} = \frac{\Lambda-2}{\Lambda}.$$

Pentru $\Lambda = 15$ rezultă :

$$\beta = 0{,}257\,; \qquad \rho = 0{,}867 \Rightarrow \alpha' = 0{,}296,$$

$$K = 0{,}87\,; \qquad \psi(0{,}87) = 0{,}932 \Rightarrow \alpha'' = 0{,}328,$$

iar pentru $\Lambda = 16$:

$$\beta = 0{,}243\,; \qquad \rho = 0{,}875 \Rightarrow \alpha' = 0{,}277,$$

$$K = 0{,}88\,; \qquad \psi(0{,}88) = 0{,}940 \Rightarrow \alpha'' = 0{,}270.$$

Prin interpolare liniară între $\Lambda = 15$ și $\Lambda = 16$ se obține cu suficientă aproximație $\Lambda_{pl} = 15{,}8$.

Corespunzător valorilor Λ_{el} și Λ_{pl} rezultă următoarele zone de instabilitate :

— elastică ($\Lambda > 29{,}2$) ;
— elasto-plastică ($29{,}2 > \Lambda > 15{,}8$) ;
— plastică ($15{,}8 > \Lambda$) .

Se calculează presiunile critice :

Pentru $\Lambda = 34$ se obține

$$p_{e,\,cr} = \frac{2 \cdot 31 \cdot 10^6}{34 \cdot 33^2} = 114 \text{ daN/cm}^2,$$

iar pentru $\Lambda = 29{,}2$

$$p_{e,\,cr} = \frac{2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{29{,}2 \cdot 28{,}2^2} = 181 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru $\Lambda = 25$ prin încercări se găsește $s = 0{,}2$, pentru care

$$\beta = 0{,}17\,; \qquad \rho = 0{,}984\,; \qquad \alpha' = 0{,}176,$$

$$\tau_1 = 0{,}584\,; \qquad \tau_2 = 0{,}500\,; \qquad r_2 = 1\,; \qquad k = 0{,}59,$$

$$K = 0{,}586\,; \qquad \psi(0{,}586) = 0{,}769 \Rightarrow \alpha'' = 0{,}178 \approx \alpha',$$

și rezultă

$$p_{e,\,cr} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0{,}769}{25 \cdot 24^2} = 225 \text{ daN/cm}^2.$$

Pentru $\Lambda = 15{,}8$ se obține

$$K_{pl} = 0{,}875\,; \qquad \psi(0{,}875) = 0{,}935,$$

$$p_{e,\,cr} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0{,}287 \cdot 0{,}935}{15{,}8 \cdot 14{,}34^2} = 347 \text{ daN/cm}^2,$$

iar pentru $\Lambda = 13$

$$K_{pl} = 0{,}858\,; \qquad \psi(0{,}858) = 0{,}926,$$

$$p_{e,cr} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}926}{13 \cdot 11{,}536^2} = 645 \text{ daN/cm}^2.$$

Primită la redacție la 7 februarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. 2. S.D. PONOMAREV și colab. *Calculul de rezistență în construcția de mașini* (Trad. din l. rusă) vol. II, III, Edit. tehnică., București, 1963, 1964.
3. I. DEUTSCH, *Rezistența materialelor*, Universitatea Brașov, 1968.
4. D. COȘA, I. DEUTSCH, *Rigiditatea la încovoiere în regim elasto-plastic a barelor de secțiune dreptunghiulară*, Comunicare la Catedra de mecanică și rezistența materialelor a Universității Brașov, 1973.
5. D. COȘA, *Stabilitatea unor bare a căror rigiditate depinde de semnul variației de curbură*, Buletinul Institutului de Construcții București *2* (1974).

ASUPRA EFORTURILOR REALE DIN ÎMBINĂRILE PRIN FLANȘE

de MAGDALENA POSEA
Institutul de Construcții București

În proiectarea îmbinărilor prin flanșe la determinarea forțelor din șuruburi și a forțelor de legătură dintre manta și taler se ține seama numai de deformațiile unora dintre elementele componente ale îmbinării. Astfel la calculul forțelor din șuruburi se ține seama de regulă numai de deformațiile șurubului și garniturii, iar la determinarea forțelor de legătură dintre manta și flanșă numai de deformația radială a talerului.
În lucrarea de față se prezintă un algoritm complet de calcul pentru determinarea tuturor eforturilor prin luarea în considerație a deformațiilor tuturor elementelor componente ale îmbinării. Procedeul de calcul se bazează pe metoda generală a eforturilor și folosește drept necunoscute numai forțele de legătură dintre manta și taler, ceea ce face ca sistemul de ecuații să cuprindă numai două necunoscute. Procedeul este general și formulele de calcul au fost particularizate pentru cazul unei presiuni interioare simetrice și pentru cazul unei creșteri de temperatură față de situația de montaj.

Dacă o îmbinare prin flanșe se secționează ca în figura 1*a*, trebuie introduse forțele de legătură Y_1, Y_2, Y_3 (fig. 1*b*). În cazul încărcărilor simetrice față de axul îmbinării aceleași eforturi apar atît în secțiunea

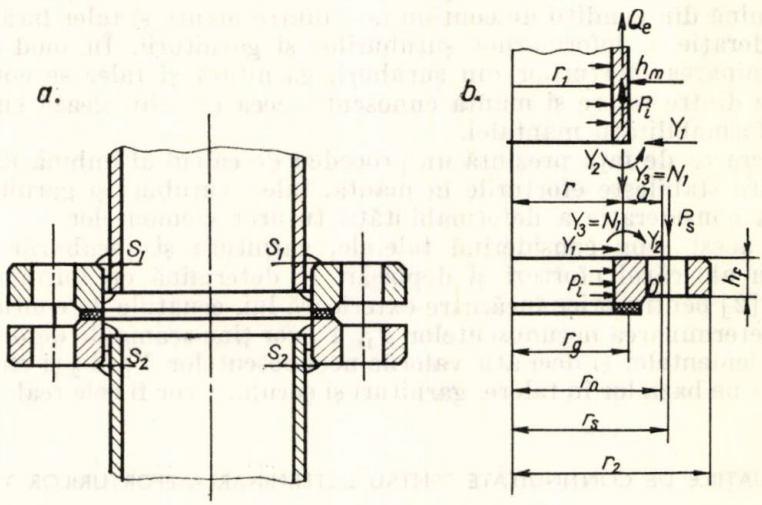


Fig. 1

S_1, cît și în secțiunea S_2 și forța de legătură, $Y_3 = N_1$, se poate determina dintr-o ecuație de proiecție pe axul îmbinării. În consecință, eforturi static nedeterminate rămîn numai Y_1 și Y_2.

Cele două talere, împreună cu şuruburile şi garnitura (fig. 2) formează un ansamblu o dată static nedeterminat, pentru care în lucrarea [2] s-a prezentat o metodă de calcul exactă, care stabileşte eforturile în talere, şuruburi şi garnitură pentru orice sistem de încărcări exterioare ansamblului, inclusiv pentru diferite valori ale necunoscutelor Y_1, Y_2, N_1.

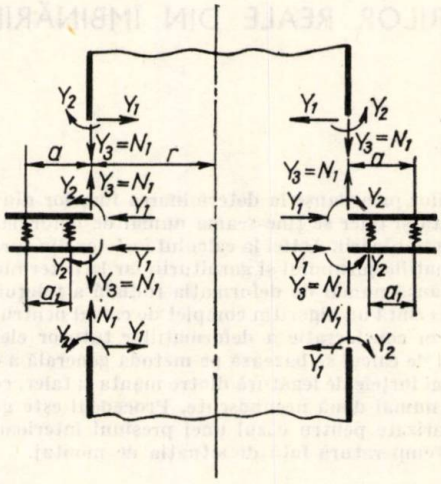


Fig. 2

În literatura tehnică de specialitate eforturile necunoscute Y_1, Y_2 se determină din condiţii de continuitate dintre manta şi taler fără luarea în consideraţie a deformărilor şuruburilor şi garniturii. În mod similar la determinarea eforturilor din şuruburi, garnitură şi taler se consideră eforturile dintre talere şi manta cunoscute, ceea ce echivalează cu neglijarea deformabilităţii mantalei.

Lucrarea de faţă prezintă un procedeu de calcul al îmbinărilor prin flanşe care stabileşte eforturile în manta, taler, şuruburi şi garnitură cu luarea în consideraţie a deformabilităţii tuturor elementelor.

În acest scop considerînd talerele, garnitura şi şuruburile ca un ansamblu ale cărui eforturi şi deplasări se determină cu formulele din lucrarea [2] pentru orice încărcare exterioară lui, ecuaţiile de continuitate pentru determinarea necunoscutelor Y_1, Y_2 vor ţine seama de deformaţiile tuturor elementelor şi deci atît valorile necunoscutelor Y_1, Y_2 şi eforturile ce rezultă pe baza lor în talere, garnituri şi şuruburi vor fi cele reale.

1. ECUAŢIILE DE CONTINUITATE PENTRU DETERMINAREA EFORTURILOR Y_1,Y_2

Prin efectuarea secţiunilor S_1, S_2 (fig. 1 *a*) sistemul real (vas, aparat, conductă etc.) se separă în două porţiuni de manta (una deasupra secţiunii S_1 şi cealaltă dedesubtul secţiunii S_2) şi un ansamblu format din talere, garnitură şi şuruburi. În cazul încărcărilor simetrice atît faţă de axul longitudinal al îmbinării, cît şi faţă de planul median al garniturii, fiecare

dintre corpurile obținute prin secționare poate fi calculat independent atît pentru sarcinile exterioare, cît și pentru fiecare dintre necunoscutele Y_1, Y_2, $Y_3 = N_1$. Forța de legătură $Y_3 = N_1$, putînd fi determinată dintr-o ecuație de echilibru, proiecția pe axul longitudinal al îmbinării, intră în categoria forțelor exterioare.

Aplicînd metoda generală a eforturilor pentru calculul sistemelor static nedeterminate și scriind condițiile ca deplasările relative după direcțiile legăturilor Y_1, Y_2 produse de încărcările exterioare și necunoscute, să fie nule, se obține sistemul ecuațiilor de condiție

$$\begin{aligned} Y_1\delta_{11} + Y_2\delta_{22} + \Delta_{10} &= 0, \\ Y_1\delta_{21} + Y_2\delta_{22} + \Delta_{20} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

din rezolvarea căruia rezultă valorile Y_1, Y_2.

Semnificațiile coeficienților necunoscutelor (δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}) și ale termenilor liberi (Δ_{10}, Δ_{20}) sînt cele cunoscute din statica construcțiilor. De exemplu :

δ_{11} reprezintă deplasarea pe direcția lui Y_1 produsă pe forma de bază (sistemele independente obținute prin secțiunile S_1, S_2) de acțiunea lui $Y_1 = 1$;

δ_{12} reprezintă deplasarea pe direcția lui Y_1 produsă pe forma de bază de acțiunea lui $Y_2 = 1$;

Δ_{10} reprezintă deplasarea pe direcția lui Y_1 produsă pe forma de bază de acțiunea încărcărilor exterioare.

Toți acești coeficienți reprezintă deplasări relative deoarece Y_1 este un efort-forță și trebuie calculați atît pentru manta, cît și pentru flanșă. În consecință, fiecare dintre aceștia va fi compus dintr-un termen corespunzător mantalei (δ^m) și dintr-altul corespunzător flanșei (δ^f). Expresiile generale vor fi

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \delta_{ij}^m + \delta_{ij}^f , \\ \Delta_{io} &= \Delta_{io}^m + \Delta_{io}^f . \end{aligned} \tag{2}$$

Semnificații asemănătoare cu cele ale termenilor δ_{11}, δ_{12}, Δ_{10} au termenii δ_{21}, δ_{22}, Δ_{20}, care însă reprezintă rotiri relative ,deoarece Y_2 reprezintă un efort-cuplu.

Spre deosebire de statica construcțiilor, unde coeficienții δ_{ij}, Δ_{10} se calculează cu formula Maxwell-Mohr, în cazul problemei de față ei se determină cu ajutorul expresiei deplasării radiale a învelișurilor cilindrice pe manta și cu formulele din lucrarea [2] pe ansamblul format din talere, garnituri și șuruburi.

2. CALCULUL COEFICIENȚILOR δ_{ij}, Δ_{io} PE MANTA

În teoria de încovoiere a învelișului cilindric de grosime constantă h_m încărcat simetric față de axul de rotație (fig. 3*a*) este stabilită ecuația diferențială

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{p_i}{D} - \frac{\mu N_1}{D r}, \tag{3}$$

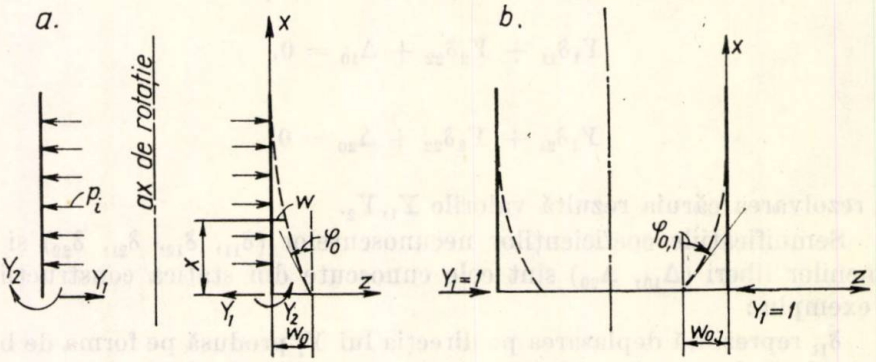


Fig. 3

în care w este deplasarea radială a mantalei cilindrice, p_i presiunea interioară, D rigiditatea cilindrică a mantalei, iar λ coeficientul de atenuare pentru manta. D și λ au expresiile cunoscute :

$$D = \frac{E h_m^3}{12(1-\mu^2)}, \qquad \text{a)} \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{r h_m}} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}, \qquad \text{b)}$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului mantalei și μ coeficientul lui Poisson.

Soluția ecuației (3) în cazul cilindrului lung are forma

$$w = \frac{e^{-\lambda x}}{2\lambda^2 D}\left[Y_2(\cos\lambda x - \sin\lambda x) - \frac{Y_1}{\lambda}\cos\lambda x\right] + \bar{w}. \tag{5}$$

Derivînd expresia (5) a deplasării radiale se obține rotirea

$$w' = -\frac{e^{-\lambda x}}{2\lambda D}\left[2Y_2\cos\lambda x - \frac{Y_1}{\lambda}(\cos\lambda x + \sin\lambda x)\right] + \bar{w}'. \tag{6}$$

În sistemul de axe indicat în figura 3*a*, w este pozitiv cînd se produce în sensul lui z și $w' = \varphi$ cînd reprezintă o rotire în sens orar a lui x pentru a se suprapune peste tangentă.

Soluția particulară $\bar{w}$, care corespunde părții din dreapta a ecuației (3), pentru cazul presiunii interioare p_i constante, are expresia

$$\bar{w} = \frac{p_i r^2}{E h_m}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right). \tag{7}$$

Întrucît $\bar{w}$ este o constantă, $\bar{w}' = 0$.

Folosind expresiile (5), (6) deformațiile după direcțiile necunoscutelor se determină prin particularizări. Astfel, pentru $x = 0$ și $Y_1 = 1$ (fig. 3*b*) rezultă

$$w_{0,1} = -\frac{1}{2\lambda^3 D}\ ;\quad \varphi_{0,1} = \frac{1}{2\lambda^2 D}. \tag{a}$$

Semnele corespund convenției adoptată față de sistemul de axe x, z.

În sistemul (1) coeficienții δ_{ij} Δ_{io} sînt pozitivi cînd se produc în sensul necunoscutei Y_i. Ținînd seama deci de sensul deplasărilor (fig. 3*b*) și de sensul necunoscutelor Y_i, Y_2 rezultă

$$\delta_{11}^m = -w_{0,1} = \frac{1}{2\lambda^3 D} = \frac{2\lambda r^2}{E h_m},$$

$$\delta_{21} = -\varphi_{0,1} = -\frac{1}{2\lambda^2 D} = -\frac{2\lambda^2 r^2}{E h_m}. \tag{a}$$

În mod similar din $Y_2 = 1$ și pentru $x = 0$, din formulele (5) și (6) se obțin

$$w_{0,2} = \frac{1}{2\lambda^2 D}, \qquad \varphi_{0,2} = -\frac{1}{\lambda D} \tag{b}$$

($w_{0,2}$ se produce în sensul axei z, iar $\varphi_{0,2}$ corespunde unei rotiri a axei x în sens anterior).

Ținînd seama că Y_1 este dirijat în sens invers axei z și Y_2 indică o rotație anterioară pentru x, rezultă

$$\delta_{12}^m = -w_{0,2} = -\frac{1}{2\lambda^2 D} = -\frac{2\lambda^2 r^2}{E h_m}, \tag{10}$$

$$\delta_{22} = -\varphi_{0,2} = \frac{1}{\lambda D} = \frac{4\lambda^3 r^2}{E h_m}. \tag{11}$$

Se remarcă reciprocitatea deplasărilor $\delta_{12} = \delta_{21}$.

În situaţia cînd mantaua este încărcată numai cu presiunea interioară particularizarea formulelor (5) (6) conduce la

$$w_{0,p} = \bar{w} = \frac{p_i r^2}{E h_m}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right); \quad \varphi_{0,p} = 0, \tag{c}$$

şi deci

$$\Delta_{10}^{m} = -w_{0,p} = -\frac{p_i r^2}{E h_m}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \tag{12}$$

$$\Delta_{20}^{m} = -\varphi_{0,p} = 0.$$

3. CALCULUL COEFICIENŢILOR δ_{ij}, Δ_{io} PE FLANŞĂ

Ansamblul flanşe-şuruburi (fig. 4*a*) constituie un sistem static nedeterminat analizat complet în lucrarea [2].

Cu următoarele notaţii pentru :

— coeficientul de elasticitate al şuruburilor :

$$c_1 = \frac{l_s}{2E_s A_s k}, \tag{13}$$

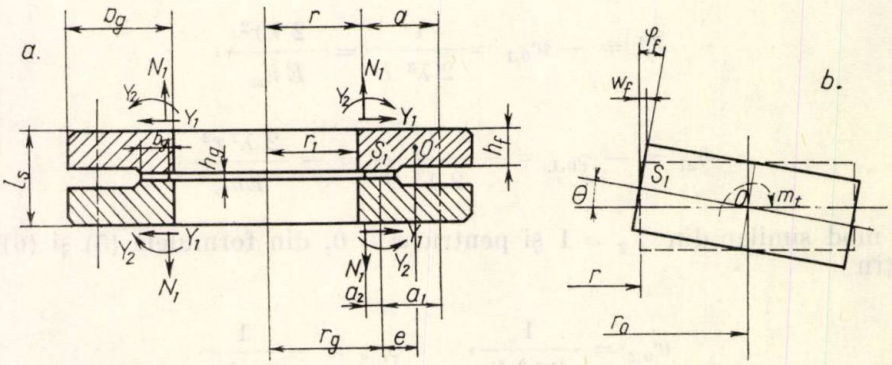


Fig. 4

— coeficientul de elasticitate al garniturii :

$$c_2 = \frac{h_g}{2E_g \cdot 2\pi r_g b_g}, \tag{14}$$

— coeficientul de elasticitate la rotire al talerului :

$$c_3 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b}{E_{fl} I \ln \frac{r_2}{r_1}}, \tag{15}$$

unde k reprezintă numărul de șuruburi; l_s lungimea din tija șurubului care ia parte la îmbinare (fig. 4); E_s, E_g, E_{fl} modulii de elasticitate pentru șuruburi, garnitură și flanșă; b, I lățimea, respectiv momentul de inerție al secțiunii talerului;

— forța inițială din șuruburi și garnitură:

$$P_s^0 = P_g^0 = \frac{\Delta_s}{2\,(c_1 + c_2 + c_3\,a_1^2)}, \tag{16}$$

unde Δ_s reprezintă cedarea inițială a șuruburilor adică suma alungirii tijei șurubului și deplasării talerului (inelului) la contactul cu șuruburile, datorită strîngerii piuliților la montaj;

— rezultanta forțelor exterioare după axul de simetrie al îmbinării

$$P_e = P_i + Q_e = 2\,\pi\,r\,N_1 \tag{17}$$

(P_i reprezintă rezultanta presiunii interioare pe toată secțiunea transversală a aparatului sau vasului, iar Q_e forța axială provenită din alte încărcări);

— cuplul de torsiune total pe un taler datorit necunoscutelor Y_1, Y_2, (fig. 4*a*):

$$M_1 = 2\,\pi\,r\left(Y_1\,\frac{h_f}{2} + Y_2\right), \tag{18}$$

lucrarea [2] stabilește:

— forța totală pe garnitură:

$$P_g = P_g^0 = \frac{(c_1 + c_3\,a_1\,a)\,P_e + c_3\,a_1\,M_1}{c_1 + c_2 + c_3\,a_1^2}, \tag{19}$$

— forța totală din șuruburi:

$$P_s = P_s^0 + \frac{(c_2 - c_3\,a_1\,a_2)\,P_e - c_3\,a_1\,M_1}{c_1 + c_2 + c_3\,a_1^2}, \tag{20}$$

— momentul de torsiune total:

$$\mathfrak{M}_t = P_g^0\,a_1 + \frac{a\,c_2\,P_e + (c_1 + c_2)\,M_1}{c_1 + c_2 + c_3\,a_1^2} = 2\pi\,r_0 m_t \tag{21}$$

(m_t reprezintă cuple de torsiune distribuite pe cercul de rază r_0),

— momentul încovoietor în taler (avînd vectorul dirijat după rază):

$$M_i = -\,m_t\,r_0 = -\frac{\mathfrak{M}_t}{2\,\pi}, \tag{22}$$

— rotirea talerului :

$$\theta = \mathfrak{M}_t c_3, \tag{23}$$

Distanţele a, a_1, a_2 sînt trecute pe figura 4*a*.

Din momentul de torsiune $\mathfrak{M}_t$ (21), deplasările după direcţiile necunoscutelor Y_1, Y_2 în punctul S_1 (fig. 4*b*) se determină cu expresiile

$$\Delta_1^* = w_f = \theta \frac{h_f}{2} = \mathfrak{M}_t c_3 \frac{h_f}{2}, \quad \text{a)} \tag{24}$$

$$\Delta_2^* = \varphi_f = \theta = \mathfrak{M}_t c_3. \quad \text{b)}$$

Aplicînd aceste relaţii pentru fiecare dintre cele trei tipuri de încărcări independente, $Y_1 = 1$, $Y_2 = 1$ şi sarcinile exterioare, se obţin coeficienţii δ_{ij}^f, Δ_{io}^f. Astfel pentru $Y_1 = 1$ din (18) şi (21) se determină în ordine

$$M_1^{Y_1=1} = 2\pi r \frac{h_f}{2},$$

$$\mathfrak{M}_t^{Y_1=1} = \frac{(c_1 + c_2) 2\pi r \frac{h_f}{2}}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2}, \tag{25}$$

şi apoi din (24 a) rezultă

$$\delta_{11}^f = w_f^{Y_1=1} = \frac{\pi}{2} h_f^2 \cdot \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2}, \tag{26'}$$

şi din (24 b)

$$\delta_{21}^f = \varphi_f^{Y_1=1} = \pi r h_f \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2}. \tag{27}$$

Pentru calculul lui δ_{11}^f real, la valoarea dată de (26′) trebuie să adăugăm deplasarea radială dată de forţa interioară.

Aplicînd formula corespunzătoare de la tuburi cu pereţi groşi [1] şi aproximînd $r = r_1$ în formula deplasării radiale se obţine

$$\delta_{11}''^f = \frac{1}{h_f} \frac{r}{E} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \mu \right) = \frac{r_1}{E h_f} \beta \tag{26''}$$

(β are valoarea corespunzătoare parantezei).

Prin însumarea valorilor (26′) și (26″) rezultă

$$\delta'_{11} = \frac{\pi}{2} r h_f^2 \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2} + \frac{r}{E h_f} \beta . \tag{26}$$

În mod similar din $Y_2 = 1$ se determină

$$M_1^{Y_2=1} = 2 \pi r ; \quad \mathfrak{M}_t^{Y_2=1} = \frac{(c_1 + c_2) 2 \pi r}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2}, \quad \text{d)}$$

și din (24,a), (24,b) rezultă

$$\delta'_{12} = \pi r h_f \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3 a_1} = \delta'_{21}, \tag{28}$$

$$\delta'_{22} = 2 \pi r \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3 a_1} . \tag{29}$$

Din sarcinile exterioare se determină (21)

$$\mathfrak{M}_{t,0} = P_g^\circ a_1 + \frac{a c_2 P_e}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2},$$

care se introduce în expresia (24, a) din care rezultă

$$\Delta''_{10} = \left(P_g^\circ a_1 + \frac{a c_2 P_e}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2} \right) c_3 \frac{h_f}{2} . \tag{30′}$$

Adăugînd la aceasta valoarea deplasării radiale dată de presiunea interioară aplicată direct pe flanșă (similară cu 26″)

$$\Delta'''_{10} = \frac{p_i r}{E} \beta , \tag{30″}$$

se obține

$$\Delta'_{10} = \left(P_g a_1 + \frac{a c_2 P_e}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2)} \right) c_3 \frac{h_f}{2} + \frac{p_i r}{E} \beta . \tag{30}$$

Prin introducerea valorii (d) în (24, b) rezultă

$$\Delta'_{20} = \left(P_g^\circ a_1 + \frac{a c_2 P_e}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2)} \right) c_3 . \tag{31}$$

4. CALCULUL NECUNOSCUTELOR Y_1, Y_2

Dacă se notează

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2} \; ; \; \alpha_2 = \frac{c_2}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2} \; ; \; \alpha_3 = \frac{c_3}{c_1 + c_2 + c_3 a_1^2},$$

$$\alpha_4 = (\alpha_1 + \alpha_2)\, c_3, \tag{32}$$

şi se însumează termenii pentru manta şi flanşe aşa cum indică expresiile (2) se obţin coeficienţii δ_{ij}, Δ_{i0}:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2\lambda^3 D} + \frac{\pi}{2} r h_f^2 \alpha_4 + \frac{r}{E h_f} \beta, \tag{33}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2\lambda^2 D} + \pi r h_f \alpha_4, \tag{34}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{\lambda D} + 2\pi r \alpha_4, \tag{35}$$

$$\Delta_{10} = -\frac{p_i r^2}{E h_m}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + (P_g^0 a_1 + a \alpha_2 P_e) c_3 \frac{h_f}{2} + \frac{p_i r}{E} \beta, \tag{36}$$

$$\Delta_{20} = (P_g^0 a_1 + a \alpha_2 P_e) c_3. \tag{37}$$

Introducînd valorile acestor termeni în (1) şi rezolvînd sistemul se obţin necunoscutele Y_1, Y_2, ale căror valori ţin seama de deformaţiile tuturor elementelor componente ale îmbinării.

Observaţii. 1) După determinarea valorilor reale ale necunoscutelor Y_1, Y_2 se determină eforturile reale în fiecare element component al îmbinării. Astfel, în manta ţinînd seama de eforturile axiale N_1 (după generatoare), N_2 (după inele) şi de momentele încovoietoare Y_2 şi μY_2 rezultă eforturile unitare

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{h_m} \pm \frac{6 Y_2}{h_m^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{h_m} \pm \frac{6 \mu Y_2}{h_m^2}, \tag{38}$$

μY_2 reprezintă momentul încovoietor cu vectorul după generatoarea mantalei. Acesta, ca şi N_2, produce eforturi unitare normale σ_2 dirijate după tangenta la paralel.

2) În ansamblul talere-șuruburi-garnitură, prin aplicarea formulelor (19), (20), (21), (22), (23) și ținînd seama de notațiile (17), (18) și (32) rezultă :

— forța reală pe garnitură :

$$P_g = P_g^* - (\alpha_1 + \alpha_3 a_1 a) P_e + \alpha_3 a_1 M_1 \tag{39}$$

(M_1 se determină cu formula (18) în care se introduc valorile Y_1, Y_2 rezultate din rezolvarea sistemului 1);

— forța reală în șuruburi :

$$P_s = P_s^0 + (\alpha_2 - \alpha_3 a_1 a_2) P_e - \alpha_3 a_1 M_1 . \tag{40}$$

Valorile P_g^0, P_s^0 se determină cu formula (16) și vor trebui stabilite în așa fel încît P_g dat de (39) să fie mai mare decît o valoare limită P_g^*, care ar corespunde presiunii minime pentru care este asigurată etanșeitatea ;

— momentul total de torsiune :

$$\mathfrak{M}_t = P_g^0 a_1 + \alpha_2 a P_e + (\alpha_1 + \alpha_2) M_1 , \tag{41}$$

— momentul încovoietor în taler :

$$M_i = - \frac{\mathfrak{M}_t}{2 \pi} , \tag{42}$$

— rotirea talerului :

$$\theta = \mathfrak{M}_t c_3 , \tag{43}$$

— deplasarea garniturii :

$$\Delta_g = P_g c_2 . \tag{44}$$

Centrul de greutate al talerului se deplasează cu cantitatea

$$\Delta_g = | P_g c_2 | + | \theta e) . \tag{45}$$

5. EFORTURI DIN VARIAȚIA DE TEMPERATURĂ

Se consideră că îmbinarea prin flanșe este supusă, față de montaj, la o creștere de temperatură constantă pe manta și variabilă liniar pe taler (fig. 5 *a*). Se folosește forma de bază din figura 2, în care talerele, garnitura și șuruburile constituie un ansamblu.

Variația de temperatură pe manta, considerată uniformă pe grosime produce deplasările radiale

$$\Delta^m_{10,\,t^\circ} = -\,r\,\alpha t^\circ_{int}\,; \qquad \Delta^m_{20,\,t^\circ} = 0 \tag{46}$$

(semnul minus la $\Delta^m_{10,\,t^\circ}$ provine din faptul că deplasarea radială $r\,\alpha\,t^\circ_{int}$ are loc în sens invers necunoscutei Y_1).

Pentru calculul deplasărilor Δ^f_{10,t°, Δ^f_{20,t° datorite variației de temperatură se analizează ansamblul talere-garnitură-șuruburi reprezentat în figura 5 *b*.

Se notează temperatură medie în centrul talerului

$$t^\circ_m = \frac{t^\circ_{int} + t^\circ_{ext}}{2}, \tag{47}$$

și diferența de temperatură dintre interior și exterior

$$\Delta t^\circ = t^\circ_{int} - t^\circ_{ext}. \tag{48}$$

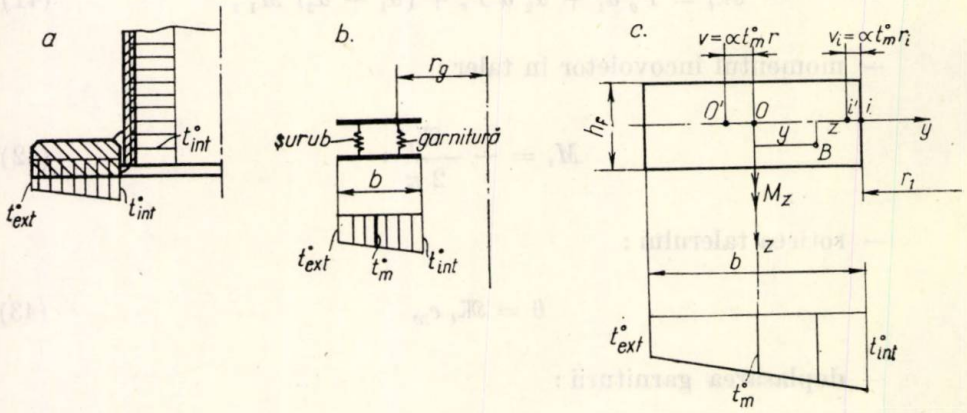


Fig. 5

Variația de temperatură pe lățimea talerului (fig. 5 *c*) care constituie un inel, produce o încovoiere a acestuia după axa *z*, corespunzătoare unui moment

$$M_z = +\,E\,I_z\,\alpha\,\frac{\Delta t^\circ}{b}. \tag{49}$$

Aceasta se deduce cu ușurință prin stabilirea deformației specifice inelare din variația de temperatură și din efortul unitar inelar σ și exprimarea relațiilor de echivalență dintre eforturile secționale și eforturile unitare.

Din M_z (49), într-un punct curent de coordonate z, y (fig. 5 *c*) rezultă efortul unitar,

$$\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y = -E \alpha \frac{\Delta t^\circ}{b} y . \tag{50}$$

Deformația inelară în oricare punct al talerului

$$\varepsilon = \alpha t^\circ - \frac{\sigma}{E} = \alpha \left(t_m^\circ + \frac{\Delta t^\circ}{b} y \right) - \frac{\alpha \Delta t^\circ}{b} y = \alpha t_m^\circ$$

este constantă și corespunde creșterii de temperatură medii.

În consecință, punctul de contact al talerului cu mantaua are deplasarea radială

$$v_1 = \alpha t_m^\circ r , \tag{51}$$

care reprezintă o mărire a razei.

Cele două legături ale talerelor (garnitura și șuruburile) nu au nici o influență asupra deformațiilor inelare din variația de temperatură (inelul rămîne în același plan).

În ceea ce privesc deformațiile din variația de temperatură din lungul îmbinării, ansamblul talere-garnitură-șuruburi constituie un sistem static nedeterminat [2]. Pentru aceasta, utilizînd formula (38) din [2], se obține rotirea

$$\theta_1^{t\circ} = \frac{\alpha \Delta t_1^\circ l_s}{2 (c_1 + c_2 + c_3 a_1^2)} a_1 c_3, \tag{52}$$

unde Δt_1^0 reprezintă diferența de temperatură dintre taler și șurub (pe taler temperatura este considerată constantă). În cazul de față, datorită variației liniare a temperaturii și simetriei îmbinării față de planul median al garniturii fiecare dintre talere are o rotire geometrică de unghi

$$\theta_2^{t\circ} = \frac{\alpha \Delta t^\circ l_s}{2 b} . \tag{53}$$

Din aceasta, la contactul manta-taler rezultă deplasarea radială

$$v_2 = \frac{\alpha \Delta t^\circ l_s}{2 b} \frac{h_f}{2}, \tag{54}$$

care, de asemenea, reprezintă o mărire a razei.

Folosind (51), (53), (54) și ținînd seama de semnificațiile termenilor liberi ai sistemului (1) rezultă

$$\Delta^{t}_{10,t^\circ} = v_1 + v_2 = \alpha\, t^\circ_m r + \frac{\alpha\, \Delta t^\circ\, l_s\, h_f}{4\, b},$$

$$\Delta^{t}_{20,t^\circ} = \theta^{t^\circ}_2 = \frac{\alpha\, \Delta\, t^\circ\, l_s}{2b}. \tag{55}$$

Prin adunarea termenilor corespunzători din (46) și (55) în modul indicat de (2) se obțin termenii liberi Δ_{10,t°, Δ_{20,t° ai sistemului de ecuații (1)

$$\Delta_{10,\,t^\circ} = -\,r\,\alpha\, t^\circ_{int} + \alpha\, t^\circ_m + \frac{\alpha\, \Delta\, t^\circ\, l_s\, h_f}{4\, b},$$

$$\Delta_{20,\,t^\circ} = \frac{\alpha\, \Delta\, t^\circ\, l_s}{2\, b}. \tag{56}$$

Din rezolvarea sistemului de ecuații (1) ai căror termeni liberi se consideră cei dați de (56) se obțin valorile necunoscutelor $Y^{t^\circ}_1$, $Y^{t^\circ}_2$, corespunzătoare variației de temperatură. După determinarea acestora se calculează cu formula (18) M^t_1 și apoi toate eforturile și mărimile care interesează cu formulele indicate la observațiile paragrafului 4.

Remarcă. În calculele de mai sus s-a admis că planul median transversal al îmbinării este un plan de simetrie, ceea ce face ca efortul axial în manta Y_3 să nu intervină ca necunoscută. Dacă între taler și șurub există și o diferență de temperatură de tip Δt^0_1 atunci rotirea totală a talerului θ și deci Δ_{20,t° se obține prin însumarea valorilor $\theta^{t^\circ}_1$ și $\theta^{t^\circ}_2$. În mod corespunzător la calculul lui v_2 se introduce valoarea totală θ.

Primită la redacție la 15 aprilie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. S.D. Ponomariov ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini* (vol. II). Edit. tehnică, București, 1963.
2. M. Posea, *Îmbunătățiri privind calculul îmbinărilor prin flanșe*, St. cerc. mec. aplic., *5* (1972).

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND STAREA DE EFORTURI ÎN FILETELE RACORDURILOR SPECIALE

de V. ULMANU*), D. RAȘEEV*), T. HUIDU**)

Asamblarea prăjinilor de foraj se realizează prin intermediul racordurilor speciale, ale căror filete conice speciale sînt solicitate în exploatare datorită înșurubării cu forță de prestrîngere peste care se suprapune tracțiunea, încovoierea și torsionarea garniturii de foraj, solicitările avînd caracter static sau dinamic.
În scopul îmbunătățirii bazei științifice de proiectare și exploatare a filetelor speciale, în prezentul articol se prezintă cercetările experimentale privind starea de deformații și eforturi prin metodele fotoelasticității tridimensionale, tensometriei electrorezistive și prin încercări de înșurubare. Aceste rezultate completează cercetările teoretice și experimentale prezentate în lucrările [1], [2] și [3].

1. STABILIREA EFORTURILOR DIN ÎMBINAREA FILETATĂ PRIN METODA FOTOELASTICITĂȚII TRIDIMENSIONALE (SPAȚIALE)

Analiza eforturilor prin metoda fotoelasticității tridimensionale s-a efectuat pe modele de racord special $3\frac{1''}{2}$ reduse la scara 1 : 2. S-a folosit metoda „înghețării eforturilor", bazată pe proprietatea rășinilor sintetice cu structură bifazică ca, în condiții de solicitare la o anumită temperatură, o fază componentă să se comporte elastic și să preia solicitarea, în timp ce faza a doua este fuzibilă la acea temperatură. Lăsînd piesa să se răcească încet sub acțiunea continuă a efortului, masa fuzibilă se întărește menținînd rețeaua infuzibilă într-o stare deformată, reproducînd după înlăturarea sarcinilor exterioare o stare de eforturi interioare analogă celei din timpul solicitării. Eforturile sînt „înghețate". Analiza eforturilor se face la un polariscop plan pe felii de o anumită grosime decupate radial din modelul tridimensional solicitat, [4], [5], [6].

Determinarea eforturilor unitare în corpul cepului și mufei prin fotoelasticitate spațială este ușurată de faptul că atît modelul, cît și solicitarea admit o axă de simetrie. Totodată, contururile interior și exterior sînt libere de sarcini exterioare iar, ca urmare, eforturile într-un punct oarecare de pe contur sînt determinate de ordinul benzii izocromate în acel punct înmulțit cu constanta fotoelastică a secțiunii. Această observație permite

*) Institutul de petrol și gaze Ploiești
**) Universitatea București.

confruntarea rezultatelor cercetării fotoelastice cu rezultatele măsurătorilor tensometrice, determinate tot pe suprafața interioară a cepului și pe suprafața exterioară a cepului și mufei.

1.1. REALIZAREA MODELULUI DE RACORD SPECIAL

Încercările experimentale s-au efectuat pe modele de racord special reduse la scara 1 : 2, executate din materialul DINOX 110 E care este o rășină epoxidică ce prin reacție cu întăritorul (anhidrida ftalică de exemplu), la temperaturi de circa 130° C se întărește. Proprietățile mecanice și fotoelastice ale materialului sînt prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Proprietățile mecanice și fotoelastice ale materialului DINOX 110 E.

— Rezistența la tracțiune	394....675 kgf/cm²
— Alungirea maximă	2,6...5 %
— Rezistența la compresiune	1260...1410 kgf/cm²
— Modulul de elasticitate	2,04.10⁴ kgf/cm²
— Rezilienta	13,38 kgf. cm/cm²
— Duritatea Brinell	22,2 . . . 22,7 kgf/mm²
— Temperatura de înghețare a eforturilor (determinată în fig. 1)	103°C
— Constanta fotoelastică (valoarea franjei) pentru model, σ_0 :	
la temperatura de 20°C	$\sigma_0 = 6{,}18$ kgf/cm². franjă
la temperatura de 103°C	$\sigma_0 = 0{,}424$ kgf/cm². franjă
— Constanta fotoelastică (valoarea franjei) pentru material, $\sigma_0^{1,0}$:	
— la temperatura de 20°C	$\sigma_0^{1,0} = 3{,}71$ kgf/cm. franjă
— la temperatura de 103°C	$\sigma_0^{1,0} = 0{,}254$ kgf/cm. franjă

Întărirea rășinii s-a efectuat la temperatura de 130°C timp de 12 ore, după care a urmat o răcire lentă. Modelul turnat s-a detensionat timp de 24 ore la o temperatură de circa 140°C. Modelul s-a prelucrat prin strunjire, cu răcire abundentă pentru a nu introduce tensiuni termice. După prelucrare, modelul s-a măsurat complet, verificînd respectarea dimensiunilor prescrise.

1.2. SOLICITAREA MODELULUI

Pentru solicitarea modelului la temperatura de înghețare a eforturilor s-a construit o instalație similară cu cea prezentată în lucrarea [5], introductibilă într-o etuvă. Solicitarea modelului s-a efectuat la temperatura de circa 140°C timp de două ore.

În cadrul cercetărilor s-au utilizat următoarele combinații de solicitări :

— înșurubare cu forță de prestrîngere (momentul de înșurubare 20 kgfcm respectiv 101° rotire relativă între cep și mufă la racordul notat 2) ;

— înșurubare cu forță de prestrîngere și tracțiune suprapusă (momentul de înșurubare 21 kgfcm și tracțiune 15,3 kgf, la racordul notat 3) ;

— tracțiune (valoarea forței 15,3 kgf, la racordul notat 4) ;

— înșurubare cu forță de prestrîngere a unui racord special notat 5, avînd conicitatea cepului în raport cu conicitatea nominală prescrisă în

standarde micşorată cu o valoare egală cu toleranţa standardizată, care în mod uzual este prescrisă în sensul măririi conicităţii.

În cadrul cercetărilor nu s-a respectat similitudinea solicitărilor model — racord real deoarece, pentru a obţine un număr relativ mare de benzi izocromate în modelul îngheţat, acesta trebuie să suporte deformaţii mari. Pentru materialul studiat, valoarea unei franje în cazul încălzirii pînă la 103°C se micşorează de $\frac{3{,}71}{0{,}254} = 14{,}6$ ori, iar modulul de elasticitate se poate admite că scade de circa 300 ori, conform [7]. Pentru a obţine deci acelaşi număr de benzi la îngheţarea modelului, este necesar ca deformaţiile să fie de $\frac{300}{14{,}6} = 20$ de ori mai mari decît în cazul cercetării fără a folosi metoda îngheţării eforturilor.

După „îngheţare", din model s-au decupat simetric după direcţie radială cîte patru perechi (cep-mufă) de secţiuni plane avînd grosimea de 2 mm.

1.3. REZULTATELE CERCETĂRILOR ŞI INTERPRETAREA LOR

Prin încercările efectuate s-a urmărit determinarea ordinului benzilor izocromate pe conturul interior al cepului şi pe conturul exterior al cepului şi mufei precum şi variaţia acestora în corpul cepului şi mufei, pentru diferite solicitări.

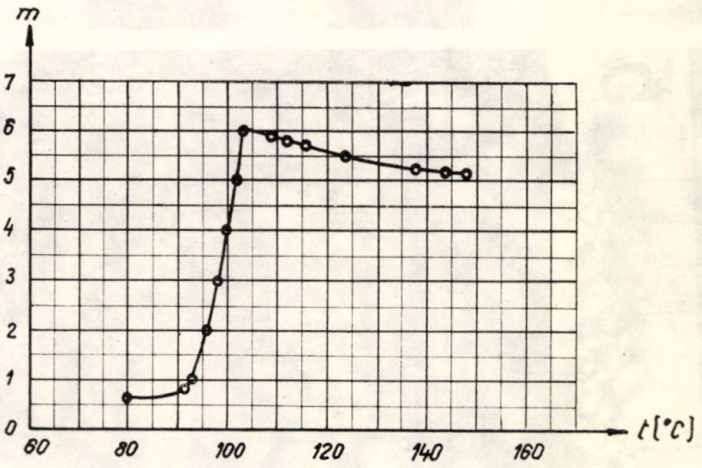


Fig. 1. — Dependenţa ordinului maxim al izocromatelor de temperatura de încălzire la materialul Dinox 110 E.

În acest scop, secţiunile plane decupate din cep şi mufă s-au analizat la un polariscop plan de tip obişnuit. În fig. 2 se prezintă tabloul izocromatelor într-o secţiune a modelelor racordurilor 2, 3, 4 şi 5, reprezentînd ordinul întreg de izocromate, fig. 1. *a* şi jumătăţile de ordin de izocromate, fig. 1. *b*.

De asemenea, s-au efectuat decupări transversale din modelul cep, după plane perpendiculare pe axa cepului, pentru a determina eforturile circumferenţiale în filet, dar nu s-a putut determina nici o stare de eforturi semnificativă.

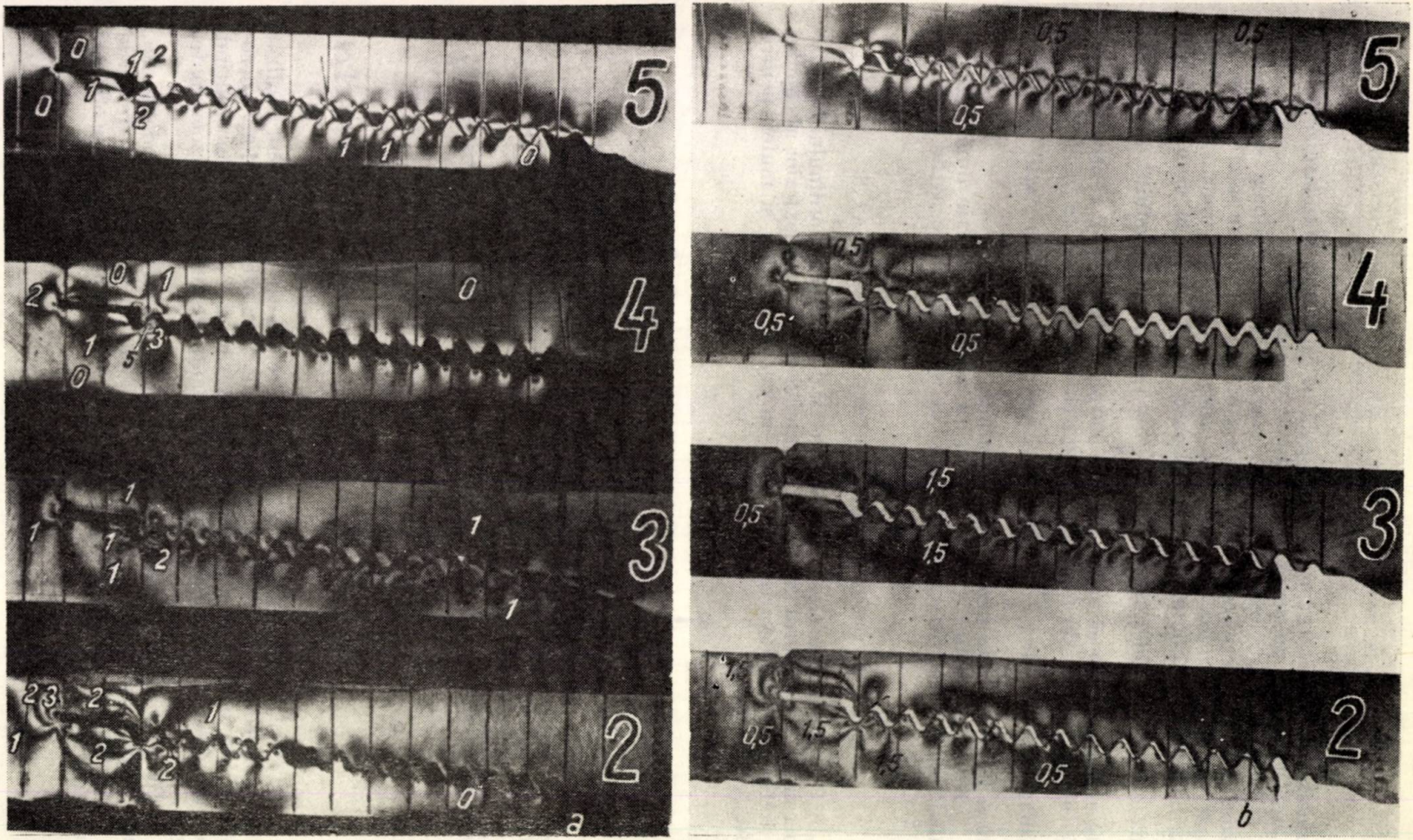


Fig. 2. — Tabloul izocromatelor într-o secțiune a modelelor solicitate după schemele 2, 3, 4 și 5.
a) ordinul întreg de izocromate; b) jumătățile de ordin de izocromate.

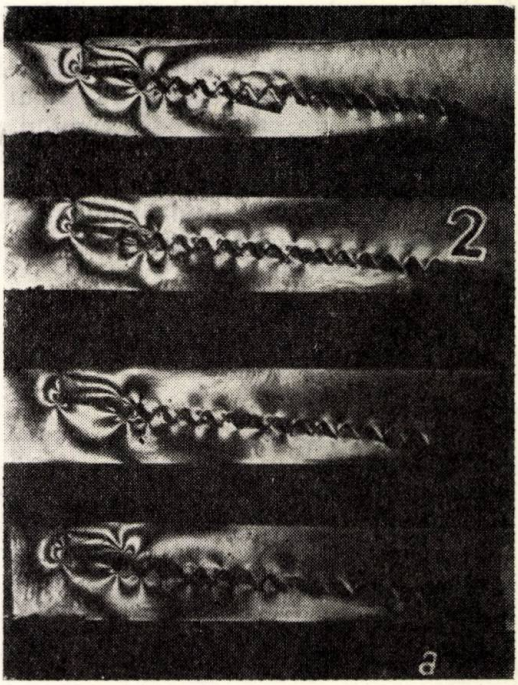
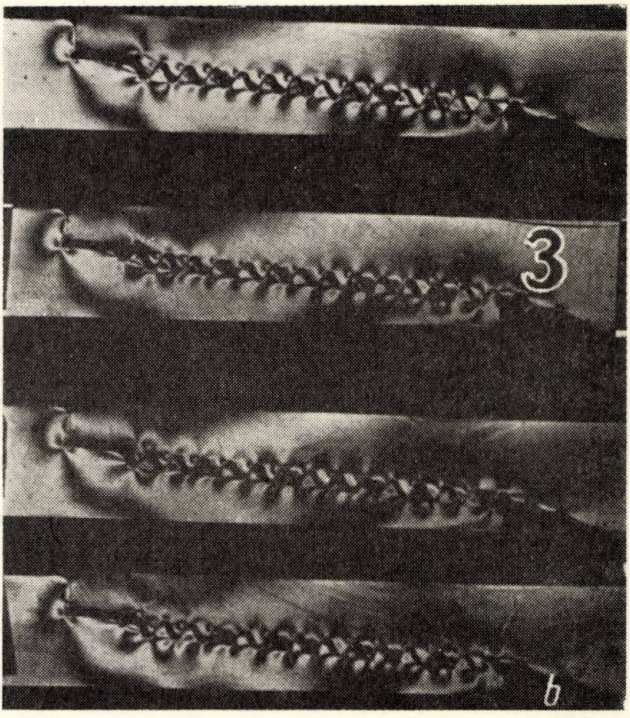


Fig. 3. — Tabloul izocromatelor pentru patru perechi de secţiuni plane decupate după două plane perpendiculare.
a) racord special solicitat la înşurubare (2); b) racord special solicitat la înşurubare şi tracţiune, (3).



Din analizarea celor patru perechi de secţiuni plane corespunzătoare fiecărui racord special (fig. 3) rezultă că solicitarea este simetrică.

Cercetările efectuate permit concluzia generală că eforturile maxime se dezvoltă în îmbinarea filetată la baza primelor spire angajate ale cepului, pe umerii de reazem ai cepului şi mufei şi în canalul de descărcare a eforturilor executat la baza cepului.

În figura 4 se prezintă variaţia numărului de ordine al izocromatelor în zona primelor spire angajate ale cepului. Reiese că încărcarea maximă a cepului are loc în dreptul primei spire angajate. Totodată rezultă că la suprapunerea solicitării de tracţiune peste înşurubare, nu se obţine o însumare a eforturilor în cep.

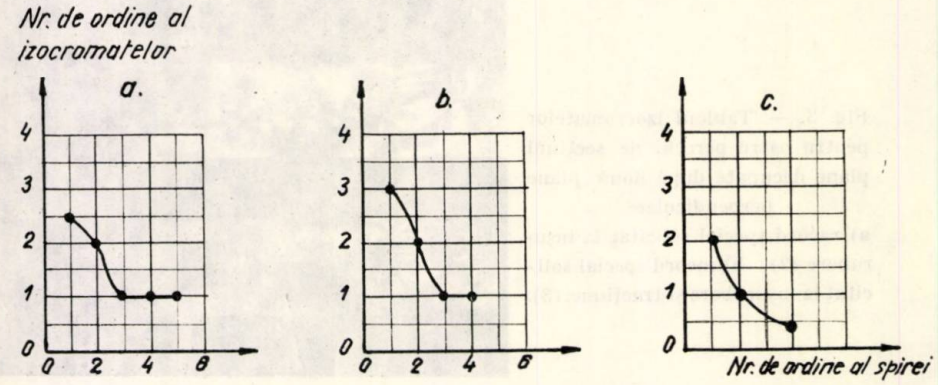


Fig. 4. — Numărul de ordine al izocromatelor în zona primelor spire angajate ale cepului; a) înşurubare; b) înşurubare + tracţiune; c) tracţiune.

La racordul special notat 5, avînd conicitatea mai mică decît valoarea standardizată, se constată reducerea solicitării la primele spire angajate ale cepului simultan cu creşterea solicitării spirelor de la vîrful cepului.

Bazat pe faptul că atît conturul exterior, cît şi cel interior sînt libere de sarcini şi ca urmare eforturile axiale pe contur sînt proporţionale cu ordinul benzii izocromate în acel punct, s-a determinat ordinul izocromatelor pe suprafaţa interioară a cepului şi pe suprafaţa exterioară a cepului şi mufei, prin metoda compensării cu ajutorul lamelor sfert de undă. În acest scop s-au marcat pe secţiunile plane intervale egale (fig. 2). Rezultatele sînt prezentate în figura 5 pentru solicitarea de înşurubare atît pentru suprafaţa interioară, cit şi exterioară a racordului special şi în figura 6 pentru solicitările după schemele 3, 4 şi 5.

În ambele figuri se constată că solicitarea maximă se dezvoltă la interiorul cepului la circa 1/3 din lungimea filetată faţă de umăr.

Pentru racordul special nr. 5 rezultă o uniformizare a eforturilor în lungul axei filetului.

Se remarcă faptul că prin aceeaşi metodologie se poate determina ordinul benzii izocromate la suprafaţa cepului conic în zona sa nefiletată, care, de asemenea, reprezintă un contur liber de sarcini (în dreptul primei linii verticale de marcaj trasate pe cep, faţă de umăr). În această secţiune, ordinul benzii izocromate la suprafaţa interioară a cepului este 0,30, iar la suprafaţa exterioară a cepului 1,40, ceea ce indică o repartiţie neuniformă a eforturilor unitare axiale pe secţiunea transversală a cepului.

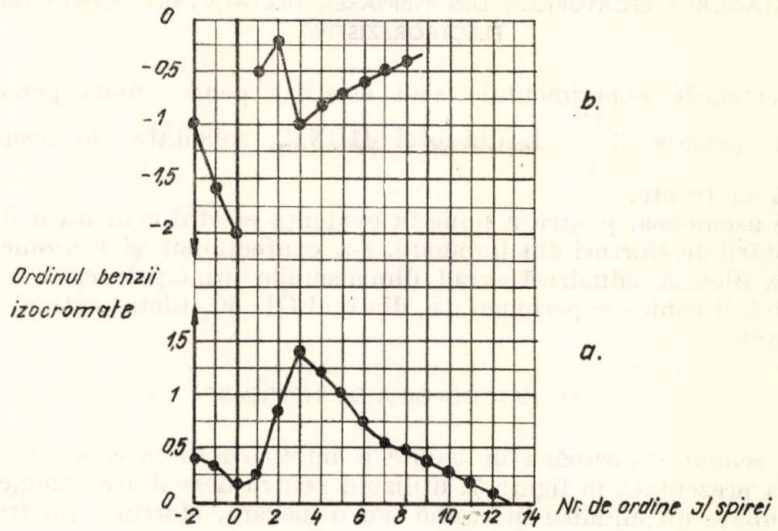


Fig. 5. — Ordinul benzii izocromate pe suprafaţa cepului şi mufei la solicitarea de înşurubare.
a) în interiorul cepului; b) la exteriorul cepului şi mufei.

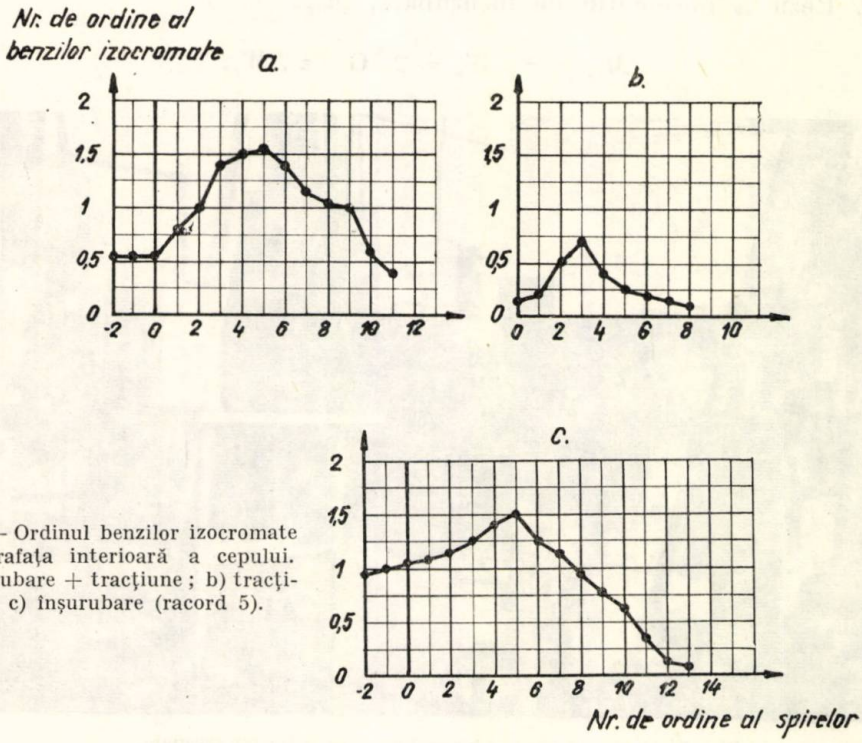


Fig. 6. — Ordinul benzilor izocromate pe suprafaţa interioară a cepului.
a) înşurubare + tracţiune; b) tracţiune; c) înşurubare (racord 5).

2. STABILIREA EFORTURILOR DIN ÎMBINAREA FILETATĂ PRIN TENSOMETRIE ELECTROREZISTIVĂ

Încercările experimentale s-au efectuat pentru două perechi de acorduri speciale $3\frac{1''}{2}$ L din oțel 41CN12, solicitate la înșurubare realizată în trepte.

De asemenea, pentru a pune în evidență efectul conicității filetului asupra stării de eforturi din îmbinare, s-a confecționat și tensometrat o îmbinare filetată cilindrică având dimensiunile principale egale cu cele ale îmbinării conice experimentate, din oțel OL 60, filetul nefiind tratat antigripant.

2.1. METODOLOGIA DE ÎNCERCARE

În scopul înșurubării în trepte a îmbinării filetate, s-a construit instalația prezentată în figura 7, utilizînd pentru dezvoltarea momentului de înșurubare un cilindru hidraulic sau o macara, efortul fiind transmis prin intermediul a doi clești Rotary.

Măsurarea momentelor de înșurubare s-a efectuat cu doi traductori tensometrici (mărci) poziționați înclinat cu 45° față de axă, pe baza considerentului că pe această direcție se produc eforturi unitare de întindere respectiv de compresiune σ egale cu cel de răsucire, $\tau(\tau = \pm\,\sigma)$, [8]. Rezultă momentul de înșurubare, M_{ts}:

$$M_{ts} = \tau \,.\, W_p = 2 \,.\, G \,.\, \varepsilon \,.\, W_p, \qquad (1)$$

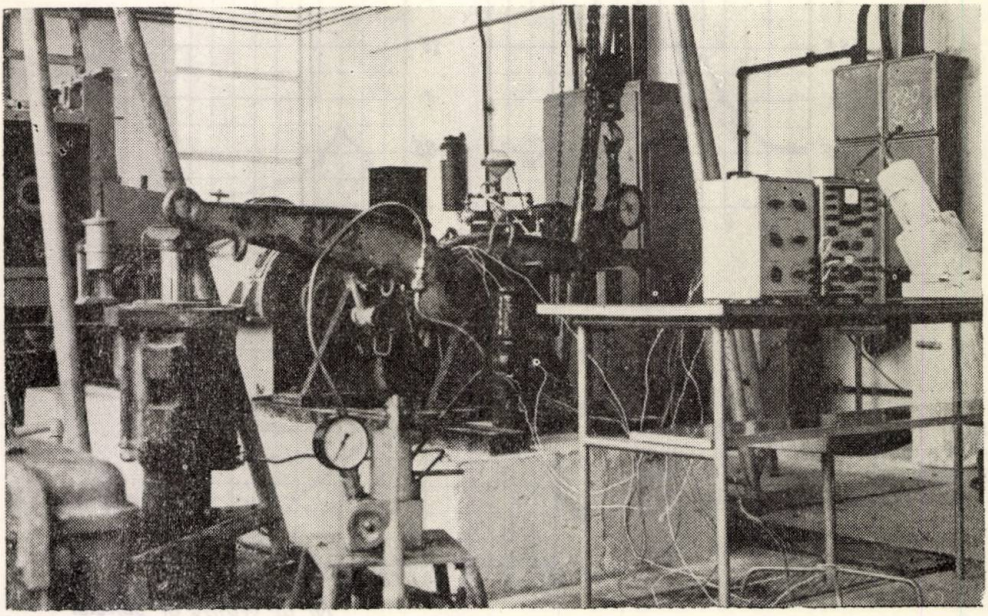


Fig. 7. — Stand pentru înșurubarea racordurilor speciale.

W_p — modul de rezistenţă polar,
ε — alungirea specifică principală,
G — modul de elasticitate transversal.

Înregistrarea rezultatelor s-a efectuat după o perioadă de timp necesară pentru stabilizarea indicaţiilor, static, menţionînd constant momentul de înşurubare.

Traductorii tensometrici electrorezistivi au fost de tipurile 3/120 LB11, 6/120 LA11, 10/120 RB11 şi rozete, fabricaţi de firma Hottinger Baldwin Messtechnik, avînd lungimea reţelei 3—6 şi 10 mm, rezistenţa 120 ohmi şi k = 2,05 ... 2,06.

S-a realizat compensarea termică a tuturor traductorilor.

Înainte de experimentare îmbinarea filetată a fost măsurată precis, constatînd înscrierea în cîmpul de toleranţă standardizat.

În cursul înşurubării, pe îmbinarea filetată s-a aplicat unsoare pentru filetele garniturii de foraj.

2.2. PREZENTAREA REZULTATELOR EXPERIMENTĂRII ÎMBINĂRII FILETATE CONICE

Traductorii tensometrici s-au aplicat după trei direcţii, axial (x), circumferenţial (y) şi după bisectoarea acestora la 45° faţă de axa racordului, în punctele indicate în figura 8 : pe mufă la exterior la 4 mm de faţa frontală şi în dreptul spirelor 1, 4, 8 şi 13 de la umăr, iar pe cep la exterior

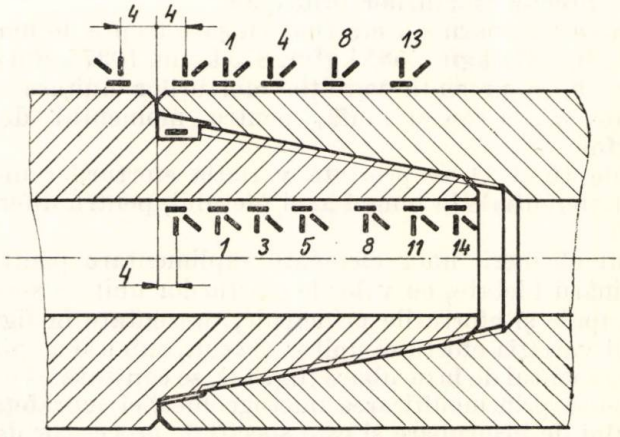


Fig. 8. — Schema aplicării traductorilor tensometrici electrorezistivi.

la 4 mm de umăr şi la interior în dreptul spirelor 1, 3, 5, 8, şi 11 de la umăr. Sub spire s-au aplicat rozete cu baza 3 mm. S-a aplicat o marcă tensometrică într-o degajare frezată în cep, în direcţie axială.

Cu aceste valori, starea de deformaţii şi eforturi în jurul punctului de măsurare este complet determinată, folosind relaţiile, [8] :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \qquad (2)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}(2\varepsilon_{45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y), \tag{4}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{45} - \varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_y)^2} \tag{5}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{2}\left[\frac{1}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{1+\mu}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (2\varepsilon_{45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}\right]. \tag{6}$$

Direcțiile eforturilor principale (direcțiile principale) se determină cu relația

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\varepsilon_{45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \tag{7}$$

În aceste relații s-a notat:

ε_1, ε_2 — alungiri specifice principale;
σ_1, σ_2 — eforturi unitare principale;
E — modul de elasticitate;
μ — coeficientul lui Poisson;
α_0 — direcția eforturilor principale.

Înșurubarea îmbinării s-a efectuat cu șase trepte de moment, avînd valorile 174,5 kgfm, 378 kgfm, 585 kgfm, 873 kgfm, 1037 kgfm și 1170 kgfm.

În figura 9 se prezintă variația eforturilor unitare axiale σ_x și circumferențiale σ_y, la cep și mufă, pentru momentul de înșurubare $M_{ts} = 1037$ kgfm.

În figurile 10 și 11 se prezintă variația eforturilor unitare axiale, respectiv circumferențiale în lungul axei filetului, pentru diferite momente de înșurubare.

În scopul obținerii unor elemente suplimentare pentru aprecierea solicitării îmbinării filetate, cu valorile eforturilor unitare s-au determinat direcțiile principale și eforturile principale, prezentate în figura 9.

Analizînd variația efortului unitar maxim, sub a 5-a spiră a cepului, în funcție de momentul de înșurubare (fig. 12), se constată că este neliniară. Aceasta se explică prin modificarea microgeometriei suprafeței spirelor în cursul procesului de înșurubare și este specifică proceselor de frecare.

2.3. PREZENTAREA REZULTATELOR EXPERIMENTĂRII ÎMBINĂRII FILETATE CILINDRICE

Îmbinarea filetată cilindrică a avut dimensiunile exterioare, ale alezajului și ale filetului egale cu cele ale racordului special $3\frac{1''}{2}$ L, cu observația că pentru diametrul mediu al filetului (M89,5) s-a ales media aritmetică a diametrelor medii extreme ale filetului conic al cepului.

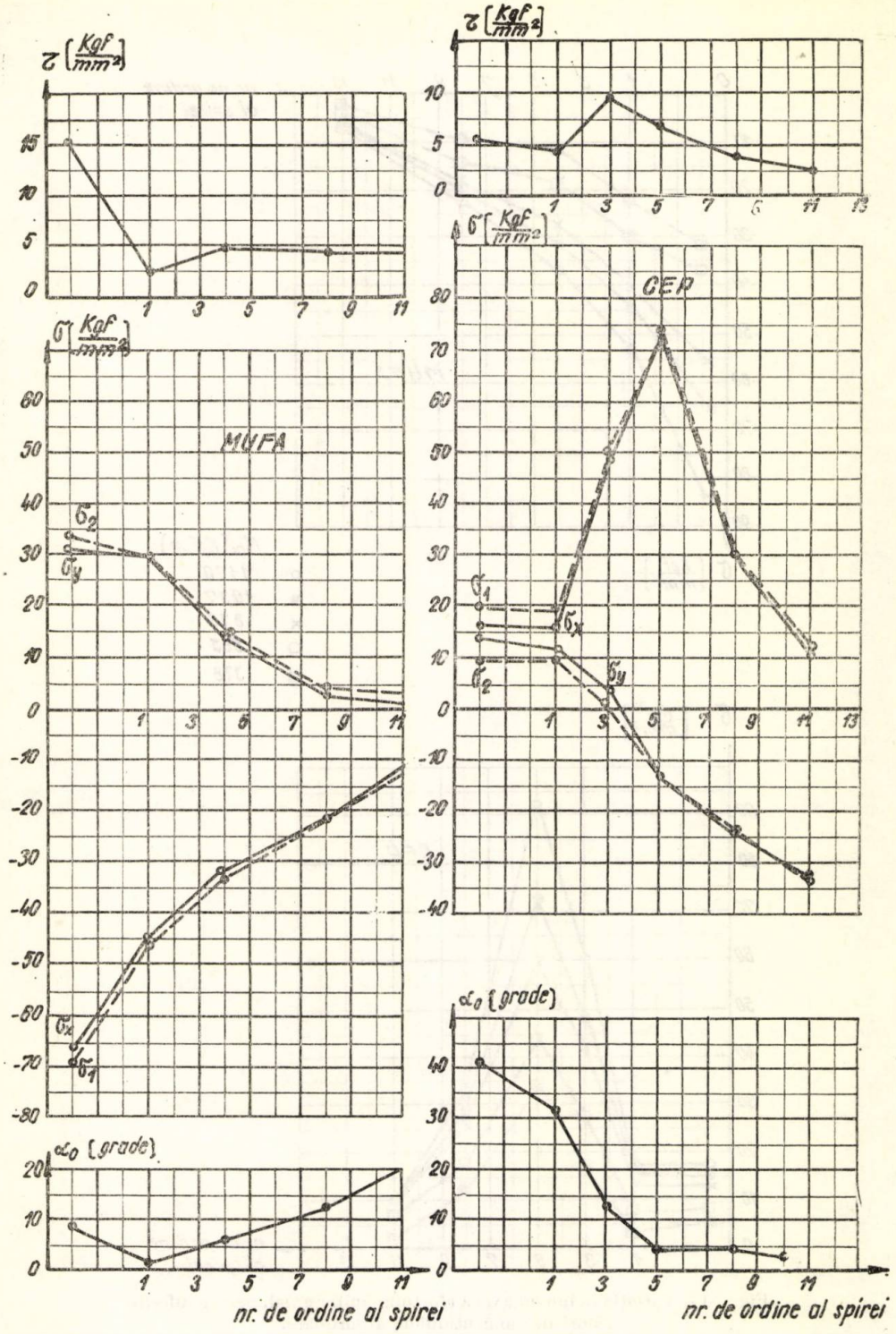


Fig. 9. — Variația în lungul axei a eforturilor unitare axiale, σ_x, circumferențiale σ_y, principale σ_1 și σ_2, tangențiale τ și a direcțiilor principale în cep și mufă.

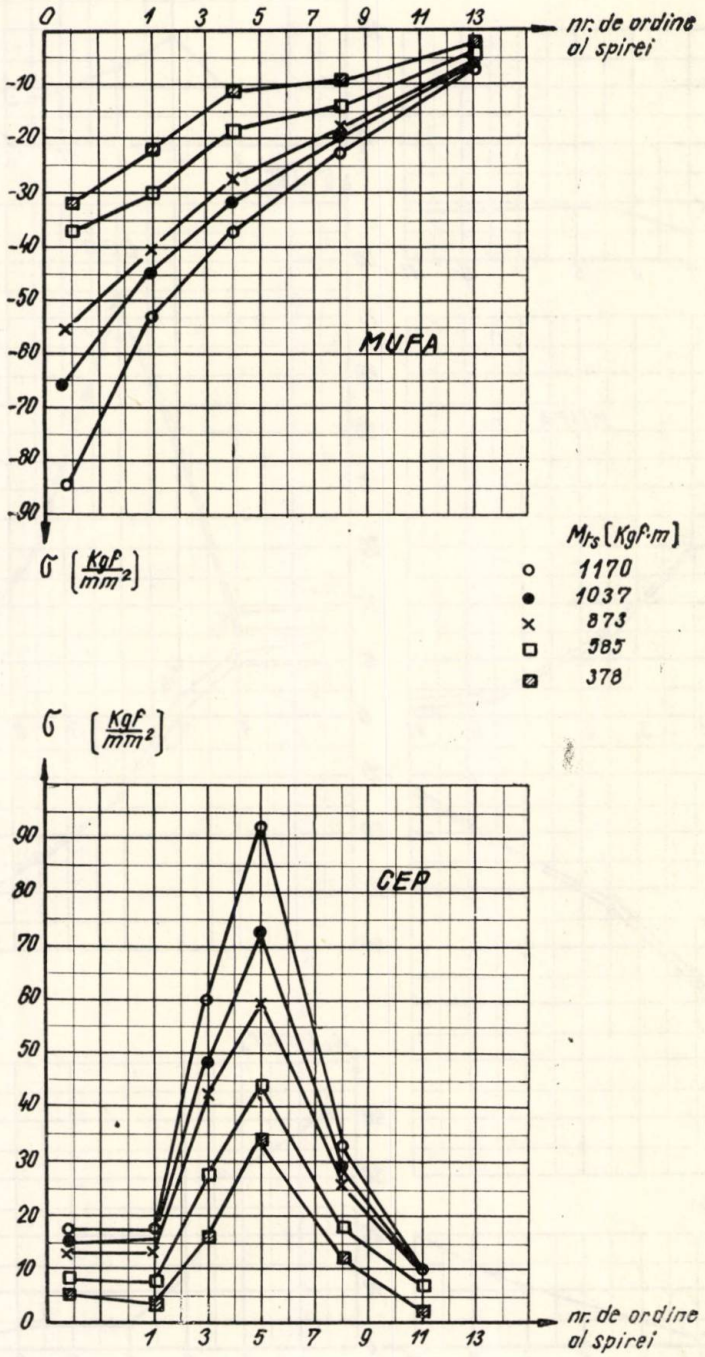


Fig. 10. — Variația în lungul axei a efortului unitar axial, pentru diferite valori ale momentului de înșurubare.

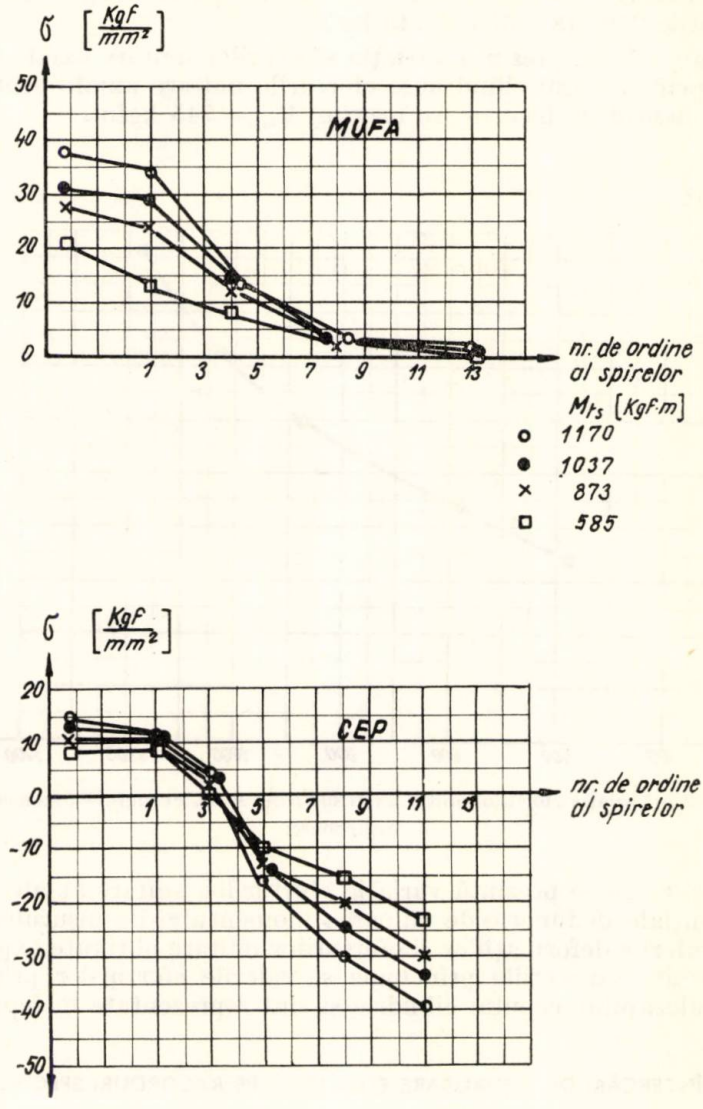


Fig. 11. — Variația în lungul axei a efortului unitar circumferențial, pentru diferite valori ale momentului de înșurubare.

S-a cercetat starea de deformații și eforturi după cele trei direcții, axial, circumferențial și la 45° față de axa filetului, aplicînd traductorii tensometrici atît la exteriorul îmbinării filetate cît și pe suprafața interioară a cepului cilindric.

Traductorii s-au aplicat pe alezajul cepului cilindric la 10 mm de umăr și în dreptul spirelor 1, 3, 5, 8 și 12 de la umăr iar la exterior, numai în direcție axială, la 4 mm de umeri și în dreptul spirelor 4,8 și 12.

Înșurubarea îmbinării s-a efectuat cu patru trepte de moment, avînd valorile 259, 487, 555 și 745 kgfm.

În figura 13 se prezintă variația eforturilor unitare axiale și circumferențiale pentru cepul cilindric și eforturile unitare axiale pentru mufă, pentru momentul de înșurubare maxim $M_{ts} = 745$ kgfm.

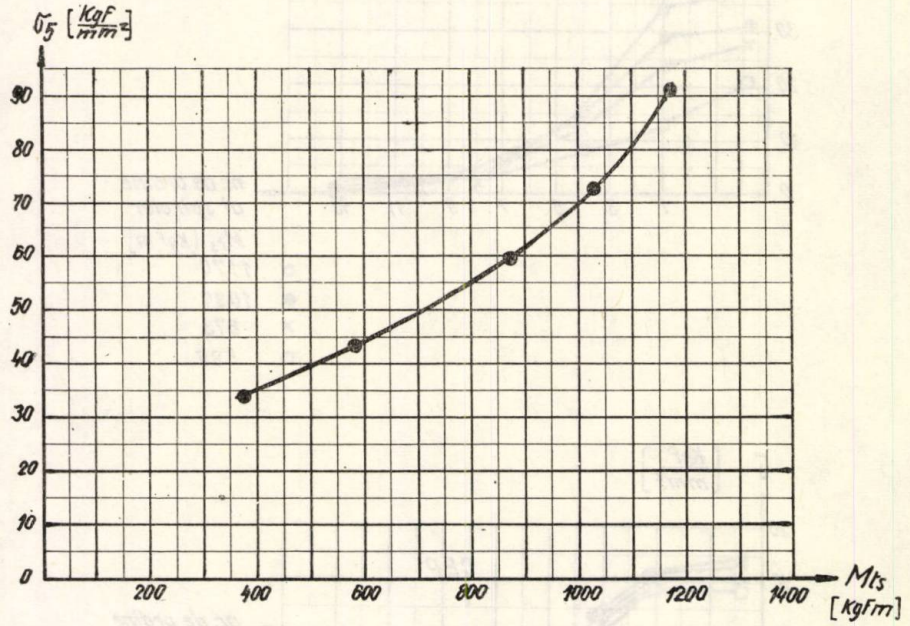


Fig. 12. — Variația efortului unitar axial sub a 5-a spiră a cepului cu momentul de înșurubare.

În figura 14 se prezintă variația eforturilor unitare axiale, respectiv circumferențiale în funcție de valoarea momentului de înșurubare.

Cu valorile deformațiilor și eforturilor unitare obținute experimental s-au determinat direcțiile principale și valorile eforturilor principale la suprafața alezajului cepului cilindric și sînt reprezentate în figura 13.

3. ÎNCERCĂRI DE ÎNȘURUBARE EFECTUATE PE RACORDURI SPECIALE

În scopul obținerii unor date suplimentare privind rezistența racordurilor speciale sub aspectul modului de distrugere și al valorilor momentelor de înșurubare la care se depășește limita elastică de deformare, s-au efectuat încercări de înșurubare pe trei perechi de racorduri speciale, dintre care două au fost conduse pînă la pierderea capacității portante a îmbinării.

Racordurile au fost de dimensiune $3\frac{1''}{2}$ L, două perechi executate din materialul 40C10, iar una din 41CN12, ambele materiale trebuind să aibă după tratamentul termic practic aceeași rezistență (STAS 325-67).

Pentru efectuarea înşurubărilor s-a folosit instalaţia prezentată în figura 7.

Înainte de înşurubare filetele au fost măsurate precis, constatînd înscrierea dimensiunilor în cîmpul de toleranţă.

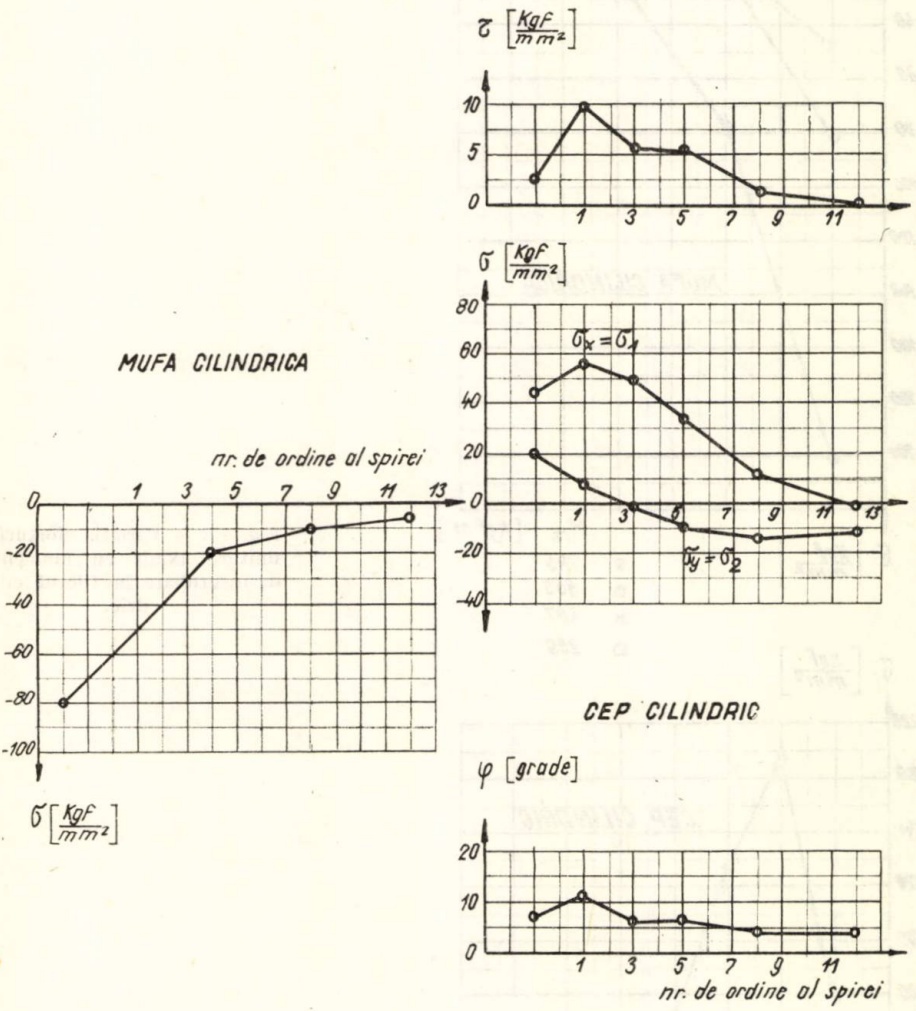


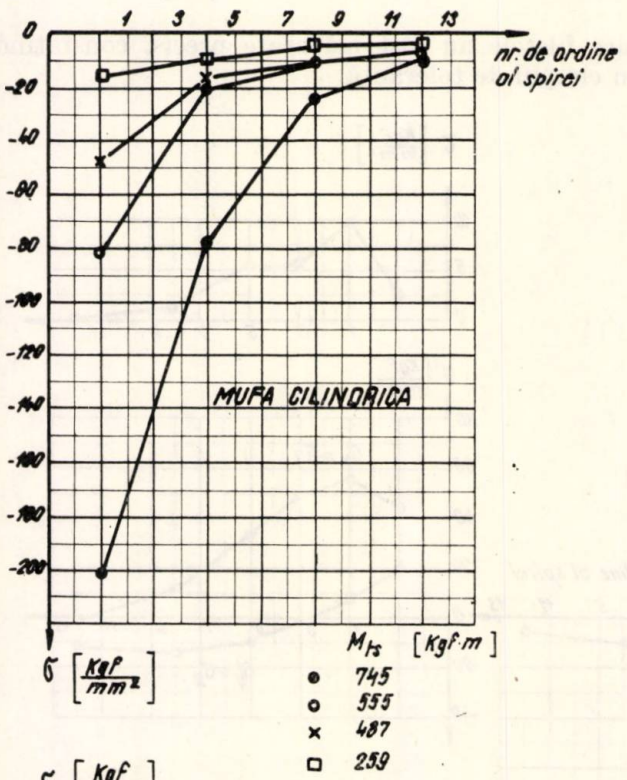
Fig. 13. — Variaţia în lungul axei a eforturilor unitare axiale σ_x, circumferenţiale σ_y, principale σ_1 şi σ_2, tangenţiale τ şi a direcţiilor principale, la filetul cilindric.

Cercetările au urmărit să stabilească:

— dependenţa dintre momentul de înşurubare şi diametrul exterior al mufei şi cepului;

— deplasarea relativă pe circumferinţă între cep şi mufă la înşurubare;

— influenţa calităţii materialului asupra deformaţiilor racordurilor speciale la înşurubare.



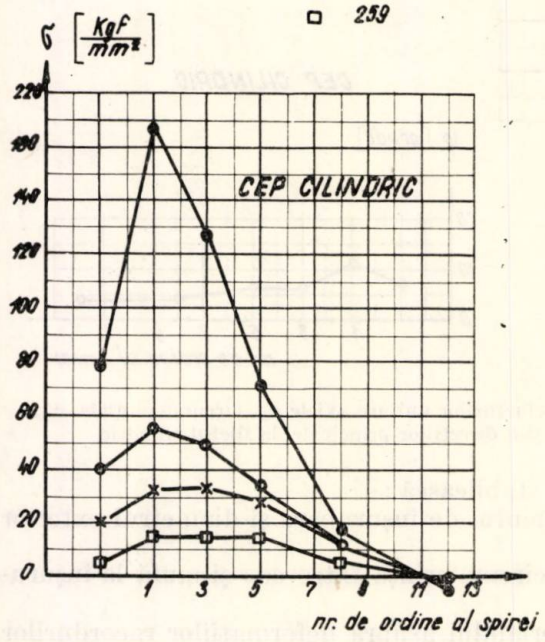


Fig. 14. — Variația eforturilor unitare axiale cu momentul de înșurubare la filetul cilindric.

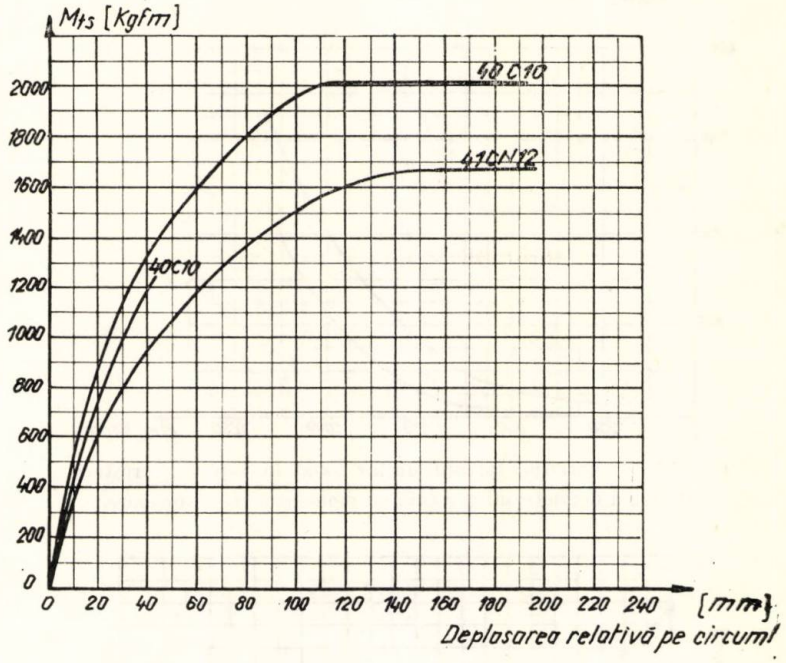


Fig. 15. — Dependența între deplasarea relativă pe circumferință și momentul de înșurubare.

Înșurubările s-au efectuat în trepte, măsurînd diametrul exterior al cepului și mufei la 5 mm de umeri și deplasarea pe circumferință între două repere trasate pe generatoare la înșurubarea manuală.

Dependența între momentul de înșurubare și deplasarea circulară este prezentată în figura 15, pentru cele trei racorduri experimentate. Împrăștierea valorilor se datorește erorilor posibile la măsurarea momentelor și deplasărilor. Se constată că la momentul de 1700 kgfm pentru oțelul 41CN12 respectiv la 2000 kgfm pentru oțelul 40C10 are loc un fenomen de curgere a materialului, deplasarea pe circumferință crescînd la moment constant.

Diferența între valorile momentelor de curgere pentru calitățile de oțel 41CN12 și 40C10 se explică prin diferența cifrelor de rezistență statice inferioare la oțelul 41CN12 în urma tratamentului termic.

Creșterea diametrului exterior al mufei este proporțională cu momentul de înșurubare, în timp ce diametrul exterior al cepului se menține constant sau crește lent la momente mici, iar la momente peste 1000 kgfm creșterea sa devine rapidă, avînd loc o umflare locală vizibilă a umărului cepului. În același timp, deplasarea radială a mufei are loc pe toată porțiunea filetată, în timp ce umflarea cepului e localizată pe o lungime de cca. 10 mm.

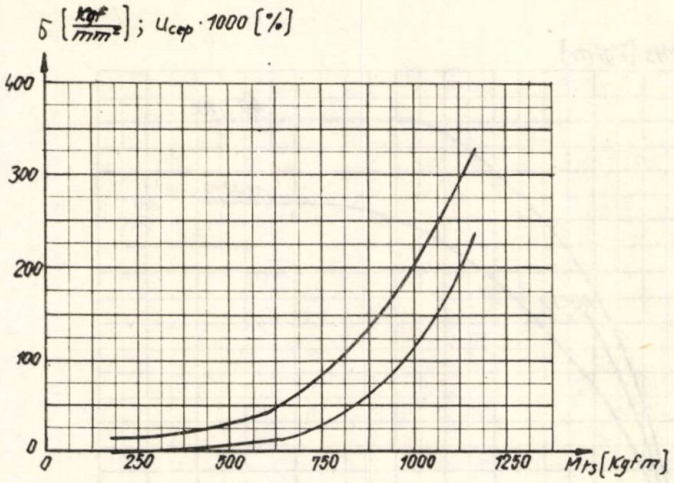


Fig. 16. — Variația efortului unitar axial în cep și a creșterii relative a diametrului acestuia cu momentul de înșurubare.

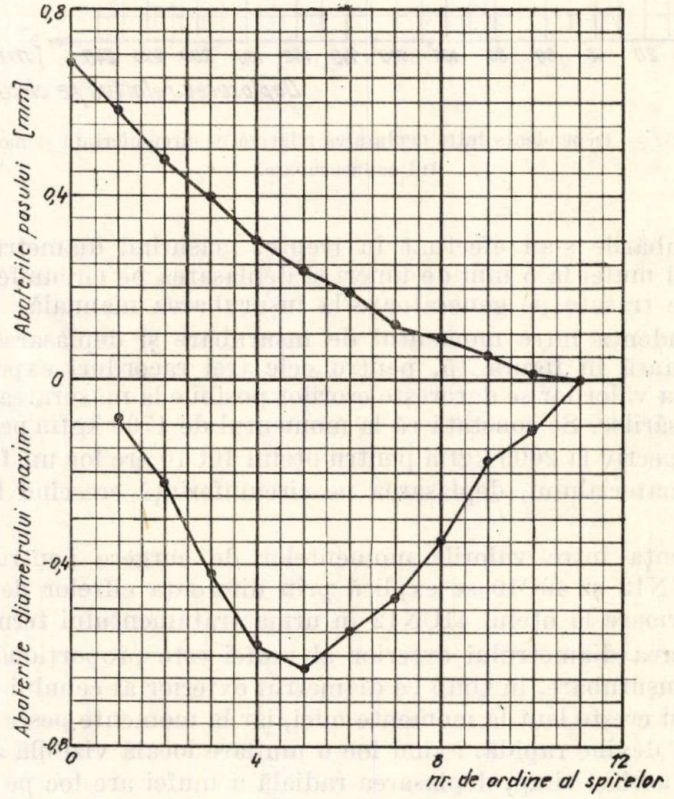


Fig. 17.—Abaterile pasului și conicității cepului unui racord special $3\frac{1''}{2}$ U din material 34CrMo4 (33MoC11), după înșurubare cu momentul 2370 kgfm, conform [9].

În figura 16 este reprezentată variația cu momentul de înșurubare a efortului axial măsurat pe exteriorul cepului la 4 mm de umăr și creșterea relativă a diametrului cepului, u_{cep}. Cum era de așteptat, cele două curbe sînt identice ca alură.

După terminarea încercărilor, perechile de racorduri speciale au fost deșurubate și s-au efectuat măsurători precise asupra pasului și conicității filetului. Rezultatele au arătat că erorile filetului se mențin în limitele cîmpului de toleranță. Rezultă că la racordurile 3 $\frac{1}{2''}$ L îmbinarea filetată este mai rezistentă decît umerii racordului special.

Comparînd rezultatele experimentale obținute cu cele prezentate în lucrarea [9], unde s-au experimentat racorduri de tipul 3 $\frac{1''}{2}$ U executate din materialele 34CrMo4 și 36CrNiMo4 (RFG), se constată că acestea sînt mai rezistente, curgerea plastică apărînd la momente de înșurubare mai mari. Totodată se observă că la racordurile speciale de tipul „Larg" experimentate de autori curgerea plastică a apărut la umeri spre deosebire de tipul „Uniform", [9], unde se deformează plastic filetul, valorile deformațiilor pasului și conicității fiind prezentate în figura 17.

4. CONCLUZII

1. Metodele fotoelasticității tridimensionale și tensometriei electrorezistive au permis determinarea exactă a eforturilor unitare la suprafața pieselor experimentate punînd în evidență efortul unitar axial maxim de tracțiune pe suprafața interioară a cepului, în dreptul celei de-a 5-a spire și efortul unitar axial maxim de compresiune în apropierea umerilor.

2. Cercetările prin fotoelasticitate au evidențiat în corpul cepului numărul maxim de benzi izocromate în dreptul primei spire a cepului și faptul că primele spire ale cepului preiau cea mai mare parte din sarcina axială. Punctele de concentrare maximă a tensiunilor sînt golul primei spire și canelura de la baza cepului.

3. Racordul special nr. 5, avînd conicitatea cepului mai mică decît valoarea standardizată, conduce la o distribuție mai uniformă a eforturilor axiale în îmbinare prin încărcarea și a spirelor de la vîrful cepului, care la celelalte racorduri experimentate se prezintă slab solicitate.

4. Analiza variației eforturilor unitare cu momentul de înșurubare arată, pentru toate direcțiile de măsurare (axial, circumferențial și după bisectoarea lor), că valorile eforturilor unitare cresc cu momentul de înșurubare, alura curbei de variație în lungul axei filetului fiind aceeași.

5. Valoarea efortului unitar axial maxim la suprafața interioară a cepului (91,1 kgf/mm^2) pentru M_{ts} = 1170 kgfm depășește limita de curgere, rezultînd ca nefondată și dăunătoare prescripția din STAS 325-67 de a înșuruba la probă racordurile speciale cu M_{ts} = 2500 kgfm.

În situația în care se apreciază ca necesară această probă din condiția verificării gripării filetului, valoarea momentului de înșurubare de probă trebuie revizuită și fundamentată teoretic și experimental.

6. Determinarea eforturilor unitare într-o secțiune transversală a cepului corespunzătoare zonei nefiletate atît prin fotoelasticitate, cît și prin tensometrie electrorezistivă a scos în evidență faptul că efortul unitar la suprafața exterioară a cepului este de circa 4 ori mai mare decît pe suprafața interioară a cepului.

Efortul unitar determinat prin tensometrare într-o secțiune transversală a cepului la 4 mm de umăr cu traductori tensometrici aplicați pe suprafața interioară ($\sigma = 17{,}3$ kgf/mm^2) și în degajarea frezată la fibra exterioară a cepului ($\sigma = 75{,}2$ kgf/mm^2) pentru $M_{ts} = 1170$ kgfm indică faptul că eforturile unitare se distribuie neuniform pe secțiunea transversală. Aceeași concluzie s-a desprins și în cadrul cercetărilor de fotoelasticitate, unde ordinul benzii izocromate la suprafața exterioară este 1,40, iar la suprafața interioară 0,30. Metoda tensometriei electrorezistive, permițînd aplicarea traductorilor numai la suprafața pieselor experimentate, nu oferă suficiente elemente pentru determinarea distribuției de eforturi pe secțiunea transversală a cepului sau mufei. De asemenea, nici metoda fotoelasticității nu a permis determinarea distribuției de eforturi pe secțiune.

7. Eforturile unitare principale, σ_1 și σ_2, sînt aproape identice ca valoare și alură cu eforturile unitare axiale și circumferențiale.

8. Direcția eforturilor principale la suprafața interioară a cepului este între spirele 5 ... 11 practic axială, devierea cu 4° față de axa filetului datorîndu-se măsurării deformațiilor sub moment de înșurubare.

Începînd cu a 5-a spiră spre umăr, efortul principal își modifică direcția față de axă, ajungînd în zona nefiletată la valoarea 40°, indicînd o solicitare de torsiune.

Direcția efortului principal la suprafața exterioară a mufei este practic axială în prima jumătate a filetului spre umăr, tinzînd la 45° în zona nefiletată.

Direcția eforturilor principale nu se modifică sensibil cu creșterea momentului de înșurubare.

9. Cercetarea prin tensometrie electrorezistivă a eforturilor în îmbinarea filetată cilindrică, a scos în evidență faptul că eforturile unitare axiale pe suprafața interioară a cepului cilindric cresc de la ultima spiră angajată a filetului pînă la prima spiră. Aceasta conduce la explicația că maximul de efort înregistrat la mijlocul îmbinării conice este rezultatul efectului conicității, explicat analitic în lucrarea [3] prin efectul încovoietor exercitat de forțele distribuite pe spirele filetului.

10. Încercările de înșurubare conduse pînă la curgerea materialului au evidențiat deformarea radială a mufei pe toată lungimea filetată și deformarea locală a umărului cepului.

Din compararea rezultatelor obținute cu cele din literatura de specialitate a rezultat că îmbinarea filetată de tipul $3\frac{1''}{2}$ Larg este mai rezistentă decît umerii îmbinării în timp ce la tipul $3\frac{1''}{2}$ Uniform a avut loc deformarea plastică a filetului.

11. Încercările experimentale prezentate permit concluzia finală că solicitarea cepului crește de la ultima spre prima spiră angajată, primele

spire fiind cele mai încărcate, în timp ce efortul unitar maxim axial se dezvoltă pe suprafaţa interioară a cepului la mijlocul îmbinării filetate. Aceste concluzii confirmă justeţea ipotezelor şi calculelor analitice prezentate în lucrarea [3]. Astfel, legea determinată analitic pentru distribuţia pe spire a sarcinii de prestrîngere, crescătoare de la vîrful la baza cepului, este confirmată atît de variaţia deformaţiei plastice a pasului (fig. 17), cît şi de cercetările de fotoelasticitate tridimensională. Pe de altă parte, ipoteza că efectul încovoietor al forţelor distribuite pe spirele filetului este important şi conduce la o deplasare radială a cepului, [3], se confirmă prin cercetările de fotoelasticitate şi tensometrare, unde s-a constatat că valoarea maximă a efortului unitar axial se dezvoltă la mijlocul îmbinării filetate.

Primită la redacţie la 19 aprilie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. D. Raşeev, V. Ulmanu, *Solicitările la oboseală a îmbinărilor filetate ale racordurilor speciale şi metodologia de cercetare a rezistenţei acestora*, St. cerc. mec. apl., **30**, 5 (1971).
2. D. Raşeev, V. Ulmanu, *Contribuţii la determinarea rezistenţei la oboseală a racordurilor speciale*, St. cerc. mec. apl., *4* (1974).
3. V. Ulmanu, *Determinarea analitică a deformaţiilor şi eforturilor în îmbinarea filetată conică la înşurubarea cu forţă de prestrîngere*, St. cerc. mec. apl., *4* (1974).
4. N. Iosipescu, *Introducere în fotoelasticitate*, vol. I. Ed. T., Bucureşti, 1958.
5. F. Bollenrath, V. Hauk, L. Nolte, *Spannungsoptische untersuchungen an Gestängeverbindern, Erdoel*—Z. 78 Jg, september 1962.
6. D.J. Chalupnik, *Stress Concentrations in Bolt-Thread Roots, Experimental Mechanics*, Sept., 1968.
7. S.D. Ponomariov ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Edit. tehnică, vol. I. 1962.
8. Gh. Buzdugan, M. Blumenfeld, *Tensometria electrică rezistivă*, Edit. tehnică, 1966.
9. E. Lenz, *Verformungsmessungen an* $3\frac{1''}{2}$ API — IF — Gestängeverbindern, Erdoel — Z,78 Jg. Juli 1962.
10. V. Hauk, H. Koehler, *Untersuchungen an Gestängeverbindern. Verschraubvesuche mit verschiedenen Konstruktionen*, Erdoel —Z, 78 Jg Juli 1962.
11. J.F. Gormley, *Experimental Stress Analysis of Tool Joints*, J. of Petr.Technology May 1691.

METODE APROXIMATIVE NUMERICE PENTRU STUDIUL VIBRAȚIILOR NELINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE *

de E. DECIU și P. DIMO

Institutul Politehnic București

Ținînd seama că pe calculatorul numeric soluțiile diferitelor probleme se dau prin puncte, se face observația că algoritmul de calcul este analog și în anumite metode aproximative grafice și grafo-analitice de integrare a ecuațiilor de mișcare pentru vibrațiile neliniare cu un grad de libertate.

Plecînd de la această observație, se elaborează metode de calcul pentru calculatorul numeric, corespunzătoare metodei izoclinelor și metodei delta utilizate pentru integrarea ecuațiilor vibrațiilor neliniare cu un grad de libertate. În lucrare se dau programele de calcul și în încheiere sînt prezentate exemple.

1. GENERALITĂȚI

Rezolvarea ecuațiilor de mișcare pentru vibrațiile neliniare cu un grad de libertate, așa după cum este cunoscut ridică dificultăți și ca urmare de multe ori se utilizează metode aproximative. Printre acestea sînt și metodele grafice și grafo-analitice, care conduc suficient de rapid la obținerea soluției.

Specific metodelor aproximative grafice și grafo-analitice este un algoritm de calcul astfel alcătuit, încît pe un interval se fac anumite ipoteze referitoare la curba integrală, iar soluțiile se dau prin puncte. Calculatorul numeric permite, de asemenea, soluționarea diferitelor probleme prin puncte. Prin urmare se poate face o analogie între algoritmul de calcul utilizat în metodele aproximative grafice și grafo-analitice și cele utilizate pe calculator. Plecînd de la această observație de ordin general, lucrarea de față își propune să stabilească metode numerice aproximative pentru integrarea ecuațiilor de mișcare a vibrațiilor neliniare cu un grad de libertate, care să reprezinte variante numerice ale metodei izoclinelor și ale metodei delta [1], [2], [4], [5].

2. METODA NUMERICĂ CORESPONDENTĂ METODEI IZOCLINELOR

După cum este cunoscut, cu ajutorul metodei izoclinelor se construiește aproximativ curba integrală sub forma unei linii poligonale alcătuită din segmente de tangente la curba integrală.

* Comunicată la Sesiunea jubiliară a Universității Brașov, 15–16 februarie 1974.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 1, 1975, P. 113–129

Deci în această metodă pe un interval se consideră că tangenta la curba integrală păstrează o valoare constantă.

Pentru ecuaţia de mişcare a unei vibraţii cu un grad de libertate, metoda izoclinelor se utilizează în planul fazelor, cînd curba integrală devine traiectoria de fază.

Se consideră ecuaţia de mişcare pentru o vibraţie neliniară cu un grad de libertate scrisă sub forma generală:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t, p) = 0, \tag{1}$$

unde $f(x, \dot{x}, t, p)$ este o funcţie neliniară, iar p este un parametru.

Se notează viteza

$$\dot{x} = v = y, \tag{2}$$

de unde

$$\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Se ştie că acceleraţia poate fi exprimată sub forma

$$\ddot{x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

Ţinînd seama de relaţiile (2) şi (4), ecuaţia (1) se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f(x, y, t, p)}{y}. \tag{5}$$

Specific metodei izoclinelor este faptul că pe un interval se admite

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = q = \text{const.} \tag{6}$$

de unde rezultă că pe acel interval

$$-\frac{f(x, y, t, p)}{y} = q = \text{const.} \tag{7}$$

Ţinînd seama de cele expuse mai înainte, în metoda de rezolvare numerică se utilizează diferenţele finite. Se pleacă de la condiţiile iniţiale date, adică la $t = t_0$ se dau $x = x_0$, $y = y_0$, ceea ce revine la cunoaşterea în planul fazelor a punctului iniţial P_0 (x_0, y_0). În continuare se alege un interval de timp (pasul de integrare) Δt_i convenabil de mic şi cu ajutorul acestuia se face integrarea, adică se calculează variaţiile Δx şi Δy necesare determinării coordonatelor punctului reprezentativ următor din planul fazelor.

Pentru un interval, se vede cu ușurință că se poate scrie

$$\Delta y = q\,\Delta x. \tag{8}$$

Pentru calculul variațiilor Δx și Δy, ținînd seama de relațiile (3) și (8) se obține

$$\begin{aligned} \Delta x &= y\,\Delta t_i, \\ \Delta y &= qy\,\Delta t_i, \end{aligned} \tag{9}$$

unde panta q se calculează pentru fiecare interval cu relația (7). Cu aceste date se poate trasa diagrama mișcării în funcție de timp și diagrama în planul fazelor. Organigrama metodei este dată în figura 1.

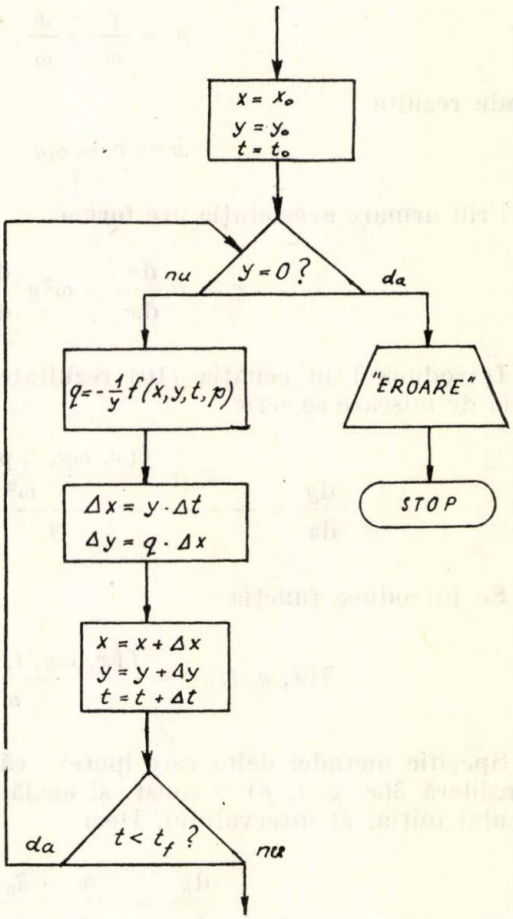


Fig. 1. — Organigrama pentru varianta numerică a metodei izoclinelor.

Timpul final, la care calculul încetează, implicit și numărul de cicluri, se stabilește de la caz la caz în funcție de problema studiată.

Subprogramul de integrare, scris în FORTRAN este dat în anexa 1.

3. METODA NUMERICĂ CORESPONDENTĂ METODEI DELTA

După cum se ştie, cu metoda delta se construieşte aproximativ curba integrală printr-o curbă constituită din arce de cerc, fiecare arc corespunzînd unui interval în care se fac anumite ipoteze asupra evoluţiei variabilelor t, x şi y. La fel ca şi în metoda izoclinelor cu ajutorul metodei delta se poate trasa traiectoria de fază în planul fazelor.

Se consideră ecuaţia de mişcare pentru o vibraţie neliniară cu un grad de libertate exprimată sub forma (1), care mai poate fi scrisă şi

$$\ddot{x} + [f(x, \dot{x}, t, p) - \omega^2 x] + \omega^2 x = 0. \tag{10}$$

Se face schimbarea de variabilă

$$y = \frac{v}{\omega} = \frac{\dot{x}}{\omega}, \tag{11}$$

de unde rezultă

$$\dot{x} = v = \omega y. \tag{12}$$

Prin urmare acceleraţia are forma

$$\ddot{x} = v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \omega^2 y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{13}$$

Introducînd în ecuaţia (10) rezultatele din relaţiile (12) şi (13), ecuaţia de mişcare se scrie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x + \dfrac{f(x, \omega y, t, p) - \omega^2 x}{\omega^2}}{y}. \tag{14}$$

Se introduce funcţia

$$\delta(x, y, t, p) = \frac{f(x, \omega y, t, p) - \omega^2 x}{\omega^2}. \tag{15}$$

Specific metodei delta este ipoteza că pentru un interval de timp se consideră $\delta(x, y, t, p) = \text{const.}$ şi egală cu valoarea corespunzătoare punctului iniţial al intervalului. Deci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x + \delta_0}{y}, \tag{16}$$

unde $\delta_0 = \delta(x_0, y_0, t_0)$ este valoarea funcţiei δ în punctul iniţial cunoscut prin $t = t_0$; $x = x_0$ şi $y = y_0$.

În ecuația (16) separînd variabilele și integrînd, se obține

$$\frac{y^2}{2} = -\left(\frac{x^2}{2} + \delta_0 x\right) + C, \tag{17}$$

unde constanta de integrare C, determinată prin condițiile inițiale, are valoarea

$$C = \frac{y_0^2}{2} + \frac{x_0^2}{2} + \delta_0 x_0. \tag{18}$$

Introducînd valoarea constantei de integrare (18) în relația (17) se obține soluția ecuației diferențiale, adică ecuația curbei integrale

$$(x + \delta_0)^2 + y^2 = \rho_0^2, \tag{19}$$

unde s-a notat

$$\rho_0^2 = (x_0 + \delta_0)^2 + y_0^2, \tag{20}$$

care reprezintă o mărime constantă și pozitivă. Se vede că ecuația (19) a curbei integrale reprezintă ecuația unui cerc cu centrul în $D_0(-\delta_0, 0)$ și de rază $\rho_0 = D_0P_0$, care trece prin punctul inițial P_0 (x_0, y_0). Cu aceste date se construiește prima porțiune din traiectoria de fază sub forma arcului de cerc P_0P_1, corespunzătoare primului interval (fig. 2, unde $i = 0$). Din punctul P_1 calculul se reia în mod analog.

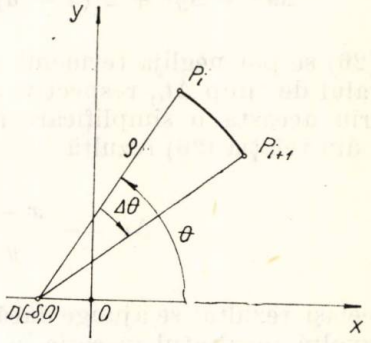


Fig. 2. — Arc al curbei integrale trasat cu metoda delta.

Pentru calculul timpului corespunzător unui interval, adică arcului de cerc P_iP_{i+1} se pleacă de la relația (11) și trecînd la coordonate polare se obține

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\omega y} = \left| -\frac{\rho \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\rho\omega \sin\theta} \right| = \left| -\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega} \right|, \tag{21}$$

unde s-a ținut seama că $\mathrm{d}\theta < 0$, deoarece unghiul θ este descrescător (fig. 2).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Avînd la bază aceste rezultate cunoscute, se poate realiza o metodă numerică prin utilizarea diferenţelor finite. Astfel se observă că din relaţia (21) rezultă

$$\Delta\theta = \omega \Delta t_i. \tag{22}$$

De asemenea unghiul la centru $\Delta\theta$ poate fi calculat ţinînd seama că arcul $\Delta s = P_i P_{i+1}$ reprezintă un arc de cerc de rază ρ

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{\rho} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\rho}. \tag{23}$$

Egalînd între ele relaţiile (22) şi (23) se obţine

$$\omega \Delta t_i = \frac{1}{\rho} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{24}$$

Coordonatele punctelor $P_i(x, y)$ şi $P_{i+1}(x + \Delta x, y + \Delta y)$ satisfac ecuaţia cercului cu centrul în $D_i(-\delta, 0)$ şi raza ρ; astfel

$$\begin{aligned} &(P_i) \quad (x+\delta)^2 + y^2 = \rho^2, \\ &(P_{i+1}) \quad (x + \Delta x + \delta)^2 + (y + \Delta y)^2 = \rho^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Scăzînd între ele relaţiile (25) se obţine

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + 2(x + \delta)\Delta x + 2y \Delta y = 0. \tag{26}$$

În relaţia (26) se pot neglija termenii Δx^2 şi Δy^2 faţă de ceilalţi termeni, cînd intervalul de timp Δt_i, respectiv variaţiile Δx şi Δy sînt mici, obţinîndu-se prin aceasta o simplificare a calculelor şi a programului. În consecinţă, din relaţia (26) rezultă

$$\Delta y = -\frac{x+\delta}{y} \Delta x. \tag{27}$$

La acelaşi rezultat se ajunge dacă se rezolvă în raport cu Δy ecuaţia (26), se dezvoltă rezultatul în serie şi se reţin numai termenii liniari în Δx.

Introducînd în (24) rezultatul din (27) se obţine

$$\omega \Delta t_i = \frac{1}{\rho} \sqrt{\Delta x^2 + \left(\frac{x+\delta}{y}\right)^2 \Delta x^2} = \frac{\Delta x}{y\rho} \sqrt{(x+\delta)^2 + y^2} = \frac{\Delta x}{y}, \tag{28}$$

de unde rezultă relaţia de calcul a variaţiei Δx

$$\Delta x = y \omega \Delta t_i. \tag{29}$$

Introducînd rezultatul din (29) în (27) se deduce relația de calcul a variației Δy

$$\Delta y = -(x + \delta)\,\omega\,\Delta t_i. \tag{30}$$

Erorile care se efectuează prin aplicarea variantei numerice a metodei delta pot fi clasificate astfel:

a) erori datorită utilizării diferențelor finite; b) erori specifice metodei delta (considerînd $\delta_0 = \text{const.}$); c) erori datorită eliminării termenilor în Δx^2 și Δy^2 în ecuația (26); d) erori de trunchiere; e) erori propagate de la x la y.

Erorile datorită utilizării diferențelor finite, așa după cum este cunoscut în general, pot fi reduse la o limită admisibilă prin reducerea intervalelor considerate. Această reducere este limitată în cazul metodelor grafice și grafo-analitice de posibilitățile de realizare practică a desenelor.

Erorile locale specifice metodei delta, considerînd $\delta_0 = \text{const.}$, se calculează cu ajutorul unei dezvoltări în serie Taylor a soluției exacte (δ variabil) și prin integrări succesive se obține [1]:

$$|\varepsilon_x| = \frac{(\Delta t_i)^3}{3!}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 + O_4(\Delta t_i), \tag{31}$$

$$|\varepsilon_v| = \frac{(\Delta t_i)^2}{2!}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 + \frac{(\Delta t_i)^3}{3!}\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_0 + O_4(\Delta t_i), \tag{32}$$

și ținînd seama de relația (12) rezultă

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\omega}\,\varepsilon_v. \tag{32'}$$

În aceste relații funcția δ trebuie calculată pe curba reală.

Pentru a aprecia efectul neglijării termenilor Δx^2 și Δy^2 în ecuația (26) — fapt care conduce la simplificări sensibile ale calculului și ale programului — se rezolvă ecuația (26) ca o ecuație de gradul al doilea în Δy, se dezvoltă radicalul în serie și reținînd numai termenii în Δx^2, se obține

$$\Delta y = -\frac{x+\delta}{y}\,\Delta x - \frac{y^2 + (x+\delta)^2}{2y^3}\,\Delta x^2 + O_3(\Delta x). \tag{33}$$

Introducînd rezultatul din (33) în relația (24) rezultă

$$\omega\Delta t_i = \frac{\Delta x}{y}\sqrt{1 + \frac{x+\delta}{y^2}\,\Delta x + \frac{\rho^2}{4y^4}\,\Delta x^2}. \tag{34}$$

Comparînd rezultatele din relațiile (28) și (34), pentru ca eroarea să fie mică este necesar ca

$$\frac{x+\delta}{y^2}\,\Delta x + \frac{\rho^2}{4y^4}\,\Delta x^2 < 1, \tag{35}$$

de unde se deduce condiţia

$$\Delta x \in (\Delta x_1,\ \Delta x_2),$$

unde

$$\Delta x_1 = \frac{2y^2}{\rho^2}\left[-(x+\delta) - \sqrt{(x+\delta)^2+\rho^2}\right],$$
$$\Delta x_2 = \frac{2y^2}{\rho^2}\left[-(x+\delta) + \sqrt{(x+\delta)^2+\rho^2}\right], \tag{36}$$

şi se constată că Δx_1 şi Δx_2 au semne contrare.

Din relaţia (29) se obţine

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x}{y\omega}. \tag{37}$$

Reluînd calculul pentru intervalul de integrare Δt_i, rezultă condiţia pe care trebuie să o îndeplinească acesta

$$\Delta t_i \in (\Delta t_{i1},\ \Delta t_{i2}),$$

unde

$$\Delta t_{i1} = \frac{2y}{\omega\rho^2}\left[-(x+\delta) - \sqrt{(x+\delta)^2+\rho^2}\right] =$$
$$= \frac{2y\omega}{y^2\omega^4 + f^2(x, \omega y, t, p)}\left[-f(x, \omega y, t, p) - \sqrt{\omega^4 + f^2(x, \omega y, t, p)}\right],$$
$$\Delta t_{i2} = \frac{2y}{\omega\rho^2}\left[-(x+\delta) + \sqrt{(x+\delta)^2+\rho^2}\right] = \tag{38}$$
$$= \frac{2y\omega}{y^2\omega^4 + f^2(x, \omega y, t, p)}\left[-f(x, \omega y, t, p) + \sqrt{\omega^4 + f^2(x, \omega y, t, p)}\right].$$

Dacă una dintre valorile Δt_{i1} sau Δt_{i2} este negativă, atunci se reţine numai partea pozitivă a domeniului de mai sus.

Pentru calculul erorilor care se comit prin neglijarea termenilor Δx^2 şi Δy^2 se pleacă de la relaţia (33), care reprezintă soluţia ecuaţiei (26). Se introduce această soluţie în relaţia (24), de unde, ţinînd seama că Δt_i este o mărime mică, se obţine

$$\Delta x = y\omega\,\Delta t_i - \frac{1}{2}\,\omega^2(x+\delta)\,\Delta t_i^2 + O_3(\Delta t_i). \tag{39}$$

Comparînd relaţiile (29) şi (39) rezultă mărimea erorii asupra variaţiei Δx

$$|\varepsilon_{\Delta x}| = \frac{1}{2}\,\omega^2(x+\delta)\,\Delta t_i^2 + O_3(\Delta t_i). \tag{40}$$

Introducînd rezultatul din (39) în relația (33) se obține

$$\Delta y = -(x + \delta)\,\omega\Delta t_i - \frac{y\omega^2}{2}\Delta t_i^2 + O_3(\Delta t_i). \tag{41}$$

Comparînd relațiile (30) și (41) rezultă mărimea erorii efectuate asupra lui Δy

$$|\varepsilon_{\Delta y}| = \frac{y\omega^2}{2}\Delta t_i^2 + O_3(\Delta t_i). \tag{42}$$

Din relațiile (39) și (41) se deduc condițiile pe care trebuie să le îndeplinească intervalul Δt_i, pentru a putea neglija în aceste relații termenii neliniari în Δt_i, adică acele condiții care permit o utilizare corectă a relațiilor de calcul (29) și (30):

$$\Delta t_i < \left|\frac{2y}{\omega(x+\delta)}\right| \quad \text{și} \quad \Delta t_i < \left|\frac{2(x+\delta)}{\omega y}\right|. \tag{43}$$

În calcule, evident, va fi luată în considerare condiția cea mai restrictivă din (43).

Erorile de trunchiere, precum și cele care se transmit de la x la y depind în principal de calculator.

În aplicarea metodei numerice se pleacă de la condițiile inițiale date ($t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$) și se alege un interval de timp (pasul de integrare) constant Δt_i conform condițiilor (38) și (43). În continuare se calculează pentru fiecare etapă funcția δ după relația (15) și raza ρ după relația (20) — cînd se urmărește și trasarea curbei. Valoarea parametrului ω se alege (în unele lucrări se recomadă să fie chiar pulsația proprie), ceea ce determină scara reprezentării pentru y, conform relației (11). Variațiile Δx și Δy se calculează cu formulele (29) și respectiv (30). Valoarea finală a timpului, respectiv numărul de cicluri în program se stabilesc de la caz la caz, în funcție de problemă. În multe cazuri practice, se alege un interval de integrare Δt_i suficient de mic, dar se prevede afișarea la intervale de afișare Δt_a multiplu de Δt_i, unde $\Delta t_a \gg \Delta t_i$, obținîndu-se astfel o creștere a preciziei de calcul. Aceasta reprezintă de fapt o perfecționare a metodei delta.

Organigrama metodei este dată în figura 3.

Subprogramul de integrare, scris în FORTRAN este dat în anexa 2.

Se demonstrează ușor că rezultatele obținute în variantele numerice ale metodelor izoclinelor și delta coincid, cînd în metoda delta se alege $\omega = 1$ și $\Delta t_i = \text{const}$.

Este interesant de semnalat că se poate pune condiția ca rezultatele din relațiile (28) și (34) să coincidă, adică

$$\frac{x+\delta}{y^2}\Delta x + \frac{\rho^2}{4y^4}\Delta x^2 = 0, \tag{44}$$

care conduce la

$$\Delta x_v = -\frac{4y^2(x+\delta)}{\rho^2} \tag{45}$$

valoare ce verifică condiţiile (36).

Introducînd rezultatul din (45) în relaţia (29), care acum nu mai este aproximativă, se deduce

$$\Delta t_v = -\frac{4y(x+\delta)}{\omega\rho^2} = \tag{46}$$

$$= -4\omega y \frac{f(x, \omega y, t, p)}{\omega^4 y^2 + f^2(x, \omega y, t, p)},$$

care satisface condiţiile (38).

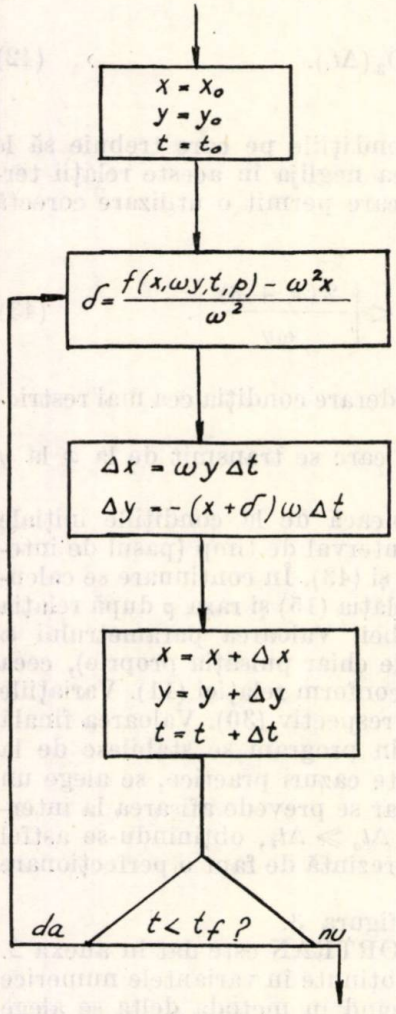


Fig. 3. — Organigrama pentru varianta numerică a metodei delta.

Utilizînd formula (46) se poate realiza un program de calcul cu pas variabil Δt_v, dar care prezintă dezavantajul că pentru $y = 0$ rezultă $\Delta t_v = 0$ şi calculul se opreşte. Pentru evitarea acestei situaţii se impune luarea unor măsuri suplimentare, ca de exemplu evitarea domeniului $y \in (-\alpha, +\alpha)$, unde α se poate alege în funcţie de problemă, de eroarea admisă etc.

De asemenea, se semnalează că în alcătuirea algoritmului de calcul se poate impune condiţia reţinerii termenilor care conţin pe Δt_i pînă la puterea a doua. În acest caz, de fapt se revine la calculul prezentat mai înainte referitor la stabilirea erorilor efectuate dacă se neglijează termenii în Δx^2 şi Δy^2. Prin urmare relaţiile de calcul ale variaţiilor Δx şi Δy sînt (39) şi respectiv (41), care înlocuiesc relaţiile de calcul (29) şi (30), în rest algoritmul de calcul căruia îi corespunde organigrama din fig. 3 nu se modifică.

4. EXEMPLE

Pentru exemplificarea metodelor numerice prezentate mai înainte se studiază mai multe ecuaţii neliniare cunoscute, care permit efectuarea unor comparaţii.

a. Se consideră ecuaţia lui Van der Pol

$$\ddot{x} - p(1 - x^2)\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (p\ 0)$$

în cazul particular cînd $p = 1$, $k^2 = 1$.

Se știe că unica singularitate apare în origine și ca urmare metodele expuse nu se pot aplica în acest punct.

Se utilizează ambele metode, alegîndu-se pentru metoda delta $\omega = 1$, pentru a ilustra că se obțin aceleași rezultate.

În acest caz

$$f(x, \dot{x}, t, p) = x - (1 - x^2)\,\dot{x}.$$

Se alege pasul de integrare $\Delta t_i = 1.10^{-3}$ s și se prevede ca afișarea să se efectueze pentru intervale de timp de $\Delta t_a = 2 \cdot 10^{-1}$ s.

Condițiile inițiale sînt pentru curba exterioară $t_0 = 0$; $x_0 = -2$; $y_0 = 2{,}25$; iar pentru curba interioară $t_0 = 0$; $x_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$; $y = 0$. Integrarea pentru curba interioară este făcută numai cu metoda delta.

Rezultatele sînt prezentate în figura 4 trasată pe baza rezultatelor numerice. Punctele obținute se plasează bine pe ciclul limită.

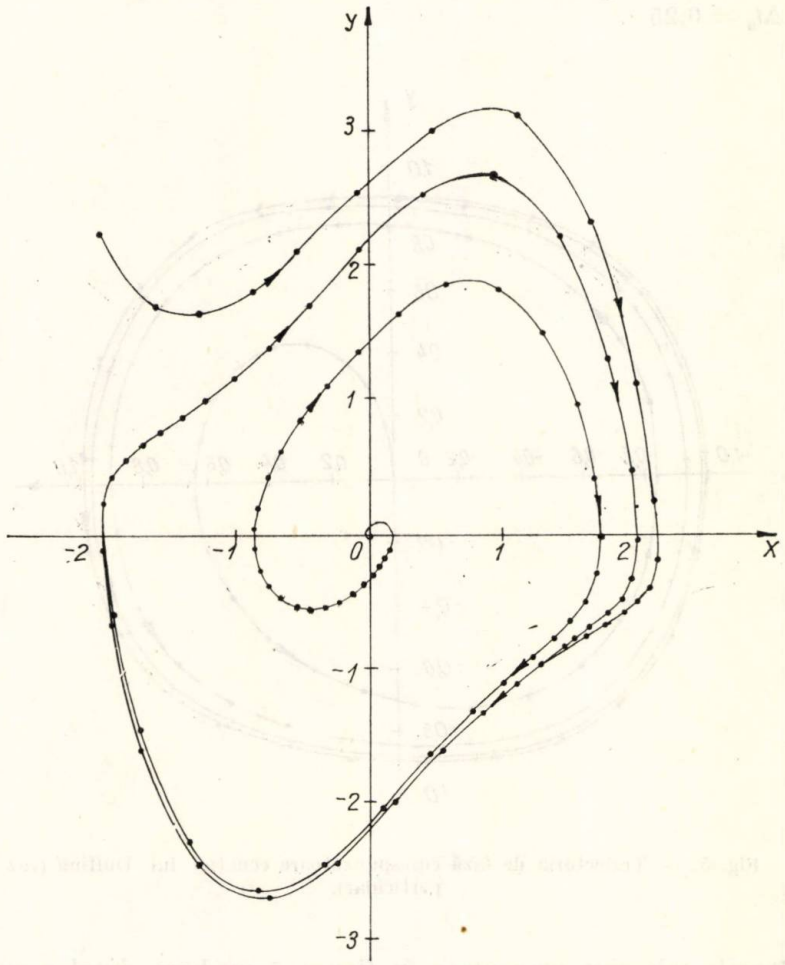


Fig. 4. — Traiectoria de fază corespunzătoare ecuației lui Van der Pol cînd $p = 1$, $k^2 = 1$.

b. Se consideră ecuaţia lui Duffing scrisă într-un caz particular [1]:

$$\ddot{x} + 0{,}7\,\dot{x} + x^3 = 0{,}75 \cos t.$$

În acest caz

$$f(x, \dot{x}, t, p) = 0{,}7\,\dot{x} + x^3 - 0{,}75 \cos t,$$

unde $p = 0{,}7$.

Se utilizează metoda delta cu $\omega = 1$.

Condiţiile iniţiale sînt : $t_0 = 0$; $x_0 = 0$ şi $y_0 = 0$.

Pasul de integrare se alege $\Delta t_i = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$s, iar pasul de afişare se alege $\Delta t_a = 0{,}25$ s.

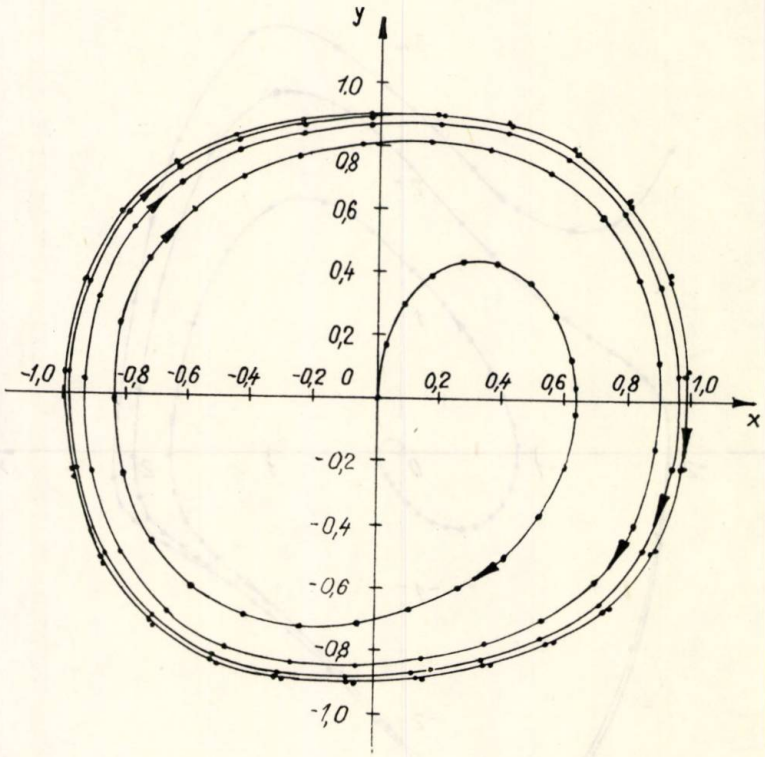


Fig. 5. — Traiectoria de fază corespunzătoare ecuaţiei lui Duffing (caz particular).

Rezultatele sînt prezentate în figura 5 pe baza datelor numerice, punctele plasîndu-se bine pe ciclul limită.

c. Se consideră circuitul electric LRC în serie prezentat în figura 6, a cărui ecuație este [1]

$$n\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} = E,$$

unde

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$$

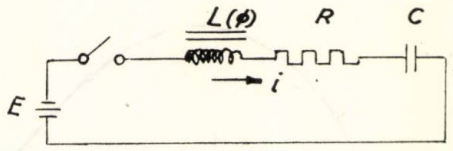


Fig. 6. — Circuit electric LRC în serie.

iar ecuația de saturație a miezului este

$$\Phi = c_1\, ni + c_2\, \mathrm{tgh}\ (ni).$$

În acest caz ca parametru p se alege tensiunea E.

Valorile numerice luate în calcul sînt : $n = 1$; $R = 0{,}2\ \Omega$; $C = 2{,}5\mu F$; $E = 1\mathrm{V}$; $c_1 = 0{,}08$; $c_2 = 0{,}4$.

Ecuația diferențială este prin urmare

$$\ddot{q} + \frac{0{,}5\,\dot{q} + q - 2{,}5}{1{,}2 - \mathrm{tgh}^2\,(\dot{q})} = 0.$$

Condițiile inițiale sînt $t_0 = 0$; $q_0 = 0$; $i_0 = 0$.

Se utilizează metoda delta cu $\omega = 1$.

Pasul de integrare se alege $\Delta t_i = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ s, iar pasul de afișare $\Delta t_a = 0{,}25$ s.

Rezultatele sînt prezentate în figura 7, pe baza datelor numerice, alegîndu-se timpul final $t_f = 10$ s.

d. Se consideră suspensia unui autocamion, studiată în lucrarea [5] p. 149 ș.u., a cărui caracteristică $f(v)$ poate fi reprezentată pe porțiuni prin două segmente liniare și patru arce parabolice.

Ecuația de mișcare este

$$\ddot{x} + a\dot{x}^2 + 2\,h\dot{x} + b + \omega^2 x = 0,$$

unde pentru $v \in (-\infty, -30)$ corespund $h = 0\ \mathrm{s}^{-1}$; $a = -0{,}004\ \mathrm{cm}^{-1}$; $b = -68{,}4$ cm/s ; pentru $v \in (-30, -10)$ corespund $h = 0$; $a = 0{,}080$;

$b = 0$; pentru $v \in (-10,0)$ corespund $h = 0,4$; $a = 0$; $b = 0$; pentru $v \in (0,10)$ corespund $h = 2,0$; $a = 0$; $b = 0$; pentru $v \in (10,30)$ corespund $h = 0$; $a = 0,400$; $b = 0$; pentru $v \in (30, \infty)$ corespund $h = 0$; $a = 0,020$; $b = 342,0$.

Datele inițiale sînt $t_0 = 0$; $x_0 = -10,0$ cm; $v_0 = 0$.

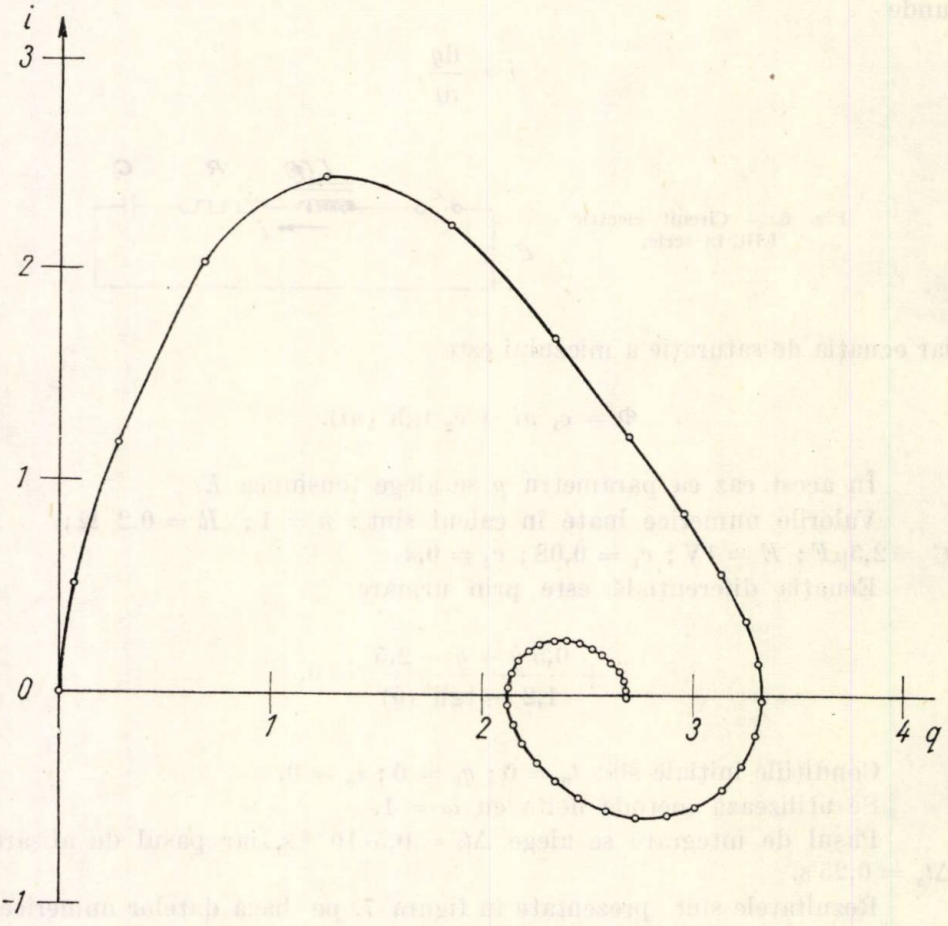


Fig. 7. — Traiectoria de fază corespunzătoare circuitului electric din figura 6.

Se utilizează metoda delta cu $\omega = 1$.

Pasul de integrare se alege $\Delta t_i = 0,1 \cdot 10^{-3}$ s, iar pasul de afișare se alege $\Delta t_a = 0,25 \cdot 10^{-1}$ s.

Rezultatele sînt prezentate în figura 8 pe baza datelor numerice, timpul final ales fiind $t_f = 1,8$ s. În aceeași figură mai sînt trecute prin puncte marcate diferit față de cele de pe curbă, rezultatele din lucrarea [5]. De asemenea se obține o bună concordanță în ceea ce privește durata intervalelor.

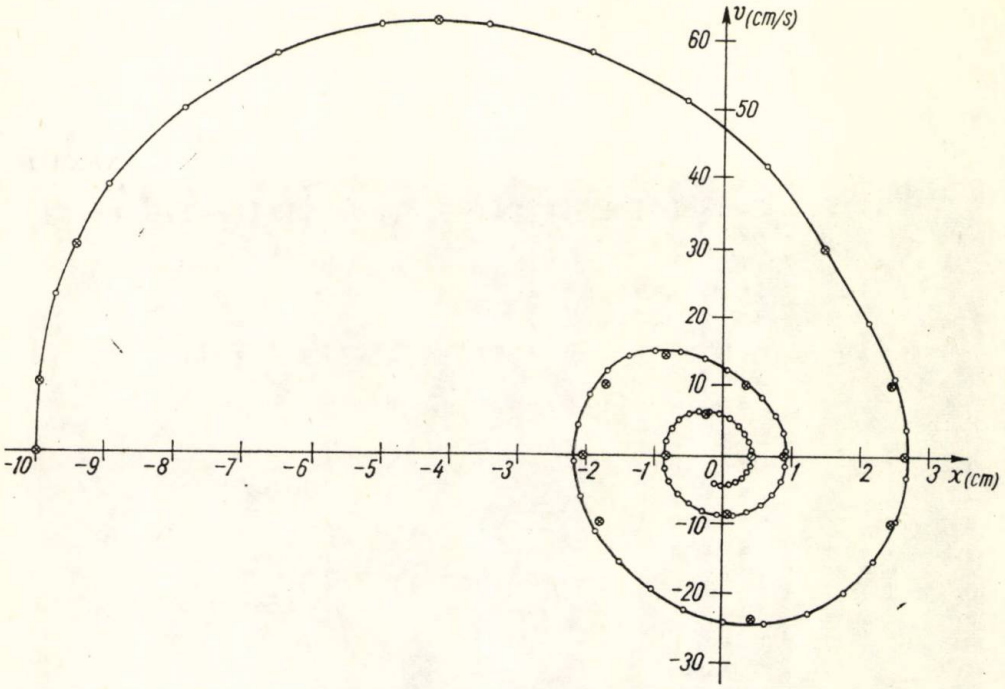


Fig. 8. — Traiectoria de fază corespunzătoare suspensiei unui autocamion cu caracteristica neliniară pe porțiuni. Punctele figurate diferit corespund rezultatelor din lucrarea [5].

5. CONCLUZII

O concluzie cu caracter general ce se desprinde este aceea că unele dintre metodele aproximative grafice sau grafo-analitice utilizate în mecanica aplicată pot fi reconsiderate și pe baza aceloraşi ipoteze și a unor algoritmuri de calcul analoge se pot elabora metode de calcul numerice specifice calculatorului numeric.

Metodele numerice oferă posibilitatea atingerii unor precizii mai ridicate decît corespondentele lor grafice sau grafo-analitice. Exemplu în acest sens îl oferă metoda delta, care în variantă grafică este limitată de posibilitățile practice de măsurare a unghiului θ.

Utilizarea unor echipamente periferice ale calculatoarelor destinate trasării curbelor (Display sau Plotter), oferă un avantaj în plus față de metodele clasice.

Variantele numerice ale metodelor izoclinelor și delta conduc la programe de calcul simple în comparație cu alte metode aproximative de integrare ca metodele Runge-Kutta și în consecință își dovedesc eficiența.

În ceea ce privește utilizarea metodelor prezentate în lucrarea de față, se alege una dintre ele în funcție de particularitățile ecuației de in-

ANEXA 1

```
      SUBROUTINE RKUCL(XO,YO,X1,Y1,TO,T1,DT,P,F)
      X=XO
      Y=YO
   11 IF(Y.NE.0)GO TO 1
      PRINT 10,X
   10 FORMAT(1X,'PI= X=',E12.8,1X,'Y=0')
      STOP
    1 Q=-F(X,Y,T,P)/Y
      DX=Y*DT
      DY=Q*DX
      X=X+DX
      Y=Y+DY
      T=T+DT
      IF(T.LT.T1-DT/2)GO TO 11
      X1=X
      Y1=Y
      RETURN
      END
```

ANEXA 2

```
      SUBROUTINE DELTA(XO,YO,X1,Y1,R,B,TO,T1,DT,P,F)
      X=XO
      Y=YO
      T=TO
    1 DLTA=F(X,B*Y,T,P)/B**2-X
      DX=B*Y*DT
      DY=-(X+DLTA)*B*DT
      X=X+DX
      Y=Y+DY
      T=T+DT
      IF(T.LT.T1-DT/2)GO TO 1
      X1=X
      Y1=Y
      R=SQRT((X1-XO)**2+(Y1-YO)**2)/B/(T1-TO)
      RETURN
      END
```

tegrat. Ca exemplu, în metoda izoclinelor trebuie evitate (prin artificii de programare) punctele care au $y = 0$, ceea ce nu se poate face însă cînd $y_0 = 0$ și se recomandă utilizarea metodei delta în aceste cazuri.

Primită la redacție la 26 martie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. C. Hayashi, *Nonlinear oscillations in physical systems*, Mc. Graw-Hill Book Comp., New York, 1964.
2. M. Rădoi, E. Deciu, D. Voiculescu, *Elemente de vibrații mecanice*, Edit. tehnică, București, 1973.
3. P. Dimo, *Programarea în FORTRAN*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
4. C. Harris, C. Crede, *Șocuri și vibrații*, vol. 1, Edit. tehnică, București, 1968.
5. F. Dincă, C. Teodosiu, *Vibrații neliniare și aleatoare*, Edit. Academiei R. S. R., București, 1969.

INFLUENȚA ELASTICITĂȚII PNEULUI ASUPRA MANIABILITĂȚII AUTOMOBILELOR CU SUSPENSIE INDEPENDENTĂ

de CH. VASILIU, E. NEGRUȘ

Institutul Politehnic București

Deformarea organelor elastice ale suspensiilor influențează mecanica interacțiunii dintre pneu și calea de rulare.
Modelarea matematică a conlucrării mecanismului de suspensie independentă de la roțile directoare cu pneul elastic, dă posibilitatea folosirii calculatoarelor la determinarea forțelor și momentelor ce iau parte la echilibrul dinamic al sistemului.
Aceasta permite și rezolvarea problemelor privind parametrii constructivi și de rezistență ai suspensiei automobilului.

Forțele și momentul, care iau naștere în pata de contact dintre pneul elastic și calea de rulare, în timpul mișcării automobilului, sînt influențate, în mare măsură, de cinematica mecanismului de suspensie, deoarece în timpul deformării organelor elastice ale suspensiei, unghiul de derivă se modifică, ca urmare a variației unghiului de înclinare transversală a roții.

Complexitatea fenomenului de conlucrare dintre pneul elastic și suspensia automobilului, cu reflex asupra relațiilor matematice care exprimă ecuațiile de echilibru dinamic, îngreunează metoda clasică de determinare a forțelor și momentelor respective.

Modelînd matematic comportarea suspensiei independente a roților directoare și conlucrarea acesteia cu pneul elastic se creează posibilitatea folosirii calculatoarelor pentru rezolvarea sistemelor de ecuații, respectiv pentru aprecierea maniabilității automobilelor, prevăzute cu aceste tipuri de suspensie.

1. ANALIZA FENOMENOLOGICĂ A CONLUCRĂRII PNEULUI CU SUSPENSIA AUTOMOBILULUI

Influența tipului de suspensie asupra forțelor și momentului din pata de contact dintre pneu și cale se manifestă prin modificarea unghiului de derivă, ca urmare a variației unghiului de înclinare transversală a roții, în timpul mișcării automobilului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 1, 1975., P. 131–145

În timpul rulării, din cauza înclinării transversale, roata are tendința să se deplaseze pe o traiectorie circulară cu centrul în O_1 (fig. 1). Elementele roții în contact cu calea vor rula avînd raze de rulare diferite ($R_2 > R_1$).

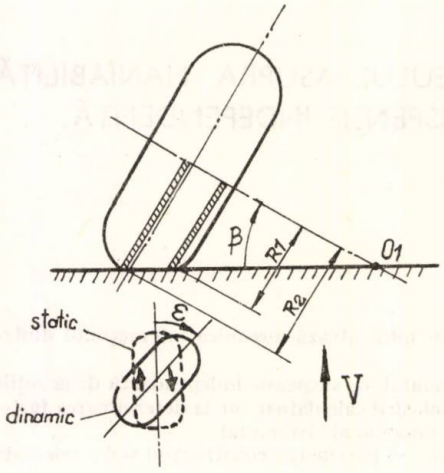


Fig. 1

Schemele celor mai uzitate tipuri de suspensie întîlnite în construcția automobilelor sînt reprezentate în figura 2. După cum se observă, variația înclinării transversale, atunci cînd în centrul de greutate al automobilului acționează o forță transversală F_y, este influențată direct de tipul mecanismului de suspensie al automobilului. Astfel, suspensia cu osie rigidă (fig. 2*a*) practic nu produce variația unghiului de cădere al roților ; suspensia independentă cu brațe oscilante longitudinale (fig. 2*b*) și suspensia cu mecanism patrulater (fig. 2, *c*) produc modificarea unghiului de cădere, în același sens cu sensul de acționare al forței transversale, iar suspensia independentă cu braț oscilant transversal (fig. 2*d*) produce modificarea unghiului de cădere în sens invers sensului de acționare al forței. Din această cauză elementele cu raza de rulare mai mare (R_2) vor suferi o deformație în sensul deplasării automobilului, iar cele din dreapta, în sens invers. Momentul, care ia astfel naștere la suprafața de contact, va roti linia mediană a urmei pneului pe cale cu unghiul ε față de planul roții, astfel încît roata nu se va mai deplasa în planul simetric ci într-un plan înclinat față de acesta [1]. Rezultă deci, că înclinarea transversală a roții generează un unghi de derivă ε, orientat spre partea înclinării.

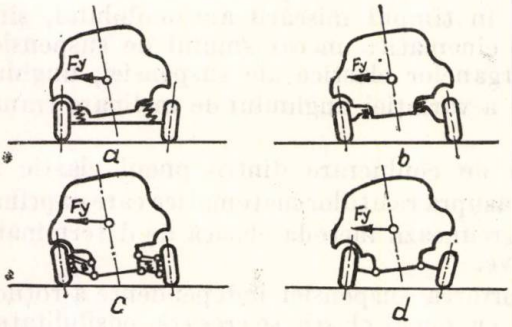


Fig. 2

Se constată — astfel — cu ușurință că, alegînd corespunzător schema suspensiei pentru roțile din față și din spate, se poate modifica convenabil raportul dintre unghiurile de derivă ε_f și ε_s astfel încît automobilul să aibă calități de virare dorite : virare insuficientă, virare neutră sau virare în exces [1].

Pentru a analiza influența tipului de suspensie asupra variației unghiurilor de deviere laterală a osiilor automobilului-respectiv asupra maniabilității acestuia — este necesar să se stabilească în ce sens se înclină

roțile, în cazul apariției unei forțe transversale, pentru diferite scheme cinematice ale suspensiei roților automobilului.

În figura 3 este reprezentată schematic influența a trei tipuri de suspensie a roților din față și din spate, cu mecanism patrulater transversal, asupra înclinării roților respective.

În situația în care automobilul este prevăzut la puntea din spate cu suspensie cu ghidare paralelă a roților (fig. 3*a*), calitatea de „virare insuficientă" va apare numai în situația în care variația unghiului de înclinare transversală a roților din spate va fi mai redusă decît cea a roților din față (încărcare verticală mai mare a roților din față, presiune mai mare a aerului la pneurile din spate etc.).

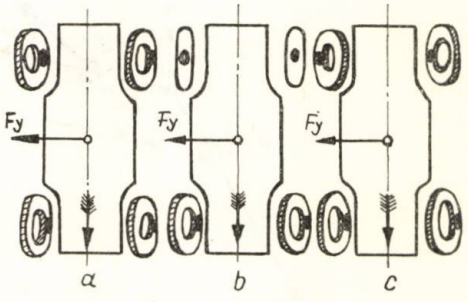


Fig. 3

În cazurile prezentate în figura 3, *b* (cu osie rigidă) și figura 3 *c*, (cu un singur braț transversal) calitatea de „virare insuficientă" a automobilului se păstrează pentru orice valoare a forței transversale F_y, deoarece unghiul de derivă al roților directoare crește odată cu creșterea valorii forței transversale, iar unghiul de derivă al roților din spate rămîne constant (cazul suspensiei cu osie rigidă) sau se micșorează (cazul suspensiei independente, cu braț transversal).

Se conclude, deci, că forțele și momentele care se produc în pata de contact dintre pneu și cale sînt influențate în mare măsură de cinematica mecanismului de suspensie, deoarece, în timpul deformării suspensiei, unghiul de derivă se modifică ca urmare a variației unghiului de înclinare transversală a roții.

2. MODELAREA MATEMATICĂ A COMPORTĂRII SUSPENSIEI INDEPENDENTE DE LA ROȚILE DIRECTOARE

Pentru a ilustra conlucrarea pneului elastic cu suspensia s-a ales una din construcțiile mai frecvent utilizate pentru suspensia roților de direcție și anume suspensia cu mecanism patrulater transversal, a cărui schemă este reprezentată în figurile 2*c*; 3*a* și 5.

Scrierea ecuațiilor de mișcare pentru fiecare element în parte s-a făcut pe baza analizei nodale a mecanismului. Astfel, dacă se consideră un mecanism desmodrom plan care se mișcă în sistemul de coordonate XOY (fig. 4), pentru fiecare element în parte se pot scrie două ecuații de legături geometrice și trei ecuații de echilibru. Notînd cu

x_1, y_1, — coordonatele centrului de masă al elementului i;

θ_i — unghiul dintre direcția elementului și axa de coordonate OX;

L_{1i}, L_{2i} — distanțele de la centrul de masă pînă la articulațiile elementului,

ecuațiile de legături geometrice sînt :

$$x_i + L_{1i} \cdot \cos \theta_i - x_{i+1} + L_{2i+1} \cdot \cos \theta_{i+1} = 0 ,$$
$$y_i + L_{1i} \cdot \sin \theta_i - y_{i+1} + L_{2i+1} \cdot \sin \theta_{i+1} = 0 .$$

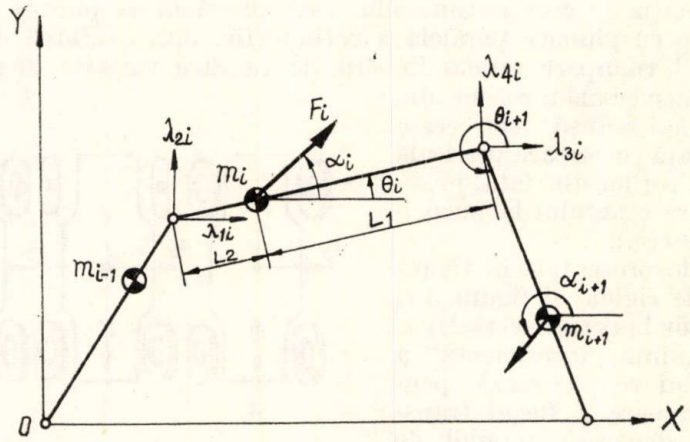


Fig. 4

Ecuațiile de echilibru pentru același element sînt :

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = F_i \cdot \cos \alpha_i + \lambda_{1i} - \lambda_{3i} ,$$
$$m_i \cdot \ddot{y}_i = F_i \cdot \sin \alpha_i + \lambda_{2i} - \lambda_{4i} ,$$
$$J_i \ddot{\theta}_i = \lambda_{1i} \cdot L_{2i} \cdot \sin \theta_i - \lambda_{2i} \cdot L_{2i} L \cdot \cos \theta_i + \lambda_{3i} \cdot L_{1i} \cdot \sin \theta_i -$$
$$- \lambda_{4i} \cdot L_{1i} \cdot \cos \theta_i ,$$

în care

F_i este forța exterioară care acționează în centrul de masă al elementului,

α_i — unghiul pe care forța F_i îl face cu axa absciselor,

λ_{1i}, λ_{3i} — componentele orizontale ale forțelor din articulații,

λ_{2i}, λ_{4i} — componentele verticale ale forțelor din articulații,

J_i — momentul de inerție al elementului în raport cu centrul de masă.

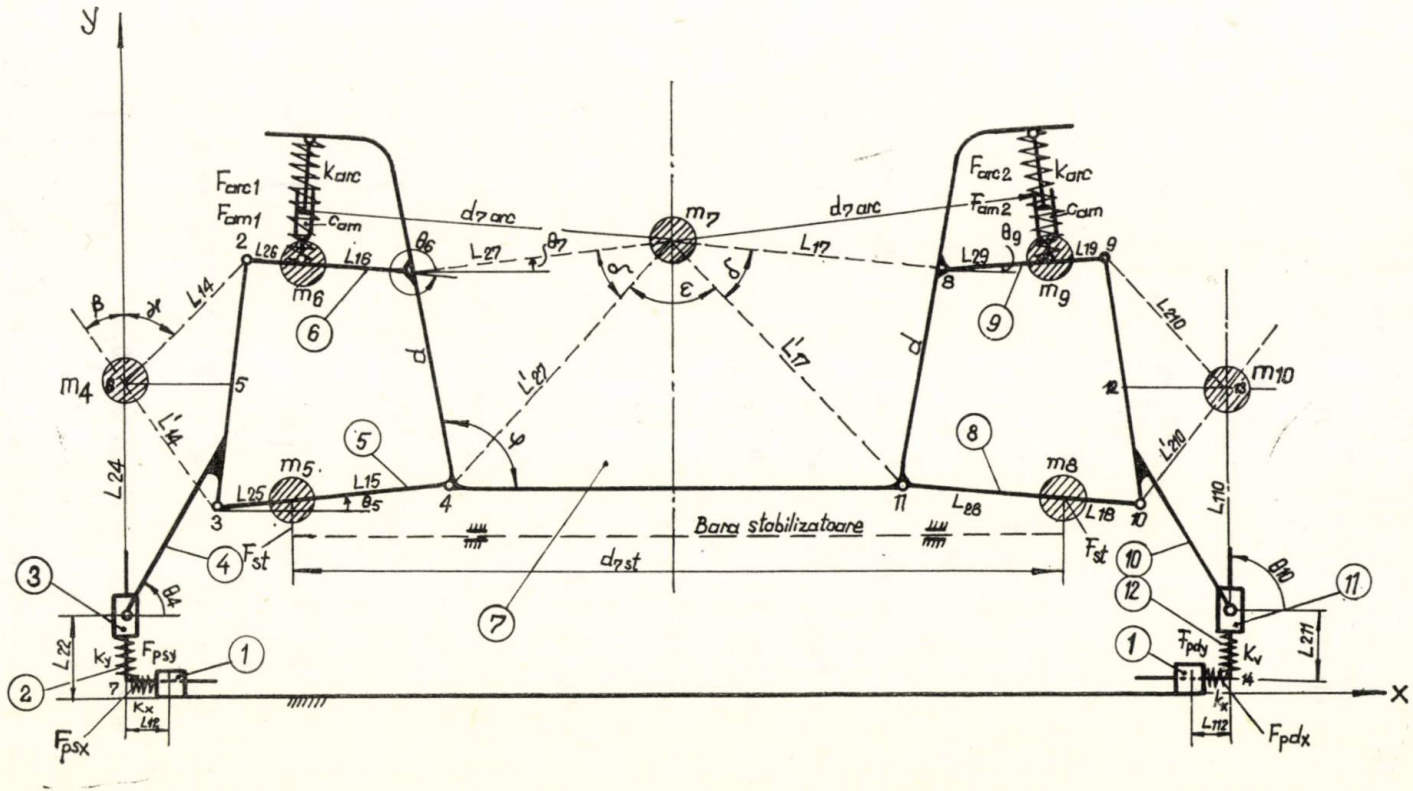
Scrierea ecuațiilor de echilibru pentru ansamblul roți-suspensie independentă s-a făcut introducînd următoarele ipoteze simplificatoare :

— s-a neglijat frecarea din articulațiile brațelor suspensiei ;

— rigiditatea verticală și rigiditatea transversală a pneului s-au considerat constante, în zona deformațiilor mici ;

— forța din articulația dintre bara de torsiune și brațul inferior al suspensiei s-a considerat fiind proporțională cu diferența dintre deplasările unghiulare ale brațelor inferioare ale suspensiei din partea dreaptă și stîngă.

Aplicînd metoda analizei nodale pentru fiecare element al mecanismului, folosind notațiile din figura 5. și înlocuind $\lambda_{3i} = -\lambda_{1i+1}$, res-


y
x
Bara stabilizatoare
d_{7st}
d_{7arc}
F_{arc1}
F_{am1}
F_{arc2}
F_{am2}
k_{arc}
c_{am}
m_4
m_5
m_6
m_7
m_8
m_9
m_{10}
F_{st}
F_{psy}
F_{psx}
F_{pdy}
F_{pdx}
k_y
k_x
k_v
L_{14}
L_{24}
L_{22}
L_{12}
L_{26}
L_{16}
L_{27}
L_{17}
L_{29}
L_{19}
L_{25}
L_{15}
L_{28}
L_{18}
L_{210}
L_{110}
L_{211}
L_{112}
L_{14}'
L_{27}'
L_{17}'
L_{210}'
θ_4
θ_5
θ_6
θ_7
θ_9
θ_{10}
β
γ
δ
ε
φ
d
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Fig, 5

pectiv $\lambda_{4i} = -\lambda_{2i+1}$, rezultă sistemul de ecuații diferențiale și de legături geometrice al modelului matematic al mecanismului suspensiei independente reprezentat în această figură.

— Ecuații diferențiale sînt următoarele :

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = F_{psx} \cdot \cos\theta_2 + \lambda_{13},$$

$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = F_{psy} \cdot \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda_{22},$$

$$m_3 \cdot \ddot{x}_3 = \lambda_{13} + \lambda_{14},$$

$$m_3 \cdot \ddot{y}_3 = F_{psy} \cdot \sin\theta_3 + \lambda_{24},$$

$$m_4 \cdot \ddot{x}_4 = \lambda_{14} + \lambda_{16} + \lambda_{15},$$

$$m_4 \cdot \ddot{y}_4 = \lambda_{24} + \lambda_{26} + \lambda_{25} - m_4 \cdot g,$$

$$J_4 \cdot \ddot{\theta}_4 = \lambda_{14} \cdot L_{24} \cdot \sin\theta_4 - \lambda_{24} \cdot L_{24} \cdot \cos\theta_4 - \lambda_{16} \cdot L_{14} \cdot \sin(\theta_4 - \gamma) +$$

$$\lambda_{26} \cdot L_{14} \cdot \cos(\theta_4 - \gamma) - \lambda_{15} \cdot L'_{14} \cdot \sin(\theta_4 + \beta + \pi) + \lambda_{25} \cdot L'_{14} \cdot \cos(\theta_4 + \beta + \pi),$$

$$m_5 \cdot \ddot{x} = F_{st} \cdot \cos\left(\theta_7 + \frac{\varepsilon - \pi}{2}\right) + \lambda_{15} + \lambda'_{17},$$

$$m_5 \cdot \ddot{y}_5 = F_{st} \cdot \sin\left(\theta_7 + \frac{\varepsilon - \pi}{2}\right) + \lambda_{25} + \lambda'_{27},$$

$$J_5 \cdot \ddot{\theta}_5 = \lambda_{15} \cdot L_{25} \cdot \sin\theta_5 - \lambda_{25} \cdot L_{25} \cdot \cos\theta_5 - \lambda'_{17} \cdot L_{15} \cdot \sin\theta_5 + \lambda'_{27} \cdot L_{15} \cdot \cos\theta_5,$$

$$m_6 \cdot \ddot{x}_6 = (F_{am1} - F_{arc1}) \cdot \cos\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{71} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \lambda_{16} + \lambda_{17},$$

$$m_6 \cdot \ddot{y}_6 = (F_{am1} - F_{arc1}) \cdot \sin\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{71} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \lambda_{26} + \lambda_{27},$$

$$J_6 \cdot \ddot{\theta}_6 = \lambda_{16} \cdot L_{26} \cdot \sin\theta_6 - \lambda_{26} \cdot L_{26} \cdot \cos\theta_6 - \lambda_{17} \cdot L_{16} \cdot \sin\theta_6 + \lambda_{27} \cdot L_{16} \cdot \cos\theta_6,$$

$$m_7 \cdot \ddot{x}_7 = (F_{arc1} - F_{am1}) \cdot \cos\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{71} + \frac{\varepsilon}{2}\right) +$$

$$+ (F_{arc2} - F_{am2}) \cdot \cos\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{72} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + F_c + \lambda_{17} + \lambda_{19} + \lambda'_{17} + \lambda_{18},$$

$$m_7 \cdot \ddot{y}_7 = (F_{ar\,1} - F_{am1}) \cdot \sin\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{71} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + (F_{arc2} - F_{am2}) \cdot \sin$$

$$\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{72} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - m_7 \cdot g + \lambda_{27} + \lambda_{29} + \lambda'_{27} + \lambda_{28},$$

$$J_7 \cdot \ddot{\theta}_7 = \lambda_{17} \cdot L_{27} \cdot \sin\,\theta_7 + \lambda'_{17} \cdot L'_{27} \cdot \sin(\theta_7 + \delta) - \lambda_{27} \cdot L_{27} \cdot \cos\theta_7 -$$

$$- \lambda'_{27} \cdot L'_{27} \cdot \cos(\theta_7 + \delta) - \lambda_{19} \cdot L_{17} \cdot \sin(\theta_7 + \pi + 2\,\delta + \varepsilon) - \lambda_{18} \cdot L'_{17} \cdot \sin(\theta_7 +$$

$$+ \pi + \delta + \varepsilon) + \lambda_{29} \cdot L_{17} \cdot \cos(\theta_7 + \pi + 2\delta + \varepsilon) + \lambda_{28} \cdot L'_{17} \cdot \cos(\theta_7 + \pi +$$

$$+ \delta + \varepsilon) - (F_{arc1} - F_{arc2} - F_{am1} - F_{am2}) \cdot d_{7ar} - F_{st} \cdot d_{7st}$$

$$m_8 \cdot \ddot{x}_8 = F_{st} \cdot \cos\left(\theta_7 + \frac{\varepsilon + \pi}{2}\right) + \lambda_{18} + \lambda'_{110},$$

$$m_8 \cdot \ddot{y}_8 = F_{st} \cdot \sin\left(\theta_7 + \frac{\varepsilon + \pi}{2}\right) + \lambda_{28} + \lambda'_{210},$$

$$J_8 \cdot \ddot{\theta}_8 = \lambda_{18} \cdot L_{28} \cdot \sin\theta_8 - \lambda_{28} \cdot L_{28} \cdot \cos\theta_8 - \lambda'_{110} \cdot L_{18} \cdot \sin\theta_8 + \lambda'_{210} L_{18} \cdot \cos\theta_8,$$

$$m_9 \cdot \ddot{x}_9 = (F_{arc2} + F_{am2}) \cdot \cos,\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{72} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \lambda_{19} + \lambda_{110},$$

$$m_9 \cdot \ddot{y}_9 = (F_{arc2} + F_{am2}) \cdot \sin\left(\theta_7 - \pi + \alpha_{72} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \lambda_{29} + \lambda_{210},$$

$$J_9 \cdot \ddot{\theta}_9 = \lambda_{19} \cdot L_{29} \cdot \sin\theta_9 - \lambda_{29} \cdot L_{29} \cdot \cos\theta_9 - \lambda_{110} \cdot L_{19} \cdot \sin\theta_9 + \lambda_{210} \cdot L_{19} \cdot \cos\theta_9,$$

$$m_{10} \cdot \ddot{x}_{10} = \lambda_{110} + \lambda'_{110} + \lambda_{111},$$

$$m_{10} \cdot \ddot{y}_{10} = \lambda_{210} + \lambda'_{210} + \lambda_{211} - m_{10} \cdot g,$$

$$J_{10} \cdot \ddot{\theta}_{10} = \lambda_{110} \cdot L_{210} \cdot \sin(\theta_{10} + \gamma + \pi) - \lambda_{210} \cdot L_{210} \cdot \cos(\theta_{10} + \gamma + \pi) +$$

$$+ \lambda'_{110} \cdot L'_{210} \cdot \sin(\theta_{10} - \beta) + \lambda'_{210} \cdot L'_{210} \cdot \cos(\theta_{10} - \beta) -$$

$$- \lambda_{111} \cdot L_{11c} \cdot \sin\theta_{10} + \lambda_{211} \cdot L_{110} \cdot \cos\theta_{10}$$

$$m_{11} \cdot \ddot{x}_{11} = \lambda_{111} + \lambda_{112} ,$$

$$m_{11} \cdot \ddot{y}_{11} = F_{pdy} \cdot \sin \theta_{11} + \lambda_{211} ,$$

$$m_{12} \cdot \ddot{x}_{12} = F_{pdx} \cdot \cos \left(\theta_{12} - \frac{\pi}{2} \right) + \lambda_{112} ,$$

$$m_{12} \cdot \ddot{y}_{12} = F_{pdy} \cdot \sin \theta_{12} + \lambda_{21} .$$

Ecuații de legături geometrice sînt următoarele :

$$y_1 - y_2 = 0 ,$$

$$x_2 - x_3 = 0 ,$$

$$x_3 - x_4 + L_{24} \cdot \cos \theta_4 = 0 ,$$

$$y_3 - y_4 + L_{24} \cdot \sin \theta_4 = 0 ,$$

$$x_4 + L_{14} \cdot \cos (\theta_4 - \gamma) - x_6 + L_{26} \cdot \cos \theta_6 = 0 ,$$

$$y_4 + L_{14} \cdot \sin (\theta_4 - \gamma) - y_6 + L_{26} \cdot \sin \theta_6 = 0 ,$$

$$x_4 + L_{14} \cdot \cos (\theta_4 + \beta + \pi) - x_5 + L_{25} \cdot \cos \theta_5 = 0 ,$$

$$y_4 + L'_{14} \cdot \sin (\theta_4 + \beta + \pi) - y_5 + L_{25} \cdot \sin \theta_5 = 0 ,$$

$$x_5 + L_{15} \cdot \cos \theta_5 - x_7 + L'_{27} \cdot \cos (\theta_7 + \delta) = 0 ,$$

$$y_5 + L_{15} \cdot \sin \theta_5 - y_7 + L'_{27} \cdot \sin (\theta_7 + \delta) = 0,$$

$$x_6 + L_{16} \cdot \cos \theta_6 - x_7 + L_{27} \cdot \cos \theta_7 = 0 ,$$

$$y_6 + L_{16} \cdot \sin \theta_6 - y_7 + L_{27} \cdot \sin \theta_7 = 0 ,$$

$$x_7 + L'_{17} \cdot \cos (\theta_7 + \pi + \varepsilon + \delta) - x_8 + L_{28} \cdot \cos \theta_8 = 0 ,$$

$$y_7 + L'_{17} \cdot \sin (\theta_7 + \pi + \varepsilon + \delta) - y_8 + L_{28} \cdot \sin \theta_8 = 0,$$

$$x_7 + L_{17} \cdot \cos (\theta_7 + \pi + 2\delta + \varepsilon) - x_9 + L_{29} \cdot \cos \theta_9 = 0,$$

$$y_7 + L_{17} \cdot \sin (\theta_7 + \pi + 2\delta + \varepsilon) - y_9 + L_{29} \cdot \sin \theta_9 = 0 ,$$

$$x_8 + L_{18} \cdot \cos \theta_8 - x_{10} + L'_{210} \cdot \cos (\theta_{10} - \beta) = 0 ,$$

$$y_8 + L_{18} \cdot \sin \vartheta_8 - y_{10} + L'_{210} \cdot \sin (\theta_{10} - \beta) = 0 ,$$

$$x_9 + L_{19} \cdot \cos \theta_9 - x_{10} + L_{210} \cdot \cos (\theta_{10} + \pi + \gamma) = 0,$$

$$y_9 + L_{19} \cdot \sin \vartheta_9 - y_{10} + L_{210} \cdot \sin (\theta_{10} + \pi + \gamma) = 0 ,$$

$$x_{10} + L_{110} \cdot \cos (\theta_{10} + \pi) - x_{11} = 0 ,$$

$$y_{10} + L_{110} \cdot \sin (\theta_{10} + \pi) - y_{11} = 0 ,$$

$$x_{11} - x_{12} = 0 ,$$

$$y_{12} - y_1 = 0 .$$

Forțele exterioare, care acționează asupra elementelor mecanismului, sînt exprimate cu ajutorul relațiilor de mai jos:

a. Forțele dintre pneu și cale:

$$F_{psx} = k_x \cdot x_2 ,$$

$$F_{psy} = k_y \cdot (H_0 - y_3),$$

$$F_{pdx} = k_x \cdot (x_{12} - A_{mp}) ,$$

$$F_{pdy} = k_y \cdot (H_0 - y_{11}) .$$

b. Forțele din arcurile suspensiei:

$$F_{arc1} = k_{arc} \cdot [l_0 - \sqrt{d^2 + L_{16}^2 - 2d \cdot L_{16} \cdot \cos (\theta_6 - \theta_7 - \pi - \varphi)}] ,$$

$$F_{arc2} = k_{arc} \cdot [l_0 - \sqrt{d^2 + L_{29} - 2d \cdot L_{29} \cdot \cos (\theta_7 - \theta_9 + \varepsilon + 2\delta - \varphi)}] .$$

c. Forțele din amortizoare:

$$F_{am1} = \frac{c_{am} \cdot d \cdot L_{16} \cdot \sin (\theta_6 - \theta_7 - \pi - \varphi)}{\sqrt{d^2 + L_{16}^2 - 2d \cdot L_{16} \cdot \cos (\theta_6 - \theta_7 - \pi - \varphi)}} \cdot (\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_7),$$

$$F_{am2} = \frac{c_{am} \cdot d \cdot L_{29} \cdot \sin (\theta_7 - \theta_9 + \varepsilon + 2\delta - \varphi)}{\sqrt{d^2 + L_{29}^2 - 2d \cdot L_{29} \cdot \cos (\theta_7 - \theta_9 + \varepsilon + 2\delta + \varphi)}} \cdot (\dot{\theta}_7 - \dot{\theta}_9).$$

d. Forța care acționează în punctele de articulație dintre bara stabilizatoare și brațele inferioare ale suspensiei:

$$F_{st} = K_{st} \cdot \left[L_{28} \cdot \sin \left(\theta_8 - \theta_7 - \delta + \frac{\pi - \varepsilon}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - L_{15} \cdot \sin \left(\theta_5 - \theta_7 - \delta + \frac{3\pi - \varepsilon}{2} \right) \right] .$$

3. MODELAREA PE CALCULATORUL ELECTRONIC NUMERIC A CONLUCRĂRII ROȚILOR DIRECTOARE CU PNEUL ELASTIC, LA SUSPENSIA INDEPENDENTĂ

Rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale și de legături geometrice se poate face utilizînd procedeul cu matrice neuniformă și algoritmul de integrare numerică Gear [2].

În cele ce urmează, considerăm util a face o sumară prezentare a metodei de integrare numerică a ecuațiilor generale de mișcare ale unui sistem mecanic. Astfel, ecuațiile generale de mișcare pentru un sistem mecanic oarecare pot fi scrise într-un mod concis utilizînd forma tensorială [3], [4]:

$$\sum_{\beta=1}^{k} y_{\beta j} \ddot{q}_j - \left[Q_j - \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{k} (\alpha_j \cdot \beta) \cdot \dot{q}_\alpha \cdot \dot{q}_\beta \right] = 0 , \tag{1}$$

$$(\alpha_j \cdot \beta_j) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial y_{\alpha j}}{\partial q_\beta} + \frac{\partial y_{j\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial q_j} \right], \tag{2}$$

$$y_{\alpha j} = y_{\alpha j}(q_1, \ldots, q_k). \tag{3}$$

Ecuațiile de mai sus sînt valabile pentru orice sistem de coordonate generalizate. Termenul $(\alpha_i\ \beta)$ reprezintă simbolul lui Cristophel de ordinul întîi și depinde în general de coordonatele generalizate $(q_1 \ldots\ldots q_k)$. Termenul Q_j reprezintă vectorul forțelor neinerțiale generalizate, corespunzătoare setului de coordonate q_j.

În cazul sistemelor mecanice este dificil și uneori chiar imposibil de a exprima funcțiile $y_{\alpha\beta}$ și $[\alpha_i\ \beta]$ exclusiv prin intermediul unui set de coordonate generalizate. Pentru a elimina acest neajuns, formularea ecuațiilor se poate face utilizînd coeficienții lui Lagrange [5]. Prin aceasta se introduc însă un număr adițional de variabile independente λ_i, (coeficienții lui Lagrange) și ecuații diferențiale de constrîngere. Astfel ecuațiile (1) pot fi înlocuite prin ecuațiile (4) și (5):

$$\sum_{\beta=1}^{k} y_{\beta j} \cdot \ddot{q}_j - \left[Q_j - \sum_{\alpha}^{k} \sum_{\beta}^{k} (\alpha_j\ \beta)\ \dot{q}_\alpha \cdot \dot{q}_\beta \right] + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j} = 0 , \tag{4}$$

$$\Phi_i = 0 . \tag{5}$$

Ecuația (4) poate fi redusă la ordinul întîi, înlocuind:

$$u_j = \dot{q}_j . \tag{6}$$

Dependența funcțională a ecuațiilor (4) — (6) poate fi exprimată după cum urmează:

$$\begin{aligned} &\underline{F}\ (\dot{u}_j,\ u_j,\ q_j,\ \lambda_j,\ t) = 0 , \\ &\underline{F_2}\ (q_j) = 0 , \\ &\underline{F_1}\ (u_j\ \dot{q}_j) = 0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Ecuațiile de mai sus pot fi rezolvate prin metoda implicită de integrare „multistep", în fiecare interval de timp, pentru $u_j = u_j^{n+1}$ și $q_j = q_j^{n+1}$, utilizînd relația de corecție [4], [5]:

$$\left(\frac{K_0}{T}\cdot\frac{\partial \underline{F}}{\partial \dot{\underline{u}}}+\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{u}}\right)\Delta \underline{u} + \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{q}}\right)\cdot \Delta q + \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \lambda_i}\right)\Delta\lambda_i = 0, \tag{8}$$

în care K_0 este o constantă numerică asociată cu algoritmul de integrare Gear. Aplicînd această relație la ecuațiile (5) și (6) rezultă:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_{11} & \underset{\sim}{F}_{12} & \underset{\sim}{F}_{13} \\ \underset{\sim}{F}_{21} & \underset{\sim}{F}_{22} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underset{\sim}{F}_{32} & \underline{0} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Delta \underline{u} \\ \Delta \underline{q} \\ \Delta\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{F} \\ -\underline{F}_1 \\ -\underline{F}_2 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

în care:

$$\underset{\sim}{F}_{11} = -\frac{K_0}{T}\sum_{\beta=1}^{k} y_{\beta j} - \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\theta_j - \sum_{\alpha}^{k}\sum_{\beta}^{k}[\alpha_i\ \beta]\, u_\alpha \cdot u_\beta\right), \tag{10}$$

$$\underset{\sim}{F}_{12} = \frac{\partial \sum_{\beta=1}^{k} y_{\beta j}}{\partial q_l}\cdot \dot{u}_j - \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\theta_j - \sum_{\alpha}^{k}\sum_{\beta}^{k}[\alpha_i\ \beta]\, u_\alpha\, u_\beta - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\cdot\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}\right), \tag{11}$$

$$\underset{\sim}{F}_{32} = \underset{\sim}{F}_{13} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}, \tag{12}$$

$$F_{\underset{\sim}{21}} = -\frac{\partial u_\beta}{\partial u_l}\cdot \delta_{l\beta}, \tag{13}$$

$$F_{\underset{\sim}{22}} = \frac{K_0}{T}\underset{\sim}{I}. \tag{14}$$

Indicii l, α, β și j variază de la 1 la $6n$, n, reprezentînd numărul de elemente rigide ale mecanismului, iar $K = 6n$.

Matricea pătrată aparținînd termenului din stînga al ecuației (9) reprezintă Jacobianul sistemului.

Pentru un sistem mecanic dat, ecuația (9) se concretizează printr-un set larg de ecuații neuniform distribuite, care se pretează la o integrare numerică.

Procedeul de integrare numerică descris mai sus a fost adaptat pentru simularea pe calculator a mecanismului reprezentat în figura 5. În acest scop s-a întocmit programul pentru calculator cuprinzînd Jacobianul sistemului și subrutina de integrare. Ca date inițiale („input")

s-au introdus în calculator dimensiunile geometrice și parametrii unui autoturism „Ford" de clasă mijlocie. Caracteristicile pneurilor au fost introduse sub forma unor matrice de „input" conținînd valori obținute pe baza rulării pe calculator a modelului de pneu.

În prima fază programul a fost rulat pe calculator pentru a obține variația unghiului de cădere în funcție de deplasarea verticală a roții. Păstrînd constante coordonatele punctelor de articulație 1, 4, 8 și 11 (fig. 5) și dînd o deplasare verticală punctului de contact 7 dintre pneu și cale s-a obținut diagrama din figura 6.

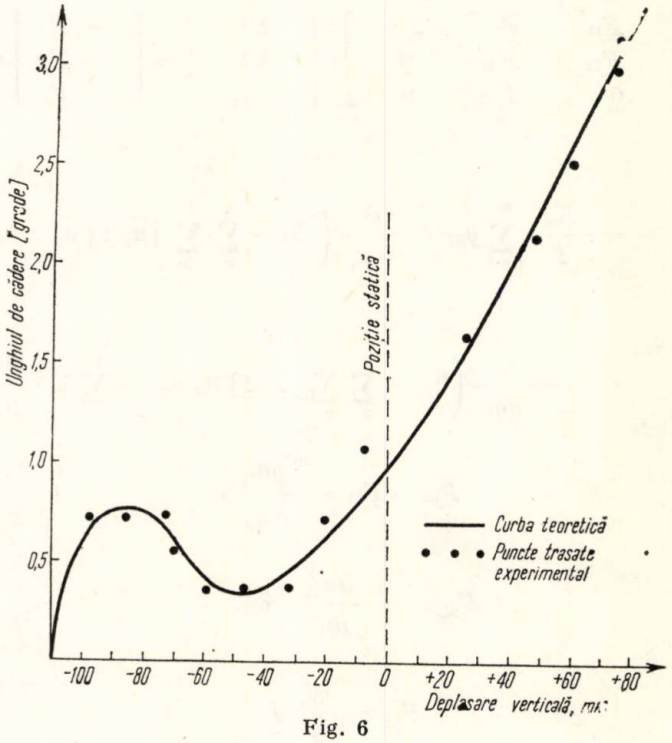


Fig. 6

Pe aceeași diagramă s-au figurat și punctele determinate experimental, rezultînd o corespondență cantitativă bună între curba teoretică și măsurătorile experimentale.

În figura 7 se prezintă graficul cu variația deplasării verticale, a vitezei centrului de greutate al masei suspendate și unghiului de ruliu al caroseriei, la trecerea roții din stînga-față peste un obstacol sinusoidal (profilul drumului : $y = A \sin \omega t$; $A = 12$ mm; $\omega = 20$ s^{-1}).

În figura 8 este trasată variația încărcării verticale la articulația brațului superior al suspensiei, în timpul trecerii roții din stînga-față peste același profil al drumului ca în figura 7.

Figurile 9 și 10 reprezintă variația acelorași elemente geometrice, cinematice și dinamice ca în figurile 7 și 8, profilul drumului avînd modificat numai unul din parametri : $\omega = 30\ s^{-1}$.

Diagramele reprezentate în figura 7 — 10 au fost obținute rulînd programul pe calculator pentru frecvența fenomenului perturbator de 3 Hz și 5 Hz. Deplasările și solicitările din piesele componente ale meca-

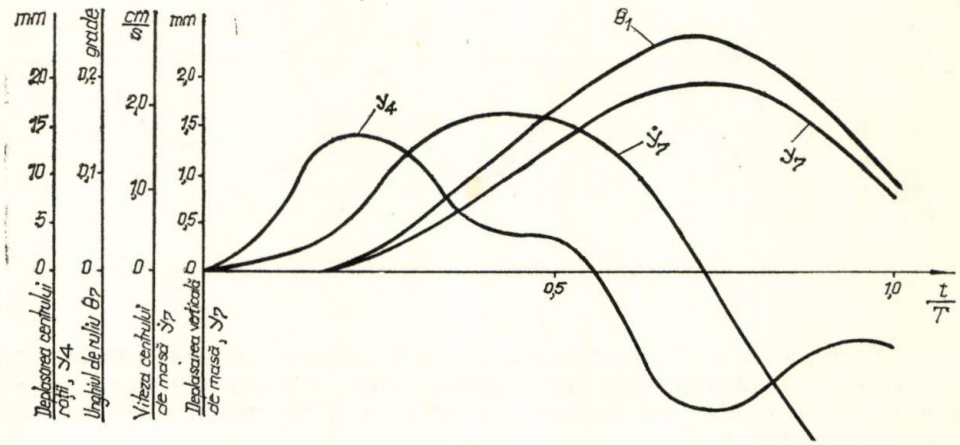


Fig. 7

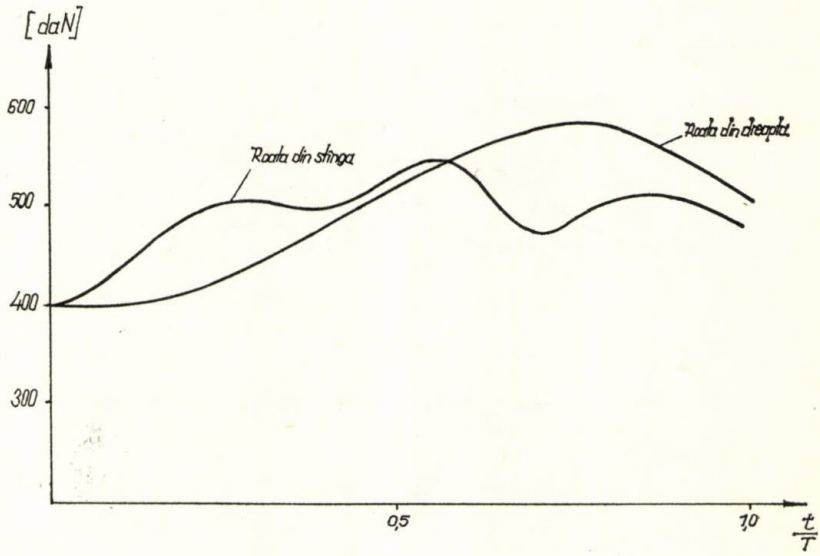


Fig. 8

nismului au fost trasate pe intervalul unui ciclu. După cum se observă, deplasarea maximă a masei suspendate și solicitările din brațul superior scad odată cu creșterea frecvenței perturbatoare de la 3 la 5 Hz.

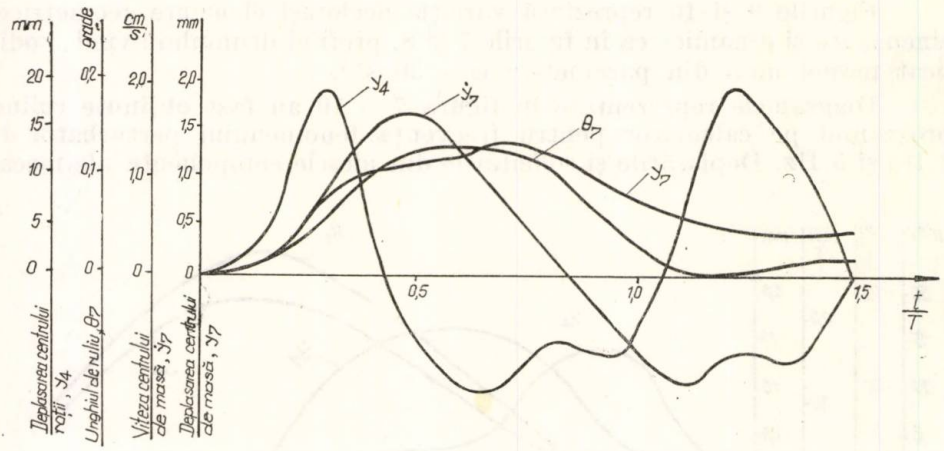


Fig. 9

Variația forței de reacțiune la brațul inferior al suspensiei urmărește destul de fidel variația unghiului de ruliu al caroseriei, iar valoarea maximă a acestei forțe scade de asemenea, atunci cînd frecvența perturbatoare crește de la 3 la 5 Hz.

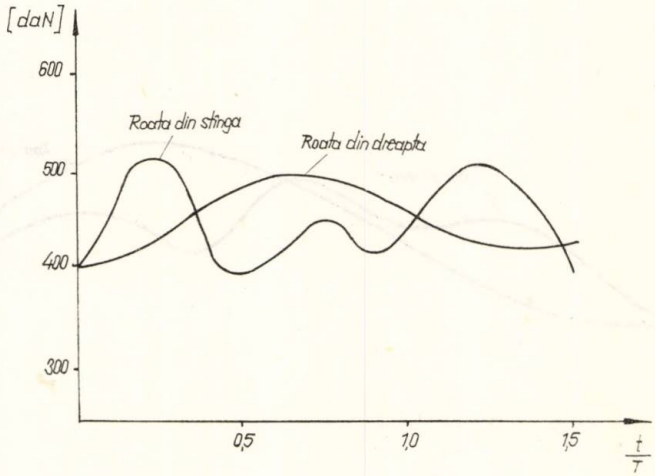


Fig. 10

4. CONCLUZII

Diagramele prezentate mai sus ilustrează numai cîteva din posibilitățile de utilizare ale modelului care simulează conlucrarea roților directoare cu suspensia independentă a automobilului. Faptul că ecuațiile care descriu

mișcarea nu au fost liniarizate face ca modelul elaborat să poată fi utilizat cu bune rezultate nu numai pentru studii calitative dar și pentru cele cantitative.

Pe lîngă analiza influenței cinematicii suspensiei asupra modificării unghiurilor de înclinare a roților de direcție în plan transversal, modelul elaborat face posibilă determinarea forțelor care acționează în elementele mecanismului, permițînd în același timp și studierea problemelor privind parametrii suspensiei automobilului.

De asemenea, prin introducerea forțelor și momentului de legătură cu puntea din spate, se poate extinde folosirea modelului descris mai sus și pentru simularea pe calculatorul electronic a mișcării întregului automobil.

Primită la redacție la 4 ianuarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. C. Ghiulai, Ch. Vasiliu, *Dinamica autovehiculelor*, Edit. I.P.B. 1973.
2. G. W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice—Hall Inc. 1971.
3. N. Orlandea, D. Calahan, M. Chace, *Sparsity — Oriented Methods for Simulations of Mechanical Dynamic Systems*, University of Michigan Rev. 1971.
4. D. A. Smits, *Reaction Forces Impact in Generalized Two—Dimensional Mechanical Dynamic System*, Ph. D. Thesis, Departament of Mechanical Engineering, University of Michigan 1971.
5. D. A. Calahan, *Computer — Aided Network Disign*, Revised Edition, Mc Graw—Hill, 1972.

CONSIDERAȚII ASUPRA POSIBILITĂȚILOR DE LIMITARE A EMISIILOR POLUANTE GENERATE DE AERONAVELE MODERNE; IMPLICAȚIILE CONSTRUCTIVE

I). EMISIILE NOCIVE ALE PROCESELOR DE ARDERE

de ȘT. ISPAS*), C. ȚURCANU**), AL. NICA**)

Toate tipurile de aeronave propulsate prin motoare cu ardere internă emit substanțe poluante și nocive, la care se adaugă zgomote : aerodinamice, produse de vibrațiile motorului, de frecări etc. Aceste surse de poluare a mediului înconjurător fac în prezent obiectul unor legislații deosebit de severe, vizînd reducerea lor la nivele acceptabile din punct de vedere ecologic. Constructorii de aeronave sînt astfel obligați să studieze în amănunt mecanismul de producere a substanțelor poluante și a zgomotelor, în vederea găsirii soluțiilor convenabile din punct de vedere constructiv și economic.
Lucrarea de față își propune să prezinte aceste aspecte în lumina celor mai noi rezultate și soluțiile care se întrevăd pentru viitor.

Progresul tehnico-științific remarcabil care a condus printre altele și la generalizarea mijloacelor de transport mecanizate, constituie pe lîngă certe înlesniri în activitatea umană, capabile să permită accesul la cele mai înalte culmi ale civilizației, și surse de producere a unor substanțe nocive, care pun probleme ecologice dintre cele mai acute, stîrnesc îngrijorare și obligă la căutarea unor soluții rapide și eficiente de limitare a lor.

Grupurile propulsoare utilizate în aviație nu fac excepție de la regula comună tuturor motoarelor termice, de a primejdui mediul înconjurător, respectiv omul, prin :

I) Poluarea chimică, constînd din emisiile nocive produse de procesul de combustie.

II) Poluarea sonoră, rezultat al fenomenelor complexe care apar în funcționarea motoarelor și care cumulează zgomote mecanice, aero și gazodinamice, de frecare etc.

Acești factori lăsați să acționeze liberi, în condițiile amintite ale răspîndirii construcțiilor mecanice care îi produc, ar constitui un atentat direct la sănătatea și integritatea omului, faunei și florei ; acesta este motivul pentru care în prezent poluarea chimică și sonoră legată de funcționarea motoarelor, constituie de asemenea o preocupare permanentă și susținută, atît din partea organismelor internaționale, cît și a statelor și

*) G.A.B.
**) I.M.F.C.A.

instituţiilor ştiinţifice de specialitate, elaborîndu-se o legislaţie de limitare severă a nivelului emisiilor poluante, aşa cum s-a procedat în cazul reziduurilor de la reactoarele nucleare, sau a contaminării chimice a rîurilor.

În cele ce urmează, se prezintă mecanismul producerii emisiilor poluante specfice aeronavelor, elementele legislative de limitare şi soluţiile constructive şi tehnologice datorită cărora se pot respecta nivelele impuse.

I) EMISIILE POLUANTE REZULTÎND DIN PROCESUL DE COMBUSTIE ÎN GRUPURILE PROPULSOARE

Aeronavele propulsate cu ajutorul motoarelor cu piston se încadrează în preocupările generale de limitare a emisiilor poluante caracteristice acestora : motoarele cu piston pentru aviaţie vor beneficia de aprofundatele cercetări îndreptate spre elucidarea genezei emisiilor poluante în motoarele cu ardere discontinuă şi a limitării lor la un nivel acceptabil [1], [2], [3], [4].

În paralel cu aceste studii şi investigaţii, o atenţie deosebită este acordată emisiilor poluante ale grupurilor propulsoare cu ardere continuă, dată fiind răspîndirea tot mai accentuată a aeronavelor echipate cu turbomotoare şi ponderea lor deosebit de ridicată în transporturile aeriene. Modul de tratare şi soluţiile care se impun în acest caz, prezintă particularităţi de ordin legislativ, constructiv şi tehnologic, al căror fond este expus în continuare.

1. PROPUNERI PRIVIND REGLEMENTAREA LEGISLATIVĂ AL NIVELULUI DE EMISII PENTRU AERONAVE

Propunerile „Agenţiei pentru Protecţia Mediului Înconjurător" („Environmental Protection Agency" — EPA — S.U.A.), [5], comentariile principalilor constructori de turbomotoare pentru aviaţie, [6], [7], la care se adaugă cercetările instituţiilor specializate în legătură cu mecanismul de producere şi posibilităţile de reducere efective, [6], [7], [8], constituie pînă în prezent baza de discuţii şi reglementare privind emisiile poluante ale aeronavelor echipate cu turbomotoare.

Primul element care se desprinde din specificaţiile legislaţiei (în acelaşi timp şi primul subiect de observatii critice) îl constituie clasificarea propusă de EPA pentru turbomotoare, nivelul de emisii fiind apoi fixat pentru clasele de motoare propuse. Această clasificare este făcută în funcţie de tracţiunea motorului, iar în figura 1 sînt prezentate cîteva turbomotoare grupate după criteriul EPA, împreună cu nivelul acceptat pentru oxidul de carbon redat sub forma aşa-numitului parametru EPA, [5] :

$$\text{Parametrul}_{\text{EPA}} = \frac{\Sigma \text{ Cantitatea de emisii, (kgf)}}{\Sigma \frac{\text{Tracţiune, (kgf)}}{1000} \times \text{timpul (h)}} \qquad (1)$$

formă sub care se pot exprima şi emisiile de oxizi de azot sau hidrocarburile nearse, adică toate categoriile de poluanţi specifici turbomotoarelor de aviaţie.

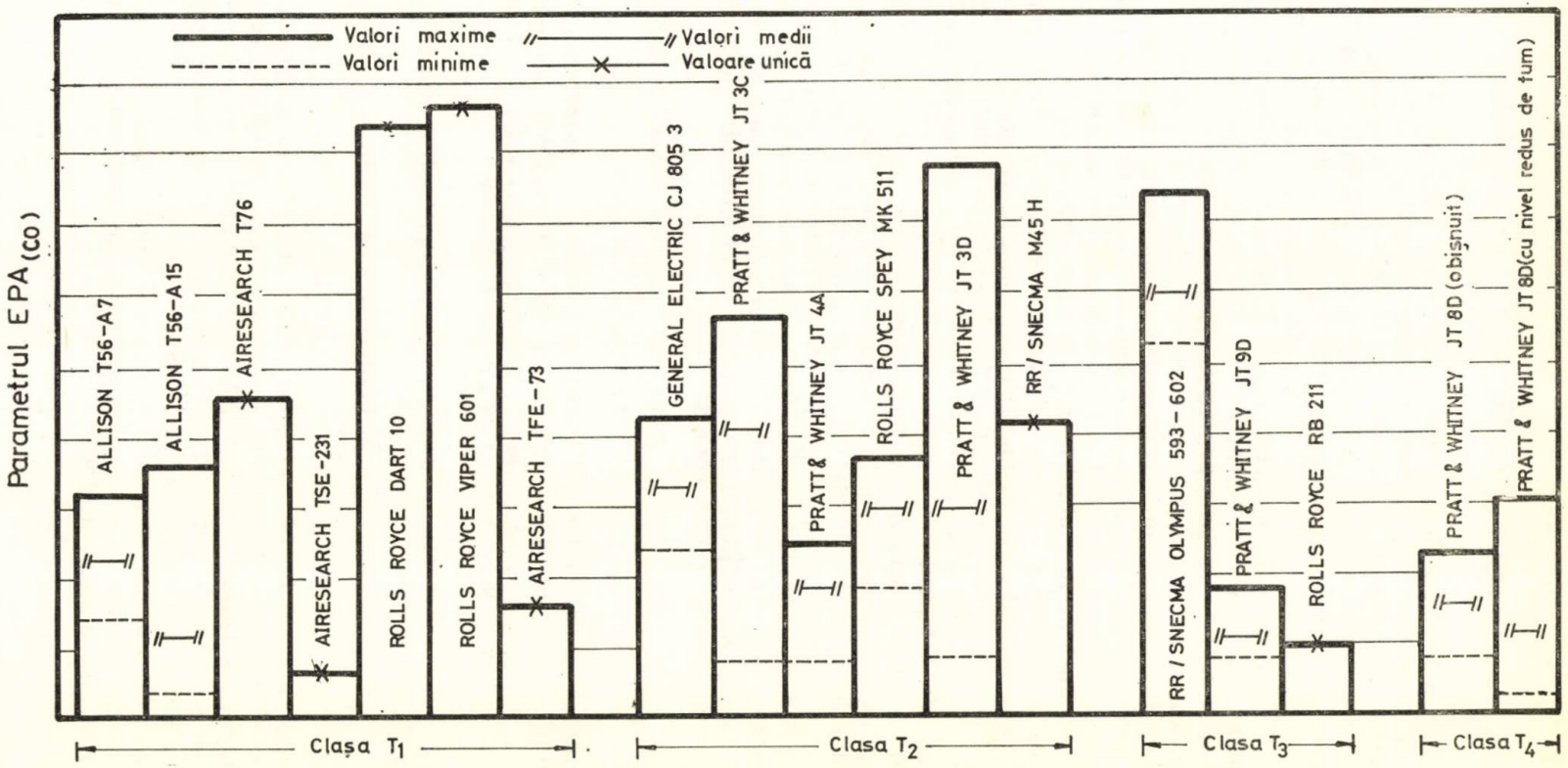


Fig. 1. : Clasificarea propusă de EPA pentru turbomotoare și nivelul emisiilor de CO.

În figura 2 sînt redate aceleaşi valori ale parametrului $EPA_{(CO)}$, însă pentru o clasificare a turbomotoarelor în conformitate cu propunerile unui constructor [7] şi anume în funcţie de consumul specific calculat pentru ciclul complet aterizare-decolare (plafonul fiind fixat în mod arbitrar la 900 m) şi categoria constructivă a motorului; se poate remarca o tendinţă de creştere firească a nivelului emisiei de CO în funcţie de consumul specific pentru ciclul aterizare-decolare, noţiune asupra căreia se va reveni, pe cînd clasificarea EPA din figura 1 nu permite desprinderea unei legi de variaţie pentru acest parametru.

Clasificarea aeronaveor, respectiv a grupurilor propulsoare în funcţie de caracteristicile constructive (deci nu numai în funcţie de putere aşa cum preconizează EPA) este un deziderat al constructorilor motivat şi prin apariţia unor categorii cu totul speciale de aeronave, avînd o pondere deosebit de redusă în ansamblul transporturilor aeriene. Astfel, avioanele supersonice de pasageri vor contribui, după estimările EPA, doar cu 3 — 3,5 % din totalul de cicluri aterizări-decolări al avioanelor de transport turboreactoare, iar avioanele turboreactoare de dimensiuni reduse doar cu 0,4 — 2% din total (calculul a fost făcut pentru cele mai mari aeroporturi din S.U.A.).

Plecînd de la observaţia că factorii esenţiali în stabilirea nivelului de emisii al unui turbomotor sînt : I) indicele de emisii (IE) care depinde de condiţiile funcţionale caracterizînd o anumită cameră de combustie la un moment dat, şi care se poate exprima prin raportul : emisii poluante kgf/1000 kgf carburant ; II) ciclul motor utilizat (caracterizat prin gradul de compresie şi raportul de diluţie) determinat pentru consumul specific şi pentru condiţiile funcţionale ale camerei de ardere, EPA propune un parametru legislativ de forma generală [5] :

$$\text{Parametrul}_{\text{EPA}} = \frac{\text{Debitul de carburant} \times \text{timpul} \times \text{indicele de emisii,}}{\text{Tracţiunea} \times \text{timpul}} \quad (2)$$

sau, luîndu-se în consideraţie cele patru regimuri de funcţionare ale motorului semnificative pentru producerea de emisii poluante în vecinătatea solului (1 = Turaţie redusă-manevre la sol; 2 = decolare; 3 = luare de înălţime; 4 = sosire la aterizare) se ajunge la forma :

$$\text{Param.}_{\text{EPA}} = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{(\text{Debit de carb.})_i \times (\text{timp})_i \times (\text{indice emisii})_i}{\sum_{i=1}^{i=4} (\text{Tracţiune})_i \times (\text{Timp})_i}. \quad (3)$$

Pus sub această formă, parametrul EPA definitoriu pentru nivelul emisiilor este considerat acceptabil, deoarece raportează nivelul emisiilor atît la energia desfăşurată de motor în timpul unui ciclu complet aterizare-decolare, cît şi diversele condiţii funcţionale atît de variate pe care le traversează motorul în timpul aceluiaşi ciclu.

Relaţia (3) poate fi pusă sub forma a doi factori, dacă se înmulţeşte numărătorul şi numitorul prin consumul total de carburant utilizat în ciclul aterizare-decolare, obţinîndu-se

$$\text{Parametrul}_{\text{EPA}} = \text{CSC} \times \text{IEC}, \quad (4)$$

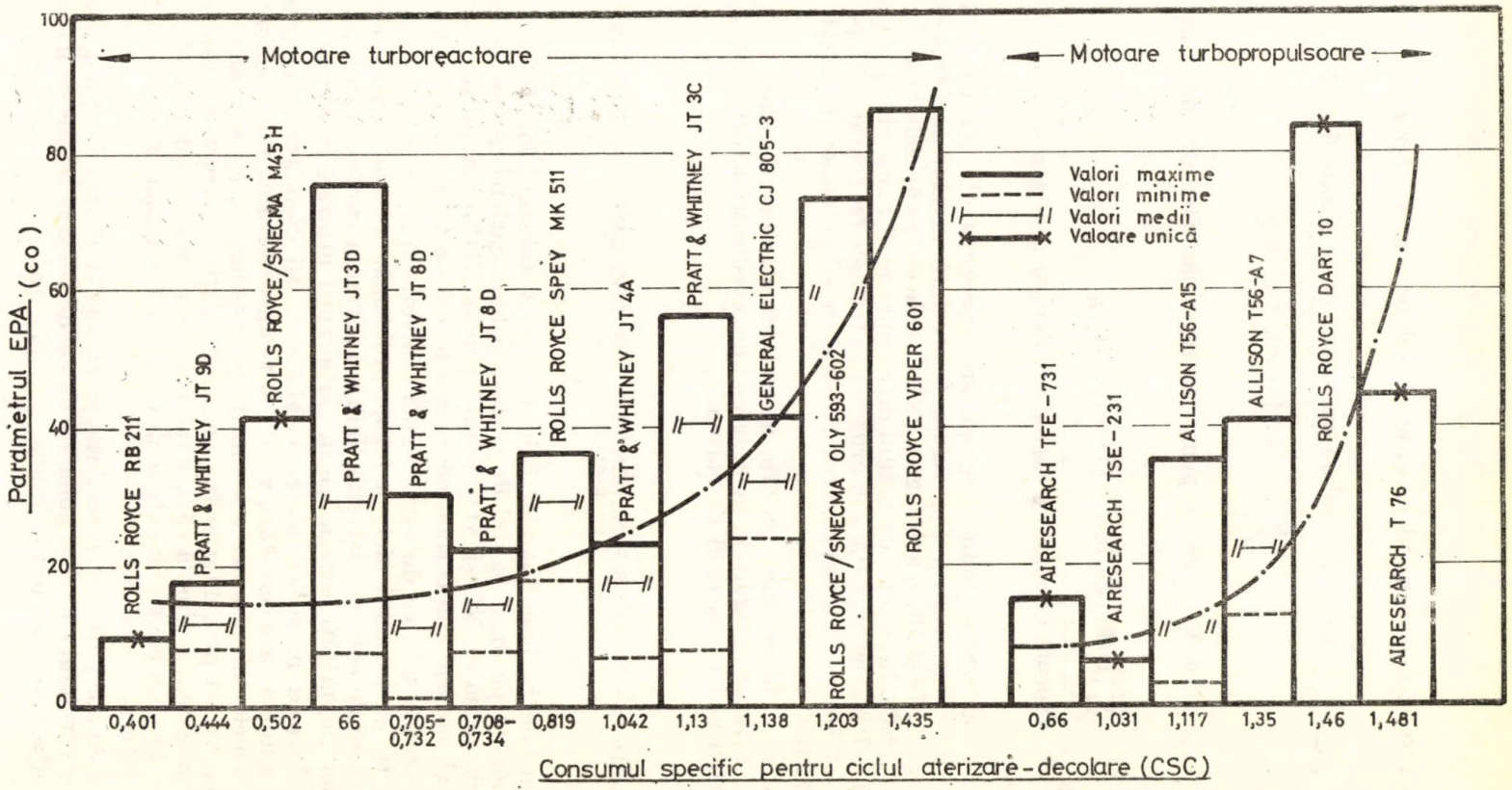


Fig. 2. : Clasificarea turbomotoarelor în funcţie de consumul specific al cicluiui aterizare-decolare şi variaţia emisiei de CO.

în care CSC este consumul specific al ciclului total aterizare-decolare :

$$CSC = \frac{\text{Consumul total de carburant pt. aterizare-decolare}}{\sum_{i=1}^{i=4} (\text{Tracțiune})_i \times (\text{Timp})_i}, \quad (5)$$

ar IEC este indicele de emisii pentru întreg ciclul aterizare-decolare :

$$IEC = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} (\text{Debit carb.})_i \times (\text{Timp}) \times (\text{IE})_i}{\text{Consumul total de carburant pentru aterizare-decolare}}. \quad (6)$$

Ca o ilustrare a modului de aplicare a parametrului EPA în vederea limitării emisiilor nocive, [5], figura 3 prezintă nivelul de CO acceptat pentru anii 1976 și 1979, sub forma indicelui de emisii al ciclului aterizare-decolare (IEC), în funcție de gradul de compresie al motorului și raportul de diluție. Parametrul EPA sub oricare din formele prezentate (3), (4), (5) și (6) servește pentru exprimarea oricărei emisii poluante (CO, NO_x sau hidrocarburi).

Parametrul consum specific al ciclului aterizare-decolare (CSC) a fost deja utilizat în figura 2, în vederea unei clasificări a turbomotoarelor și a redării emisiei de oxid de carbon.

2. INFLUENȚA PARAMETRILOR FUNCȚIONALI AI TURBOMOTORULUI ASUPRA NIVELULUI DE EMISII POLUANTE

Emisiile turbomotoarelor, din categoria substanțelor poluante și nocive, includ pe lîngă oxidul de carbon și hidrocarburi nearse, oxizi de azot (sub formă de NO și NO_2, notați generic NO_x) oxizi de sulf sau de metale, și particule de carbon nears sub formă de fum sau funingine.

Oxizii de sulf, ca de astfel oxizii a diverse metale ce se găsesc în carburanți, nu prezintă nici un fel de problemă, nivelul lor de emisie fiind extrem de coborît, datorită limitării severe a cantității de sulf și a diverselor impurități anorganice în carburanții utilizați în aviație.

Reducerea nivelului pentru celelalte emisii dăunătoare, constituie obiectul a numeroase cercetări, vizînd atît cunoașterea cît mai amănunțită a mecanismelor de producere a substanțelor poluante, cît și a metodelor de reducere a lor prin intermediul unor noi soluții constructive ; problema este departe de a fi simplă căci, după cum se va vedea, soluțiile eficiente pentru reducerea unor poluanți se dovedesc a fi stimulatoare pentru producerea altora.

Deși la începutul lor, cercetările privitoare la găsirea soluțiilor pentru reducerea nivelului emisiilor poluante au condus deja la o serie de indicații cu eficiență practică incontestabilă, [6], [7], [8].

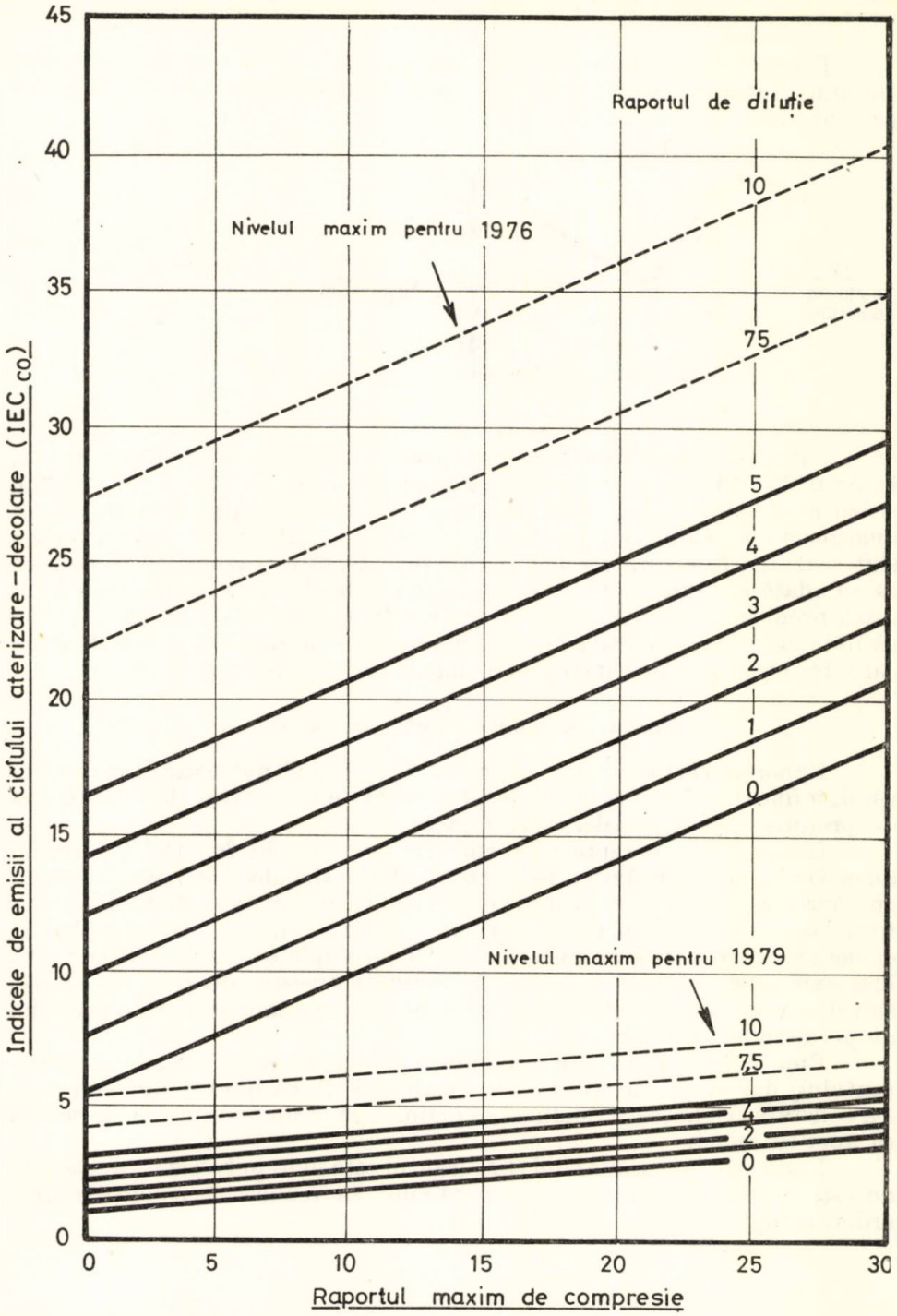


Fig. 3. : Nivelul acceptat pentru emisiile de CO.

Efectele tipice ale condițiilor funcționale asupra emisiilor poluante ale unui turbomotor de aviație (în speță Pratt-Whitney JT8D, [6]) sînt prezentate în figura 4.

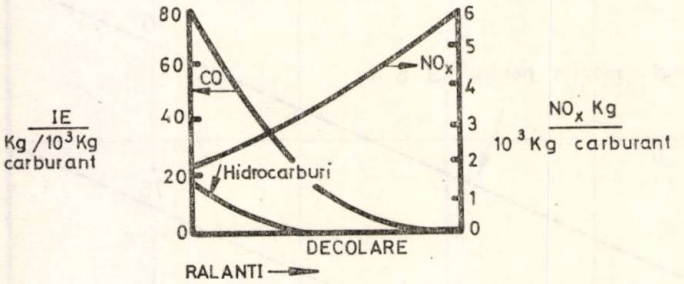


Fig. 4.: Influența condițiilor funcționale asupra emisiilor poluante ale unui turbomotor (JT8D).

Din examinarea figurii 4 se remarcă cu ușurință că produsele arderii incomplete (CO și hidrocarburi nearse) au valorile maxime la turații scăzute ale motorului, cînd pulverizarea carburantului lasă de dorit, amestecul este sărac, iar presiunile și temperaturile în camera de ardere sînt scăzute; în aceste condiții emisia de NO_x este scăzută, ca să crească rapid odată cu turația, adică cu evoluția condițiilor funcționale spre reducerea produselor arderii incomplete. Această situație se datorează faptului că îmbunătățirea condițiilor de ardere conduce la geneza oxizilor de azot, care sînt produși în cantități proporționale cu creșterea temperaturii.

a) Influența dozajului și pulverizării carburantului

Raportul carburant/aer și gradul de finețe al pulverizării carburantului, influențează direct eficiența procesului de combustie, deci cantitatea de produse specifice arderii incomplete.

În figura 5 se reprezintă emisiile poluante în funcție de dozajul amestecului și de gradul de pulverizare al amestecului; se poate constata cu ușurință că o mai bună pulverizare a picăturilor de carburant cu ajutorul unui atomizor cu jet de aer sub presiune ridicată, este deosebit de eficientă în reducerea produselor arderii incomplete (CO și hidrocarburi) însă există pericolul să apară local tranșe de amestec deosebit de sărace, sub limita de imflamabilitate, ceea ce ar conduce la o scădere a gradului de perfecțiune al arderii, [6].

Emisia de NO_x nu este influențată de gradul de pulverizare a carburantului, dar tinde să crească cu cantitatea de carburant din amestec; s-a constatat că această tendință se plafonează la un anumit dozaj, pentru ca apoi să scadă.

Emisia de fum scade cînd carburantul este bine pulverizat, amestecul nu este excesiv de sărac și în general cînd se realizează condițiile unei arderi complete.

b) Influența gradului de compresie

În figura 6 se reprezintă variația nivelului de emisii poluante în funcție de presiunea aerului la intrarea în camera de ardere, atît pentru produsele arderii incomplete (CO și hidrocarburi) care scad cu mărirea

gradului de compresie, deci cu îmbunătăţirea condiţiilor de ardere, cît şi pentru oxizii de azot, a căror cantitate este în creştere accentuată cu presiunea aerului la intrarea în camera de ardere, [8].

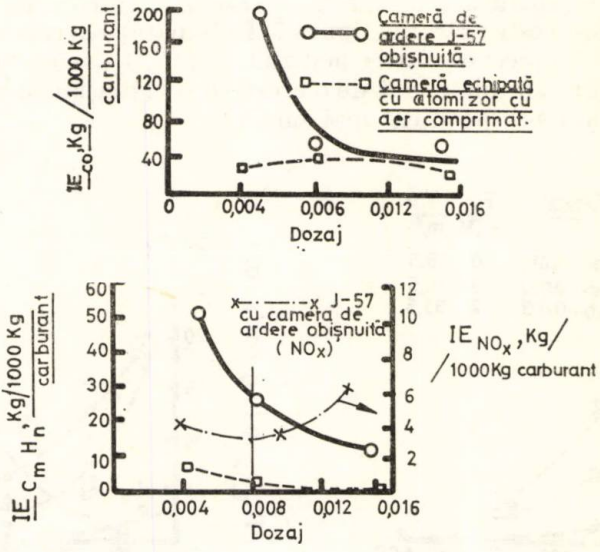


Fig. 5.: Influenţa dozajului şi pulverizării carburantului asupra nivelului de emisii poluante, în cazul unei camere de ardere J—57 (Pratt-Whitney) : a) Emisia de CO; b) Emisia de hidrocarburi nearse şi NO_x.

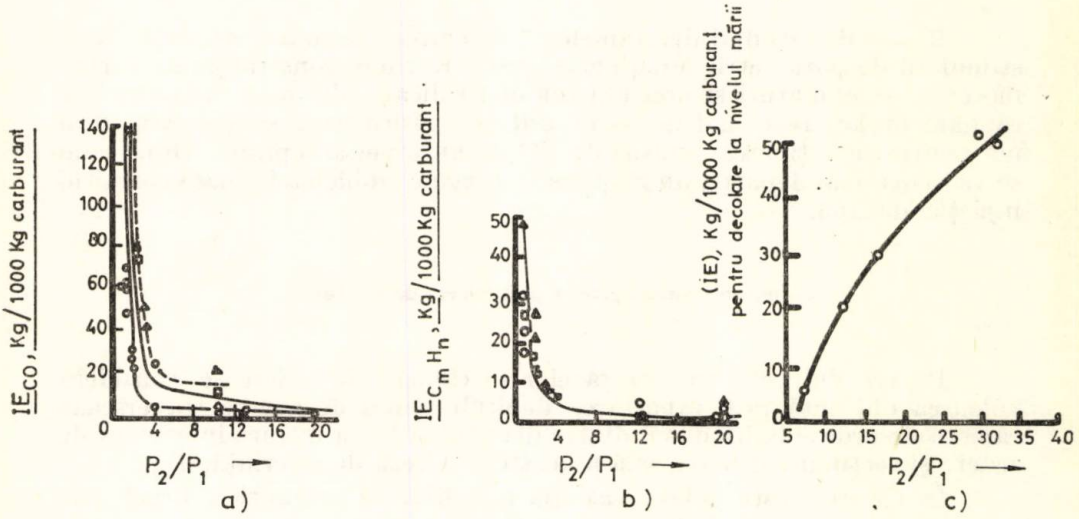


Fig. 6.: Influenţa gradului de compresie asupra emisiilor poluante: a) CO (pentru o cameră de ardere J—57); b) C_mH_n (pentru o cameră de ardere J—57); c) NO_x (variaţia tipică pentru turbomotoarele de aviaţie General Electric).

c) Influența temperaturii aerului la intrarea în camera de ardere

Efectul temperaturii aerului la intrarea în camera de ardere asupra emisiilor poluante este arătat în figura 7. Îmbunătățirea condițiilor de ardere antrenează ca de obicei o scădere pentru CO și C_mH_n, de asemenea o scădere a emisiilor de fum, dublate însă de o creștere substanțială a emisiei de oxizi de azot, așa cum s-a specificat mai sus.

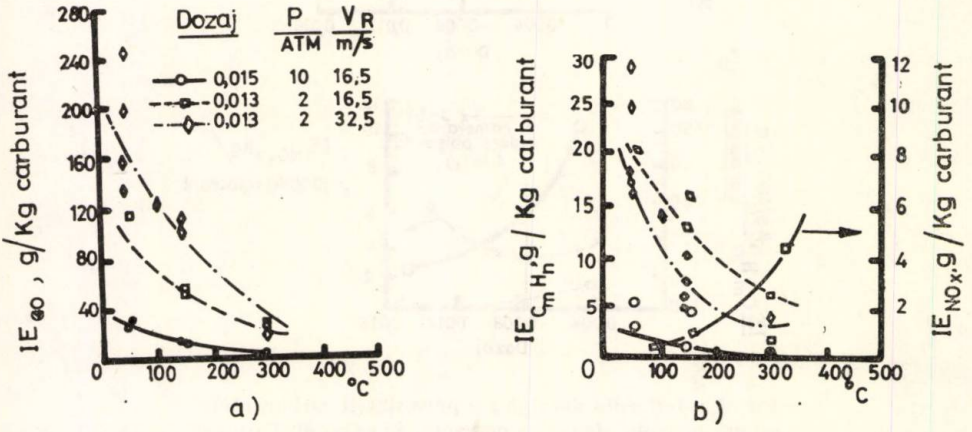


Fig. 7. : Influența temperaturii aerului asupra emisiilor poluante : a) CO (pentru diverse condiții funcționale) ; b) C_mH_n (pentru diverse condiții funcționale) și NO_x (pentru condiții funcționale menținute constante).

Reiese din studiul diagramelor 7 că emisia de oxizi de azot va fi stimulată de parametrii funcționali spre care tinde construcția de turbomotoare (temperaturi și presiuni tot mai ridicate) datorită îmbunătățirii randamentelor, rezultînd astfel necesitatea găsirii unor soluții structural noi pentru menținerea emisiei de NO_x la un nivel acceptabil. După cum se va vedea mai departe, un răspuns la această problemă îl poate constitui injecția de apă.

d) Influența vitezei gazelor prin camera de ardere

Pentru definirea vitezei gazelor în camera de ardere se consideră valoarea obținută prin raportarea debitului total de aer ce traversează camera de ardere la produsul dintre densitatea lui la intrare în camera de ardere și secțiunea transversală a acesteia (viteză de referință, V_r).

În figura 8 este redată variația nivelului de poluanți în funcție de acest parametru.

Este evident că o trecere mai rapidă a aerului, respectiv a gazelor de combustie prin camera de ardere, va conduce la o creștere a produselor

de ardere incompletă, în schimb generarea de oxizi de azot va fi stînjenită, deoarece producerea acestor compuși reclamă (din fericire), pe lîngă temperaturi presiuni ridicate, și un interval de timp relativ mare.

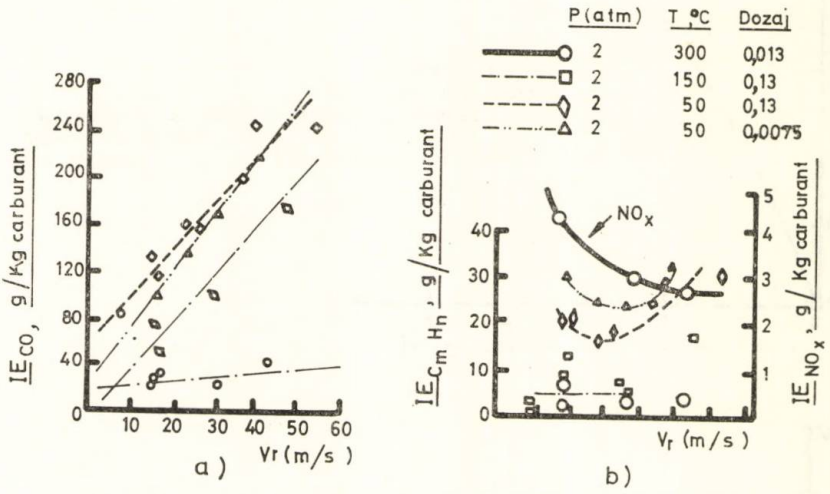


Fig. 8 : Influența vitezei gazelor asupra emisiilor poluante : a) CO ; b) C_mH_n și NO_x .

e) Utilizarea injecției de apă pentru reducerea emisiei de oxizi de azot

Pe lîngă utilizarea pre-atomizării sau pre-vaporizării carburantului pentru scurtarea timpului de staționare în camera de ardere, ceea ce după cum s-a văzut conduce la reducerea emisiilor de NO_x, temperaturile ridicate care se prevăd pentru turbomotoare au impus considerarea unor remedii mai eficiente, printre acestea situîndu-se pînă în prezent pe primul loc injecția de apă în camera de ardere. În figura 9 este prezentată eficiența acestei metode, care după cum se poate observa, este remarcabilă. Obiecțiunea care se ridică este aceea că, în cazul temperaturilor scăzute va trebui ca apa să conțină (sau să fie înlocuită de) metanol ceea ce va conduce însă la noi implicații, atît constructive cît și privitoare la emisiile poluante, [6].

f) Influența injecției de carburant asupra reducerii emisiilor poluante

În măsura în care acest procedeu contribuie la îmbunătățirea condițiilor de ardere, produsele arderii incomplete (CO și hidrocarburi) vor înregistra, așa cum s-a văzut din prezentările precedente, nivele mai scăzute. Interesant este însă de remarcat în plus că injecția de carburant la presiune redusă, împreună cu utilizarea camerelor de pre-amestec, a condus și la o substanțială reducere a emisiei de fum și funingine, după cum reiese din figura 10.

Cifra de fum SAE are valori între 0 și 100, iar sub 20 (ceea ce corespunde la mai puțin de 2 ppm) emisiile devin practic invizibile, deci nu este necesară obținerea unor valori mai scăzute.

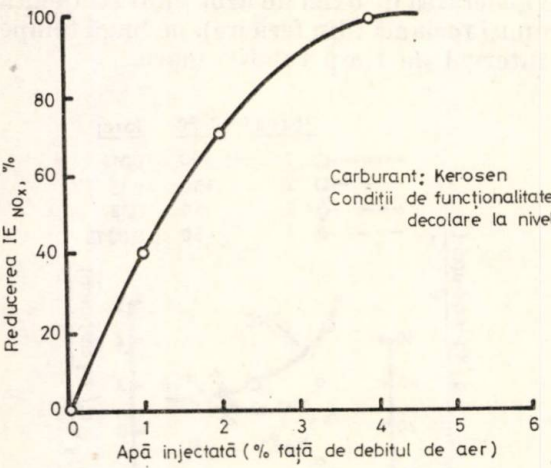


Fig. 9. : Eficiența injectării de apă în vederea reducerii nivelului de NO_X.

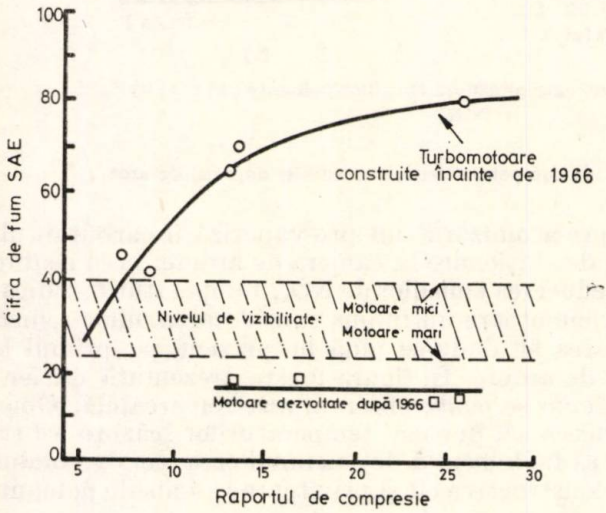


Fig. 10. : Caracteristica emisiei de fum pentru turbomotoarele de aviație General Electric.

g) Utilizarea aditivilor pentru reducerea emisiilor de fum

O deosebită importanță pentru stabilirea nivelului emisiei de fum o are compoziția carburantului, respectiv raportul C/H, (6).

Utilizarea unor aditivi (compuși organo-metalici pe bază de mangan, bariu sau calciu) conduce la rezultate deosebit de bune în reducerea emisiei de fum. Astfel, în figura 11 se prezintă comparativ nivelul emisiei de fum pentru carburantul JP —5 fără aditiv și cu un aditiv organo-metalic pe bază de mangan. Familiile de curbe din figura 11 sînt calculate numeric la calculator cu ajutorul relației :

$$\text{Densitatea optică} = 0{,}3404400 + 0{,}0287320\ P - 0{,}6194500\ T - 0{,}2396000\ PT + 0{,}2625000\ T^2, \quad (6)$$

în cazul carburantului neaditivat, iar pentru cel aditivat s-a folosit relaţia :

$$\text{Densitatea optică} : 0{,}2634117 + 0{,}0059427\ P - 0{,}6817250\ T - \\ -0{,}0994667\ PT + 0{,}4614583\ T^2, \qquad (7)$$

în care P este presiunea, iar T temperatura la intrarea în camera de ardere.

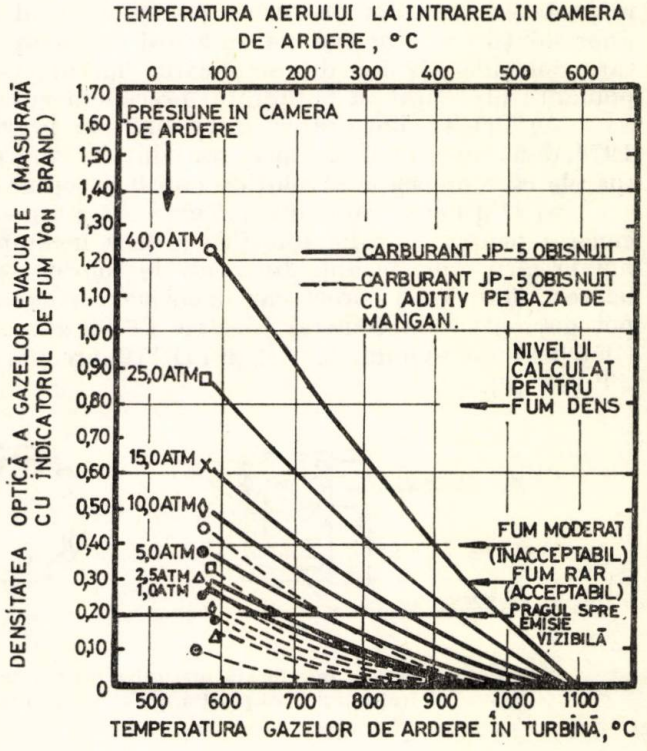


Fig. 11. : Influenţa aditivilor asupra reducerii nivelului emisiei de fum în cazul carburantului JP—5.

Eficienţa acestor aditivi este deosebit de ridicată, deşi cantităţile utilizate sînt infime (de ordinul cîtorva sute de părţi per milion).

h) Adaptarea geometriei variabile pentru camerele de ardere în vederea reducerii emisiilor poluante

Cu acest gen de soluţii, care se extind de la utilizarea sau obturarea unui set de orificii suplimentare în funcţie de condiţiile funcţionale, în vederea optimizării dozajului, vitezei de circulaţie a gazelor etc. pînă la conceperea unor camere de ardere cu dimensiuni care să poată fi modificate în acord cu parametrii de lucru, se intră în domeniul construcţiilor de o eficienţă deosebită, atît din punct de vedere funcţional, cît şi al nivelului de emisii poluante, care vor constitui baza tehnologică a generaţiei viitoare de turbomotoare pentru aviaţie.

3. SOLUȚII CONSTRUCTIVE NOI PENTRU TURBOMOTOARELE DE AVIAȚIE ÎN VEDEREA REALIZĂRII NIVELULUI LEGIFERAT DE EMISII POLUANTE

Atenția constructorilor de grupuri propulsoare pentru aeronave este îndreptată în prezent cu precădere spre încadrarea între limitele prevăzute pentru emisiile poluante; acest obiectiv se realizează pe două căi: prin adaptarea motoarelor existente în măsura posibilului, vizîndu-se respectarea normelor prevăzute pentru viitorul apropiat și prin elaborarea unor soluții constructive noi, în acord cu cerințele viitorului mai îndepărtat. Soluțiile rezultă din explicarea mecanismului producerii emisiilor poluante prezentat în paragraful precedent și comportă mai multe faze:

A) Pentru încadrarea între limitele prevăzute începînd chiar cu 1974, două modificări au fost, sau sînt în curs de realizare, la turbomotoarele care depășesc nivelul de emisii acceptat (caz practic general):

a) Obținerea unui nivel foarte scăzut pentru emisia de fum și în general pentru emisiile specifice arderii incomplete) prin îmbunătățirea pulverizării, amestecului din zona de combustie primară (fig. 12) și realizarea unui dozaj corect carburant/aer în această zonă; ca exemple se pot da motoarele General Electric TF 39 care echipează cargoul C 5 și CF 6 echipînd avionul de pasageri DC 10, precum și motorul Pratt-Whitney JT 8D, (6).

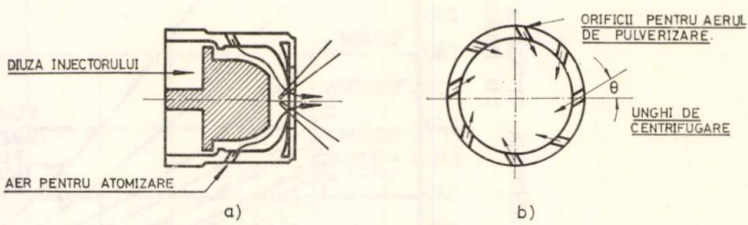


Fig. 12.: Schema injectorului de pulverizare a carburantului, îmbunătățită: a) secțiune; b) dispoziția orificiilor pentru turbionarea aerului.

b) Reducerea emisiei de hidrocarburi nearse prin eliminarea aerării sistemului de alimentare cu carburant (de ex. la motoarele Rolls-Royce Olympus 593 pentru avionul supersonic Concorde și RB 211). La alte motoare această modificare cere un timp îndelungat, pentru realizarea protecției necesare eliminării pericolului de incendiu sau explozie în motor.

B) Nivelul de emisii preconizat pentru anul 1976 va impune schimbări în construcția turbomotoarelor plecînd de la modificări ale camerei de ardere (îmbunătățirea pulverizării), controlul drenajului carburantului, alimentare prin circuit divizat, pentru a se ajunge și la modificări importante în construcția camerei de ardere, pre-atomizare, pre-vaporizare (fig. 13), etc, injecție de apă la decolare, și altele. Pentru motoarele avioanelor supersonice se consideră drept certă necesitatea de a fi prevăzute cu camere de ardere avînd geometrie variabilă pentru a se regla dozajul în cadrul aceluiași regim de turație, și injecție stadială de carburant în camera de ardere, adică alimentarea diverselor zone ale camerei de ardere în mod independent și la parametrii locali optimi.

c) Pentru îndeplinirea condițiilor prevăzute începînd cu anul 1979, problema principală este realizarea unei eficiențe de 99,6% chiar la turații reduse, ceea ce va impune fără îndoială generalizarea camerelor de ardere cu geometrie variabilă și a injecției stadiale.

Există temerea că postcombustia va agrava mult emisiile poluante, chiar în cazul unei eficiențe de 100% a motorului principal, și de 99% a reacțiilor de ardere postcombustive. De asemenea, se exprimă îndoieli că doar prin injecție de apă se vor putea reduce emisiile de NO_x la nivelul impus.

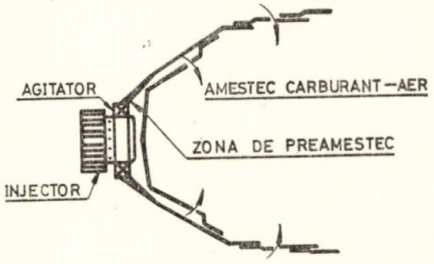


Fig. 13.: Schema camerei de ardere cu pre-amestec.

D) Utilizarea hidrogenului drept carburant pentru propulsia aeronavelor este luată în considerație cu tot mai multă insistență, căci în ciuda unor dificultăți constructive rezultînd din volumul mare pe care îl implică, prezintă avantaje care nu se pot trece cu vederea: posibilitățile practic infinite de obținere (dintr-un km^3 de apă din ocean se poate obține 113 milioane tone de hidrogen, adică echivalentul energetic al întregii producții de petrol din zona Golfului Persic pe timp de un an), dispariția emisiilor poluante caracteristice arderii incomplete și chiar a oxizilor de azot dacă este ars în proporții stoechiometrice cu oxigenul, furnizarea de oxigen ca subprodus, etc.

E) Utilizarea motoarelor nucleare este de asemenea luată în considerație cu multă insistență, dar această soluție va ridica probleme deosebit de grele din punctul de vedere al poluării mediului înconjurător.

Primită la redacție la 6 iulie 1974.

BIBLIOGRAFIE

1. S.S. Lestz, W.E. Meyer, *Combustion Regularity, a Key to Spark-Ignition Engine Emission Reduction?* Conferința de motoare cu combustie internă, Comunicarea II. a, București, 1970.
2. T.A. Huls, P.S. Myers, O.A. Uyehara, *Spark Ignition Engine Operation and Design for Minimum Exhaust Emission*, SAE Midyear Meeting 1966, Paper 660405.
3. G. Stumpp, *Abgasmessungen an Diesel und Ottomotoren*, Conferința de motoare cu ardere internă, București 1970, comunicarea IX, I.
4. C.A. Vasilescu și colab., *Corelații între produsele poluante din gazele de evacuare ale unui motor policilindric și neuniformitatea produselor din cilindri*, Conferința de motoare cu ardere internă, București 1970, Comunicarea II. h.
5. Environmental Protection Agency (S.U.A.), *Notice of Proposed Rule Making* (40 CFR, Part 87): *Control of Air Pollution from Aircraft and Aircraft Engines*", 1972.
6. W. Cornelius și W.C. Agnew, *Control and Protection of Aircraft Turbine Exhaust Emissions*, Plenum Press, New York, 1972.
7. *** *Comments on the EPA Notice of Proposed Rule Making* (40 CFR, Part 87): *Control of Air Pollution from Aircraft and Aircraft Engines*, Rolls-Royce Ltd, Anglia, 1973.
8. E.S. Starkman, *Combustion-Generated Air Pollution*, Plenum Press New York, 1973.

RECENZII

RUST, W. BURT, BURRUS, R. WALTER „Mathematical programming numerical solution of linear equations" (Programarea matematică și soluționarea numerică a ecuațiilor lineare) Seria „Modern analytic and computational methods in science and mathematics", Number 38. Elsevier, New York – London – Amsterdam, 1972, X + 218 pag., 76 fig., 18.50.

Monografia este consacrată problemei soluționării sistemelor de ecuații algebrice liniare din categoria slab condiționate.

Sînt analizate diverse tehnici de programare matematică a sistemelor de ecuații lineare slab condiționate cu diverse erori în vectorul–membru drept al sistemului. Metodele dau o estimare pentru intervalul în care se află soluția, dimensiunea intervalului fiind determinată de mărimea erorilor în membrul drept și de constrîngerile impuse de informațiile *a priori* asupra soluțiilor acceptabile.

Restricția principală *a priori* utilizată este că soluția trebuie să fie nenegativă, dar este arătat că orice altă restricție *a priori* poate fi redusă la o simplă restricție nenegativă printr-o schimbare adecvată de transformări de variabile.

Problema estimării limitelor superioară și inferioară pentru soluție este formulată și soluționată ca o problemă de programare matematică.

În încheiere se prezintă o serie de aplicații și generalizări ale tehnicii de estimare a constrîngerilor.

Cartea se remarcă prin problematică interesantă și rigoarea demonstrațiilor, tratînd un domeniu de mare utilitate atît pentru teoreticieni, cît și pentru cei care se ocupă de aplicații și experimente numerice.

Marcel Stere

CLIVE L. DYM, Introduction to the theory of shells (Introducere în teoria plăcilor curbe subțiri) Pergamon Press, Oxford, 1974
159 pagini, 14 figuri, 5 tabele, 51 ref. bibl.

În literatură sînt cunoscute mai multe încercări de a scrie o introducere în teoria plăcilor curbe subțiri; dintre acestea putem cita volumele lui A. Pflüger, A. Paduart, K. Hirschfeld, J. Gibson și alții. Toate aceste lucrări au un caracter elementar și nu își propun să plece de la fundamentarea teoriei, spre a ajunge la diferite metode și tratări particulare. Acestea rămîn fie dispersate în articole variate, fie în tratate ample, din care unul recent și foarte important este acela al lui H. Kraus.

Cartea lui C.L. Dym își propune să reprezinte o introducere în modul cum este formulată teoria plăcilor curbe subțiri, cum apar diferitele aproximații și cum este aplicată pentru diferite geometrii, în problema statică și dinamică. În cele ce urmează vom trece în revistă conținutul celor 7 capitole.

Capitolul I – Preludii – cuprinde o discuție a problemei lui Lamé pentru tubul cilindric de lungime infinită; în cazul în care grosimea h este redusă în raport cu raza, se tinde către soluția de membrană. Un al doilea aspect tratat este o deducere energetică a teoriei grinzilor, arătînd că se va reține ideea unei variații liniare a deplasărilor pe grosime.

Capitolul II – Teoria suprafețelor – cuprinde o prezentare a primei și celei de-a doua forme fundamentale, condițiile Codazzi-Gauss și o particularizare pentru suprafețele de rotație.

Capitolul III — Construirea unei teorii a plăcilor curbe subțiri — este poate partea cea mai interesantă a cărții.

După prezentarea celor patru ipoteze de bază și a coordonatelor ortogonale α_1, α_2, z, se stabilesc relațiile de deformații admițînd variația liniară a deplasărilor tangențiale u_1, u_2 pe grosimea plăcii. Se definesc în continuare, mărimile secționale și energia de deformație și se introduc simplificările funcționalei energiei potențiale și relațiilor de deformații. Simplificările revin la neglijarea lui h/R_i și h^2/R^2_i în comparație cu unitatea.

Capitolul IV — Membrane — introduce de la început ipoteza momentelor și forțelor tăietoare nule. După ecuațiile teoriei de membrană, se dau cîteva exemple în cazul plăcilor curbe subțiri de rotație.

Capitolul V — Incovoierea cilindrilor circulari — examinează mai multe teorii existente în literatură (Donnell, Sanders, Flügge).

În capitolul VI — Plăci subțiri de rotație — se dau mai întîi relațiile generale, apoi se examinează cîteva situații particulare : teoria lui Reissner-Meissner pentru plăcile subțiri de rotație încărcate simetric, aproximația lui Geckeler pentru cupole înalte, teoria lui Reissner pentru cupole pleoștite.

Ultimul capitol (al VII-lea)—Vibrațiile axial-simetrice ale cilindrilor circulari —abordează următoarele probleme : vibrațiile libere, aproximații pentru frecvențele radiale, ortogonalitatea modurilor de vibrații libere, și două tipuri de dezvoltări ale modurilor normale pentru vibrațiile forțate.

Fiecare capitol are anexe în care sînt dezvoltate anumite demonstrații sau se dau completări și exemplificări.

Într-un volum extrem de concis, autorul reușește să introducă pe cititor în *bazele* teoriei și în prezentarea *selectivă* a problemelor plăcilor curbe subțiri. Poate că se resimte lipsa unei sistematizări a diferitelor simplificări, cum ar fi separarea stărilor de eforturi și limitele de aplicabilitate ale fiecărei teorii simplificate.

Textul este redactat foarte clar și poate constitui un îndreptar, pentru familiarizarea cu calculul plăcilor curbe subțiri.

Mircea V. Soare

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 34 2/1975

SUMAR

STUDII

EMIL TOCACI, Funcţia quasi-Dirac şi utilizarea ei în mecanică 167

C. BUDA, ST. BAJUREANU, Criterii informaţionale de stabilitate şi calitate a sistemelor de reglare automată 179

V. GIURGIUŢIU, Aplicarea metodei elementului finit în analiza structurilor cu neliniaritate geometrică. I. Regim static 185

I. MUNTEANU, Asupra unor probleme din teoria structurilor 201

N. POSEA, AL. ANGHEL, Asupra tensiunilor reale din dantura angrenajelor . . . 211

A. PAVEL, Calculul adîncimii optime de mandrinare pentru îmbinările prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune 229

E. BOTEZ, D. CATRINA, Unele erori de prelucrare provocate de eroarea de calcul a raportului de transmitere al roţilor de schimb 249

ŞT. ENACHE, E. STRĂJESCU, S. STĂNESCU, Contribuţii privind determinarea experimentală a forţelor de aşchiere la strunjire 263

GH. ZIDARU, Caracteristicile geometrice ale profilelor 273

ŞTEFAN I. MAKSAY, Soluţii ale ecuaţiei energiei totale în cazul scurgerii pe placa plană incluzînd alunecarea la perete 285

ŞT. ZAREA, I. JELEV, Studiul şocului hidraulic într-o conductă sub presiune protejată cu rezervoare de aer şi castele de echilibru, folosind un calculator numeric 289

ŞT. ISPAS, AL. NICA, Consideraţii asupra posibilităţilor de limitare a emisiilor poluante generate de aeronavele moderne; implicaţiile constructive. II. Poluarea sonoră . 303

V. TOMA, CAMELIA CRISTEA şi ŞT.N. SĂVULESCU, Cercetări experimentale asupra realizării unui jet cu gradient transversal constant al vitezei medii. 317

FUNCȚIA QUASI-DIRAC ȘI UTILIZAREA EI ÎN MECANICĂ

de EMIL TOCACI
Institutul de petrol și gaze
Ploiești

Sînt definite funcțiile quasi-Dirac și quasi-Heaviside precum și proprietățile lor principale. Se arată posibilitatea utilizării acestora într-un mod similar cu distribuțiile ca și avantajul lor de a fi funcții continue și derivabile în sens clasic (în cazuri particulare pot fi infinit derivabile). Posibilitatea introducerii lor în calcule conduce la avantajul că idealizarea fenomenelor studiate nu mai este în acest caz necesară.

Funcțiile quasi-Dirac și quasi-Heaviside le-am introdus prima dată la Conferința Națională de Mecanică din București în 1969. În esență, aceste funcții sînt utilizate de numeroși cercetători, dar numai într-un caz limită al lor. Într-adevăr, la limită, funcția quasi-Dirac conduce la distribuția lui Dirac, iar funcția quasi-Heaviside are drept limită funcția lui Heaviside. Trecerea la limită se referă la un parametru pe care aceste funcții (quasi-Dirac și quasi-Heaviside) îl conțin.

În definitiv, mulțimea funcțiilor quasi-Dirac și quasi-Heaviside nu este altceva decît o submulțime a mulțimii funcțiilor care depind și de un parametru, avînd drept limită ($\lambda \to 0$) chiar distribuția lui Dirac și funcția lui Heaviside.

Scopul considerării funcțiilor quasi-Dirac și quasi-Heaviside, este de a trata mișcările care, prin idealizare, apar ca discontinui, cum sînt mișcările sub acțiunea forțelor percutante, în situațiile în care distribuția lui Dirac este dificil de folosit precum și de a studia fenomenele discontinui (de fapt quasi discontinui cum sînt șocurile și acțiunile concentrate, care provoacă discontinuități numai prin idealizare) prin calcul numeric, compatibil cu utilizarea calculatoarelor. Modul lor de definire este următorul :

A) Fie o funcție de variabila u :

$$y = f(u, \lambda), \tag{1}$$

care depinde și de parametrul λ și este continuă și pe p ori derivabilă cu $p \geqslant 1$.

Se admite că sînt îndeplinite următoarele condiții :

a) Pentru orice λ domeniul de definiție al funcției (1) este $u \in (-\infty, +\infty)$:

b) Parametrul λ poate lua orice valoare reală, eventual cu excepția unei mulțimi de valori de măsură nulă. Pentru orice λ există egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u, \lambda)\mathrm{d}u = 1. \tag{2}$$

c) Fie funcțiile :

$$\alpha = \alpha(|\lambda|) \quad \text{și} \quad \beta = \beta(|\lambda|), \tag{3}$$

care au același domeniu de definiție $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, iar pentru orice λ

$$\alpha(|\lambda|) < 0\,; \ \beta(|\lambda|) > 0. \tag{4}$$

De asemenea,

$$\lim_{\lambda \to 0} \alpha(|\lambda|) = \lim_{\lambda \to 0} \beta(|\lambda|) = 0, \tag{5}$$

iar pentru orice șir de valori $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots |\lambda_n|, \ldots$ cu

$$|\lambda_K| > |\lambda_{K+1}| \qquad K = 1,2, \ldots, n \ldots, \tag{6}$$

care să admită limita $\lim_{\lambda \to \infty} |\lambda_n| = 0$, să corespundă șirurile

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \text{ și } \beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_n, \text{ cu } \alpha_k = \alpha(|\lambda_k|)$$

și

$$\beta_k = \beta(|\lambda_k|), \ k = 1,2, \ldots n \ldots$$

astfel încît

$$\alpha_k < \alpha_{k+1}\,; \ \beta_k > \beta_{k+1}\,; \ k = 1,2, \ldots n \ldots \tag{7}$$

Evident, că relația (5) implică

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0 \tag{8}$$

și că, în virtutea relațiilor (4), toți termenii șirului $\{\alpha_n\}$ sînt numere negative și toți termenii șirului $\{\beta\}$ sînt numere pozitive.

Se vede că mulțimea tuturor funcțiilor α și β este infinită.

Trebuie ca funcția $y = f(u, \lambda)$ să fie astfel încît să existe o funcție $\alpha(|\lambda|)$ și o funcție $\beta(|\lambda|)$, pentru care, cu orice λ, $f(u, \lambda)$ să fie identic *nulă* dacă $u \in (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$ și, eventual, toate derivatele $\dfrac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}u^i}$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ să fie identic nule pentru $u(-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$.

În consecință, egalitatea (2) va implica

$$\int_{\alpha(|\lambda|)}^{\beta(|\lambda|)} f(u, \lambda)\mathrm{d}u = 1, \tag{9}$$

oricare ar fi λ.

d) Pentru orice l, m și λ,

$$\int_l^m f(u, \lambda)\mathrm{d}u = q, \tag{10}$$

unde, conform celor de mai sus, $q=1$ dacă $(\alpha, \beta)\subset[(l, m)$; $q\in(0,1)$ dacă $(\alpha, \beta)\cap(l, m)\neq\emptyset$, dar, în același timp, $(\alpha, \beta)\cap(l, m)\neq(\alpha, \beta)$; și însfîrșit, $q=0$ dacă (și numai dacă) $(\alpha, \beta)\cap(l, m)=\emptyset$, unde $\emptyset$ este mulțimea vidă.

e) Pentru orice λ și u, se poate afirma că

$$f(0, \lambda) \geqslant |f(u, \lambda)|, \tag{11}$$

f) Notînd $\nu = |\alpha| + |\beta| = \beta - \alpha$, conform cu (5), $\lim_{\lambda\to 0} \nu = 0$.

Corespondența dintre mulțimea valorilor ν și λ trebuie să fie biunivocă și să implice $\nu(|\lambda_1|) > \nu(|\lambda_2|)$ dacă $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. ν este măsura intervalului de valori ale variabilei u pentru care funcție $f(u, \lambda)$, nu este identic nulă, suportul funcției $f(u, \lambda)$.

De asemenea, este necesar ca $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, deci $\nu(|\lambda_1|) > \nu(|\lambda_2|)$ să implice $f(0, \lambda_1) < f(0, \lambda_2)$.

Dacă toate aceste condiții sînt îndeplinite, funcția $y = f(u, \lambda)$ se numește funcție quasi-Dirac.

Aceasta, deoarece cu un ν suficient de mic funcția $f(u, \lambda)$ poate fi utilizată pentru exprimarea acelorași fenomene ca și distribuția lui Dirac, $\delta(u)$. De pildă, dacă ν reprezintă timpul de interacțiune în cazul unui șoc, pentru studiul acestui fenomen poate fi utilizată $f(u, \lambda)$ în locul lui $\delta(u)$.

În acest fel, în diferite cazuri de studiu al unor fenomenene fizice, se obține o exprimare mai apropiată de realitate, nemaifiind necesare idealizările care permiteau introducerea distribuției lui Dirac.

Trebuie din primul moment observat că $f(u, \lambda)$ rămîne funcție (nu este distribuție), fapt care antrenează o serie de implicații uneori convenabile în calcul.

După cum se va vedea din aplicațiile care urmează, funcția quasi-Dirac, poate fi folosită fără a se cunoaște valorile lui ν, α, β, sau valoarea maximă a lui $f(u, \lambda)$, adică $f(0, \lambda)$, fiind necesar numai ca ν, a cărei valoare se admite finită, să fie suficient de mic, pentru că funcția quasi-Dirac intervine în studiul fenomenelor care, prin idealizare, pot fi considerate instantanee, conducînd la variații discontinui ale unor mărimi. Idealizarea introduce distribuția lui Dirac $\delta(u)$, pe cînd folosirea funcției quasi-Dirac nu presupune nici o idealizare. Asupra acestor considerațiuni, se va reveni.

Remarca I.

Cu $\gamma < \alpha$, funcția

$$\varphi(u, \lambda) = \int_\gamma^u f(w, \lambda)\mathrm{d}w \tag{12}$$

este o funcţie care poate fi numită quasi-Heaviside, deoarece, conform cu (10), rezultă

$$\varphi(u, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } u > \beta, \\ q \in (0,1) & \text{pentru } u \in (\alpha, \beta), \\ 0 & \text{pentru } u < \alpha. \end{cases} \tag{13}$$

Remarca II.

Este uşor de văzut că

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi(u, \lambda) = H(u) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } u > 0, \\ 0 \text{ pentru } u < 0, \end{cases} \tag{14}$$

şi

$$\lim_{\lambda \to 0} f(u, \lambda) = \delta(u), \tag{14'}$$

unde $H(u)$ este funcţia lui Heaviside, iar $\delta(u)$ este distribuţia lui Dirac,

Remarca III.

Evident că se poate lua $u = t - t_0$, t fiind o nouă variabilă iar t_0 o constantă dată. Aceasta echivalează cu o translaţie ceea ce presupune valabilitatea tuturor consideraţiunilor şi rezultatelor de mai sus, cu precizarea că locul mărimilor α şi β este luat de $\alpha_0 = t_0 + \alpha = t_0 - |\alpha|$ şi, respectiv, $\beta_0 = t_0 + \beta = t_0 + |\beta|$.

Remarca IV.

Fie o funcţie $Z = g(u, \lambda)$ continuă şi de p ori derivabilă pentru $u \in (\alpha, \beta)$, oricare ar fi parametrul real λ, şi care îndeplineşte condiţiile, cu notaţiile utilizate mai sus,

$$g(\alpha, \lambda) = g(\beta, \lambda) = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^i g}{\mathrm{d}u^i}\right)_{u=\alpha} = \left(\frac{\mathrm{d}^i g}{\mathrm{d}u^i}\right)_{u=\beta} = 0, \tag{15}$$

$$\int_\alpha^u g(w, \lambda)\mathrm{d}w = \begin{cases} 1 \text{ pentru } u = \beta, \\ q \in (0,1) \text{ pentru } u \in (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Pentru orice λ şi orice $u \in (\alpha, \beta)$, se poate afirma că

$$g(0, \lambda) \geqslant |g(u, \lambda)|, \tag{16}$$

ar

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \text{ implică } g(0, \lambda_1) < g(0, \lambda_2). \tag{16'}$$

În acest caz se poate lua

$$f(u, \lambda) = g(u, \lambda) \quad H(u - \alpha) \quad H(\beta - u), \tag{17}$$

în care $H(u - \alpha)$ și $H(\beta - u)$ sînt funcții Heaviside de argumentele respective, adică

$$H(u - \alpha) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } u > \alpha, \\ 0 \text{ pentru } u < \alpha, \end{cases} \tag{18}$$

și

$$H(\beta - u) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } u < \beta, \\ 0 \text{ pentru } u > \beta. \end{cases} \tag{19}$$

Conform celor acum cunoscute, $f(u, \lambda)$ dată de (17) este o funcție quasi-Dirac.

Se poate verifica fără dificultate că funcția

$$J = f(u, \lambda) = \left[2 \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{C_m^i}{2i+1} \right]^{-1} (\lambda^2 - u^2)^m \lambda^{-(2m+1)} \times$$

$$\times H(u + |\lambda|) H(|\lambda| - u), \tag{20}$$

cu notațiile consacrate, este o funcție quasi-Dirac, cu

$$\alpha = -|\lambda|; \quad \beta = |\lambda|; \quad \nu = |\alpha| + |\beta| = \beta - \alpha = 2|\lambda|.$$

Aceasta demonstrează că mulțimea funcțiilor quasi-Dirac (și, implicit, quasi-Heaviside) nu este o mulțime vidă, ceea ce de altfel este ușor de văzut.

Remarca V.

Se poate adopta notația simplificată

$$\begin{aligned} f(u, \lambda) &= \tau(u), \\ \varphi(u, \lambda) &= E(u). \end{aligned} \tag{21}$$

Pentru funcțiile quasi-Dirac și quasi-Heaviside, dependența de parametrul λ subînțelegîndu-se, la fel ca și faptul că apropierea de distribuția lui Dirac și, respectiv, funcția lui Heaviside, este cu atît mai mare, cu cît ν este mai mic ($\nu = |\alpha| + |\beta|$, este așa cum s-a văzut, o caracteristică a oricărei funcții $\tau(u)$ sau $E(u)$).

Odată aceste precizări făcute, pot fi prezentate cîteva moduri de utilizare.

B) Fie $\bar{P}$ vectorul percuție, aplicat unui corp care participă la o ciocnire.

Forța percutantă va fi

$$\bar{F} = \bar{P}\tau(u), \tag{22}$$

unde ν este tocmai timpul de ciocnire (care este, după cum se știe, foarte mic, dar finit și considerat nul numai prin idealizare) și în același timp, conform celor de mai sus, este măsura intervalului de valori ale lui u pentru care $\tau(u)$ nu este identic nulă, deci suportul funcției $\tau(u)$, iar $u = t - t_0$, intervalul de valori u, considerat, a cărui măsură este ν, conținînd valoarea t_0. Adică t_0 se găsește pe suportul lui $\tau(u)$.

Deci

$$\bar{F} = \bar{P}\tau(t - t_0), \tag{22'}$$

expresie în care t este timpul, iar t_0 momentul în care forța de percuție atinge valoarea maximă.

Important de remarcat este că nu trebuie să se cunoască cu precizie acest moment t_0. Trebuie observat că ciocnirea începe la momentul $t_1 = t_0 + \alpha = t_0 - |\alpha|$, și se sfîrșește la momentul $t_2 = t_0 + \beta = t_0 + |\beta|$. Dacă este cunoscut orice moment $t_p \in (t_1, t_2)$ se poate considera arbitrar $t_0 = t_p$, fără ca prin aceasta să se fi prejudiciat calculul, datorită măsurii extrem de mici a mulțimii valorilor $t \in (t_1, t_2)$ care este chiar ν. Iar cînd se consideră cazul ideal cu $\nu \to 0$, aceasta implicînd $\lambda \to 0$, rezultă $\bar{F} = \bar{P}\delta(t - t_0)$, cu $\delta(t - t_0)$ distribuția lui Dirac deoarece, din cele precedente rezultă că apar ca o imediată consecință a relațiilor (14) și (14'), egalitățile :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \to 0} \tau(u) &= \delta(u), \\ \lim_{\nu \to 0} E(u) &= H(u), \end{aligned} \tag{23}$$

cu notațiile cunoscute. Se subliniază încă odată că ν este o vecinătate mică dar finită a lui $u = 0$, care se subînțelege în $\tau(u)$ și $F(u)$.

În general, nu este necesar ca acest ν să fie cunoscut și precizat. Dacă însă în anumite situații ν este cunoscut ca fiind dat de un anumit număr ν_0 și acest lucru este necesar de a fi considerat în calcul, atunci se pot adopta notațiile următoare : pentru funcția quasi-Dirac, $\tau(u)$; pentru funcția quasi-Heaviside, $E(u)$.

$(\nu = \nu_0)$ $\quad$ $\nu - \nu_0$

Exprimînd forța percutantă prin relația (22'), este ușor de stabilit în virtutea relațiilor (12) și (21) că variația impulsului sistemului material, căruia i se aplică $\bar{P}$, este între momentele t_1 și t, dată de relația

$$\Delta\bar{H} = \int_{t_1}^{t} \bar{F}\, dt = \bar{P}\int_{t_1}^{t} \tau(t - t_0)dt = \bar{P}E(t - t_0), \tag{24}$$

unde s-a admis că t_1 este un moment anterior începutului șocului (deci $t_1 \leqslant t_0 - |\alpha| = t_0 + \alpha$).

Conform cu (13) se regăsește imediat rezultatul cunoscut, adică pentru orice moment t de după ciocnire ($t > t_0 + \beta$), $E(t - t_0) = 1$ și $\Delta\bar{H} = \bar{P}$. Se constată că la orice moment $t \in (t_0 + \alpha, t_0 + \beta)$, deci în timpul ciocnirii, nu se poate preciza decît că $\Delta\bar{H} = q \cdot \bar{P}$, unde $q \in (0, 1)$.

Înseamnă că în timpul ciocnirii, în intervalul de timp $(t + \alpha, t + \beta)$, a cărei mărime este $\beta - \alpha = |\beta| + |\alpha| = \nu$, nu se poate cunoaște variația de impuls.

Acest fapt însă nu este deranjat, pentru că ν este foarte mic.

În concluzie, exprimarea dată forței percutante corespunde total fenomenului fizic.

Similar, dacă un corp captează sau emite particule de mase care au același ordin de mărime cu masa corpului, fie μ masa unei asemenea particule și m masa corpului. Durata fenomenului de captare (emisie) este foarte mică, dar finită. Ea poate fi considerată nulă (captare sau emisie instantanee) numai prin idealizare.

Se poate da următoarea reprezentare variației masei :

$$m(t) = m_0 + \mu E(t - t_0), \tag{25}$$

cu m_0 masa corpului înaintea începerii fenomenului de captare (emisie), t_0 unul din momentele intervalului de timp în care are loc fenomenul de captare sau emisie, iar $\mu > 0$ pentru captare, și $\mu < 0$ pentru emisie.

Cum

$$E(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } t > t_0 + \beta, \\ q \in (0, 1) & \text{pentru } t \in (t_0 + \alpha, t_0 + \beta), \\ 0 & \text{pentru } t < t_0 + \alpha, \end{cases} \tag{26}$$

rezultă

$$m(t) = \begin{cases} m_0 + \mu & \text{pentru } t > t_0 + \beta, \\ m_0 + q\mu & \text{pentru } t \in (t_0 + \alpha, t_0 + \beta), \\ m_0 & \text{pentru } t < t_0 + \alpha, \end{cases} \tag{27}$$

deci, absolut conform fenomenului fizic, captarea (emisia) având loc în intervalul de timp $(t_0 + \alpha, t_0 + \beta)$ sau, ceea ce este același lucru, $(t_0 - |\alpha|, t_0 + |\beta|)$. Durata fenomenului este $\nu = |\alpha| + |\beta|$ (foarte mică dar finită).

Se remarcă și aici faptul că $m(t)$ nu este bine determinat pe intervalul $(t_0 + \alpha, t_0 + \beta)$, ceea ce nu deranjează, acest interval de timp fiind extrem de mic, deci neglijabil.

Natural că, în cazul unui număr de k percuții, forța corespunzătoare are expresia

$$\bar{F} = \sum_{j=1}^{k} \bar{P}_j \tau(t - t_{0j}), \tag{28}$$

iar în situația în care un corp captează p particule de masse μ_i de același ordin de mărime cu masa corpului, aceasta variază după legea

$$m(t) = m_0 + \sum_{i=1}^{p} \mu_i E(t - t_{0i}). \tag{29}$$

Cum (28) şi (29) sînt funcţii continue şi derivabile (în raport cu timpul) în sens clasic, rezultă că toate ecuaţiile mecanicii pot fi fără nici o restricţie utilizate şi pentru sistemele materiale percutate sau pentru sistemele materiale de masă discontinuu variabilă.

De asemenea, se vede că utilizarea ecuaţiilor nu trebuie făcută pe porţiuni, datorită modului de definire a funcţiilor quasi-Dirac şi quasi-Heaviside, cu ajutorul cărora s-au exprimat forţele de percuţie şi variaţia discontinuă a masei.

Astfel, s-a redus problema unor mişcări considerate a fi caracterizate de unele discontinuităţi, la cazul simplu al mişcărilor sub acţiunea unor forţe continui şi caracterizate de variaţii exclusiv continui.

De pildă, în cazul unui sistem material olonom cu h grade de libertate acţionat de forţe continui, de forţe percutante şi avînd o captare (emisie) de particule, cu masele de acelaşi ordin de mărime cu masa sistemului, captările particulelor de mase (emisiile) μ_{si} desfăşurîndu-se în vecinătăţi (mici dar finite) ale momentelor t_{0si}, $(i = 1, 2, \ldots \gamma_s)$ şi în punctele M_s, iar percuţiile $\bar{P}_{sj}$ aplicîndu-se la momentele $t_{0sj}(j = 1,2,\ldots k_s)$ în aceleaşi puncte M_s (care formează sistemul material şi au masele m_s şi vectorii de poziţie $\bar{r}_s$), ecuaţiile lui Lagrange sînt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l, \tag{30}$$

unde Q_l, forţa generalizată, este

$$Q_l = \sum_{s=1}^{n}\left[\bar{\Phi}_s + \sum_{j=1}^{k_s}\bar{P}_{sj}\tau(t - t_{0sj}) + \sum_{i=1}^{\gamma_s}\mu_{si}\bar{u}_{si}\tau(t - t_{0si})\right]\frac{\partial \bar{r}_s}{\partial q_l} \cdot l = 1,2, \ldots h, \tag{31}$$

$\bar{\Phi}_s$ sînt forţele nepercutante, iar $\bar{u}_{si}$ vitezele particulelor captate (emise), de mase μ_{si}, la momentele $t_{0si} + \alpha_{si} = t_{0si} - |\alpha_{si}|$, adică la începutul fenomenului de captare(emisie). Restul notaţiilor sînt consacrate.

Aceeaşi forţă generalizată (31) apare şi în cazul ecuaţiilor lui Mangeron, pentru studiul aceluiaşi sistem material

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_l^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l, \tag{32}$$

$$l = 1,2, \ldots, h,$$

$$T^{(m)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T^{(m-1)}; \qquad q^{(m)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^{(m-1)}$$

Similar, pot fi aplicate imediat în situaţia acţiunii percuţiilor sau discontinuităţilor în variaţia masei, toate ecuaţiile mecanicii analitice sau cele ale mecanicii vectoriale.

Remarca I.

Momentele t_{0sj} sau t_{0si} sînt momente din intervale de timp în care au loc percuţiile, respectiv captările (emisiile). Aceste intervale $(t_{0sj} +$

$+ \alpha_{sj}, t_{0sj} + \beta_{sj})$ și $(t_{0si} + \alpha_{si}, t_{0si} + \beta_{si})$ au măsurile $\nu_{sj} = |\alpha_{sj}| + |\beta_{sj}| = \beta_{sj} - \alpha_{sj}$ și $\nu_{si} = |\alpha_{si}| + |\beta_{si}| = \beta_{si} - \alpha_{si}$, care reprezintă durata fenomenelor de ciocnire sau captare (emisie).

Dacă se trece la idealizare, se consideră ν_{sj} și ν_{si} (care sînt extrem de mici, dar finite) ca fiind nule. Aceasta revine, conform cu (23), la a înlocui în calcule $\tau(t-t_0)$ cu $\delta(t-t_0)$ și, respectiv, $E(t-t_0)$ cu $H(t-t_0)$ și, în consecință ecuațiile diferențiale, derivatele și integralele trebuie (în acest caz al idealizării) considerate în sensul teoriei distribuțiilor. În timp ce aplicînd metoda funcțiilor quasi-Dirac și quasi-Heaviside, ecuațiile împreună cu toate operațiile nu au sensul teoriei distribuțiilor, ci sens clasic (ca de exemplu (30) și (32)).

În lucrări anterioare s-au stabilit ecuațiile mecanicii analitice pentru cazul fenomenelor discontinui idealizate (percuții variații, discontinui de masă).

Remarca II.

Dacă se utilizează funcțiile quasi-Dirac și quasi-Heaviside se obțin ecuații diferențiale ce nu conțin distribuții. Există avantajul că se poate lucra cu aceste funcții la fel ca și cu oricare altele continui, derivabile și cu domeniul de definiție $(-\infty, +\infty)$, fără să se aleagă o structură anume pentru $\tau(t-t_0)$ sau $E(t-t_0)$. Aceste funcții apar în multe calcule ca un simbol ce se comportă ca funcții continue și derivabile. Există însă și dezavantajul că fenomenul, de pildă mișcarea mecanică, rămîne necunoscut pe o mulțime de momente care reprezintă reuniunea intervalelor în care au loc ciocnirile sau variațiile bruște de masă. Se vede însă imediat că dacă ν este măsura acestei mulțimi, atunci $\nu \leqslant \sum_{s=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{k_s} \nu s_j + \sum_{i=1}^{\gamma_s} \nu s_i \right]$, n fiind numărul de puncte al sistemului material a cărui mișcare se cercetează, iar restul notațiilor sînt cele de mai sus.

Deci, ν este foarte mică (dar finită), ceea ce face ca dezavantajul să fie neglijabil.

Este adevărat că idealizînd fenomenele bruște(făcîndu-le instantanee), deci, introducînd distribuția lui Dirac și funcția lui Heaviside, $\nu = 0$, adică mișcarea este necunoscută numai pe o mulțime de momente de măsură nulă. Totuși, avantajul de a putea lucra cu funcții continui și derivabile, comoditatea și toate implicațiile care decurg de aici, precum și faptul că în acest fel s-au înlăturat restricțiile pe care le impun distribuțiile, pledează pentru utilizarea cel puțin în studiul anumitor fenomene a funcțiilor $\tau(u)$ și $E(u)$.

De pildă, în acest fel se poate stabili expresia lucrului mecanic al unui sistem de n forțe percutante.

După calcule clasice (adică nu în sens generalizat) se obține.

$$L = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \bar{P}_s \bar{v}_{0s} E(t - t_{0s}) + \frac{P_s^2}{2m_s} [E(t-t_{0s})]^2 \right\}, \tag{33}$$

care este o funcție $L = L(t)$ cu t_{0s} momente aparținînd intervalelor de timp în care se aplică percuțiile $\bar{P}_s$ punctelor M_s de mase m_s, ce alcătuiesc sistemul material percutat.

În concluzie, funcțiile quasi-Dirac și quasi-Heaviside sînt funcții care depind și de un parametru λ, devenind pentru cazul limită ($\lambda \to 0$) distribuția lui Dirac și funcția lui Heaviside și care mai îndeplinesc, în plus, condițiile enunțate mai sus.

Important de remarat este faptul că, după cum rezultă și din aplicațiile de mai sus, în mod practic nu este necesar să se determine, pentru a se utiliza în calcule, nici funcțiile $\tau(u)$ și $E(u)$ și nici suportul lor (de măsură ν). Este, de foarte multe ori, suficient să se precizeze doar că, de pildă, ν este durata intervalului de timp în care are loc șocul (mică dar finită).

În definitiv, funcțiile $\tau(u)$ și $E(u)$ pot fi considerate ca și $\delta(u)$ și $H(u)$, fiind în mod identic folosite în aplicații, cu deosebirea că $\delta(u)$ poate fi înmulțită cu o funcție oarecare $W(u)$ chiar dacă $W(u)$ este discontinuă pentru $u = 0$ (ceea ce nu este posibil în cazul distribuției $\delta(u)$) deoarece $\tau(u)$ este o funcție continuă și derivabilă.

În plus, operatorii de derivare sau integrare a expresiilor care conțin $\tau(u)$ nu au sensul teoriei distribuțiilor (ca în cazul expresiilor care conțin $\delta(u)$), ci sens clasic, deoarece $\tau(u)$, ca și $E(u)$, sînt funcții continue și derivabile.

Cu alte cuvinte $\tau(u)$ și $E(u)$ sînt simboluri cu aceiași semnificație ca și $\delta(u)$ și $H(u)$, dar care, spre deosebire de $\delta(u)$ și $H(u)$ se comportă ca niște funcții continue și derivabile, facilitînd calculul numeric și utilizarea calculatoarelor.

Lucrările viitoare vor extinde și aprofunda această metodă.

În principiu, aceste lucrări vor ține seama că în diferite aplicații practice se poate admite pentru orice mărime ce se exprimă cu ajutorul distribuției lui Dirac (în ipoteza de idealizare implicată de introducerea distribuției lui Dirac), o variație care să conțină un parametru λ $Pf(u, \lambda)$, astfel încît $\lim_{\lambda \to 0} f(u, \lambda) = \delta(u)$, iar cu cît $|\lambda|$ va fi mai mic, cu atît apropierea dintre $f(u, \lambda)$ și $\delta(u)$ va fi mai pronunțată, important fiind faptul că se poate da lui $f(u, \lambda)$ diferite forme, fără ca acestea să impieteze asupra corectitudinii studiului efectuat în vederea facilitării posibilității de calcul numeric.

De pildă, pentru o forță concentrată $\bar{P}$ în punctul $x = a$ pe o grindă dreaptă în lungul căreia s-a luat coordonata x, se va considera existența unei acțiuni echivalente de distribuție continuă (evident, nu și uniformă) deci a unei forțe q N/cm, care încarcă unitatea de lungime de grindă și care să fie și

$$\bar{q} = \begin{cases} \bar{P}\,\dfrac{315}{256}\cdot\dfrac{1}{\lambda^9}\left[(x-a)^2-\lambda^2\right]^4 & \text{pentru } x-a \in (-\lambda,\ \lambda), \\ 0 & \text{pentru } x-a \notin (-\lambda,\ \lambda), \end{cases} \tag{34}$$

fiind oricînd posibil să se impună condiția $\lambda > 0$.

Cum

$$H(u) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } u > 0, \\ 0 \text{ pentru } u < 0, \end{cases}$$

se mai poate scrie

$$\bar{q} = \bar{P}\frac{315}{256}\cdot\frac{1}{\lambda^9}[(x-a)^2-\lambda^2]^4 H(x-a+\lambda)H(x-a-\lambda), \tag{35}$$

în care funcția quasi-Dirac

$$\tau(x-a) = \frac{315}{256}\cdot\frac{1}{\lambda^9}[(x-a)^2-\lambda^2]^4 H(x-a+\lambda)H(x-a-\lambda) \tag{36}$$

este un caz particular al lui (20), cu $u = x-a$.

Cu $\bar{P}\tau(x-a)$ se poate lucra la fel ca și cu $\bar{P}\delta(x-a)$, care este forța ce acționează unitatea de lungime a grinzii încărcată de o forță concentrată, după cum se știe din [2], [5], [6], și [7].
În plus,

$$\bar{q} = \bar{P}\tau(x-a) \tag{37}$$

este o funcție, nu o distribuție, cu atît mai apropiată de $P\delta(x-a)$ în ceea ce privește descrierea fenomenului cu cît λ este mai mic. Luînd un λ mic dar finit, pe de o parte rezultă că acțiunea pe grindă se realizează pe o lungime de 2λ diferită de zero (ceea ce corespunde realității, fiindcă forță concentrată într-un singur punct nu există), iar pe de altă parte se facilitează calculul numeric și (în situații complexe), utilizarea calculatoarelor.

Acest simplu exemplu a urmărit doar să sugereze direcția care ar putea caracteriza viitoarele lucrări de detaliere a metodei aici expusă în principiu.

Primită la redacție la 4 iunie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. M. Bouix *Les fonctions generalisées ou distributions*, Paris, Masson, 1964.
2. W. Keks, Pp. Teodorescu *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, Edit. Academiei, București, 1970.
3. L. Schwartz *Méthodes mathematiques pour les sciences physiques*, Paris, Hermann, 1961.
4. Emil Tocaci *Asupra ecuațiilor mecanicii analitice pentru cazul sistemelor materiale percutate*, St. cerc. mat., *8* (1966).
5. Emil Tocaci, *Aspecte ale utilizării teoriei distribuțiilor în mecanică*, St. cerc. mec. aplic., *1* (1970).
6. Emil Tocaci, *Fenomene discontinui în mecanică și rezistența materialelor*, Edit. Academiei, 1974.

CRITERII INFORMAȚIONALE DE STABILITATE ȘI CALITATE A SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ

de CESAR BUDA, Institutul politehnic, Iași
STELIAN BAJUREANU C.C.N. — Pitești

Lucrarea este o parte dintr-un studiu mai amplu privind metodele de ameliorare a stabilității sistemelor de reglare automată. Pe baza noilor criterii informaționale se deduce posibilitatea de folosire pe scară largă a regulatoarelor bipoziționale, ceea ce ieftinește și simplifică sistemul de reglare automată.

1. INTRODUCERE

În studiul stabilității și, în general, al calității sistemelor de reglare automată s-a ajuns la un impas, comparabil cu criza la care se ajunsese la un moment dat în fizică, cînd teoria probabilistică era considerată ca o expresie a neputinței omului de a descrie matematic cele mai complicate fenomene și nu ca însăși esența acestora.

Descrierea proceselor dintr-o buclă de reglare numai cu ajutorul ecuațiilor diferențiale nu este suficientă întrucît nu indică o legătură dintre ele și noțiunea de informație, neținîndu-se seamă de faptul că procesele într-o buclă de reglare sînt în fond discrete și nu continui. Nu este scoasă în evidență legătura dintre structura sistemului și timpul de propagare a informației pe anumite porțiuni ale buclei, cît și viteza cu care aceasta se propagă.

În plus, schema bloc simplificată, clasică, la care se reduc toate buclele de reglare (fig. 1) și de la care începe studiul acestora, neglijează elemente esențiale.

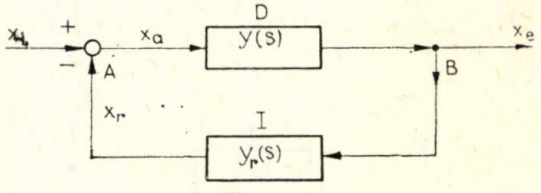


Fig. 1. — Schema bloc clasică a unei bucle de reglare automată:

x_i — mărimea prescrisă sau de intrare; x_e — mărimea reglată sau de ieșire; x_a — mărimea de acționare; x_r — mărimea de reacție; A — nod de însumare a informației; B — punct de bifurcație a informației; $y(s)$ — funcția de transfer a porțiunii directe ADB a buclei de reglare; $y_r(s)$ — funcția de transfer a porțiunii inverse BIA (legătura inversă fundamentală) a buclei de reglare.

Cea mai simplă buclă de reglare posibilă are două mărimi de intrare și nu una, așa cum se admite, două noduri de însumare a informației și nu numai unul.

Schema bloc reprezentată în figura 1 este de fapt schema unui amplificator electronic de la care au pornit atît Nyquist, cît și românul V.M. Popov cînd au stabilit cunoscutele lor criterii de stabilitate.

2. MODIFICAREA SCHEMEI CLASICE

Pentru studiul sistemelor de reglare automată propunem să se pornească de la schema bloc dată în figura 2, care ține cont de faptul că sistemul are o intrare în plus și anume mărimea de reglat aleatorie x. Punctul B de bifurcație a informației din figura 1 devine nod de însumare în figura 2. Notațiile din figura 2, nespecificate în legenda sa, au aceeași semnificație cu cele din figura 1.

Nodul A din figura 2 corespunde elementului de comparație al unui regulator bipozițional, iar nodul B corespunde cu suprafața de separare dintre organul de reglare al elementului de execuție și obiectul reglat.

Prin informație înțelegem :

$$x_i - x_e \neq 0 \text{ și } |x_i - x_e| > E, \tag{1}$$

în care E este sensibilitatea minimă posibilă a elementelor componente ale buclei de reglare.

Informația este pozitivă cînd $x_i - x_e > 0$, și negativă cînd $x_i - x_e < 0$. Ea circulă în bucla fundamentală a unui sistem de reglare numai într-un singur sens, cel indicat cu săgeți în figura 2. Informația își poate schimba semnul numai în nodurile A și B de însumare sau comparație a informației.

Numim timpul T_0, în care informația parcurge odată circuitul fundamental al unei bucle de reglare, timpul fundamental al buclei de reglare. Inversul lui T_0 se numește frecvența fundamentală a sistemului și se notează cu $f_0 = 1/T_0$.

Timpul T_0, la rezonanța buclei de reglare, îl numim timpul fundamental de rezonanță și-l notăm cu T_{or}. Rezonanța are loc cînd

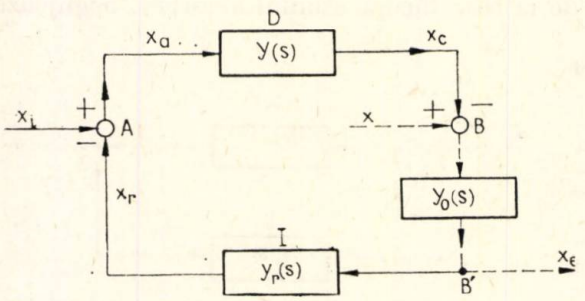


Fig. 2. — Schema bloc fundamentală de la care trebuie început studiul sistemelor automate:

x — mărimea de reglat (aleatorie); x_c — mărimea de comandă; B — nod de însumare a informației; B' — punct de bifurcare a informației; $y_0(s)$ — funcția de transfer a obiectului reglat.

$$t_{ADB} = t_{BIA} = \frac{T_0}{2}, \tag{2}$$

unde t_{ADB} este timpul în care informația poate parcurge porțiunea directă ADB a circuitului fundamental al unui sistem de reglare automată;

t_{BIA} — timpul în care informaţia poate parcurge porţiunea inversă *BIA* (legătura inversă fundamentală) a circuitului fundamental al unui sistem de reglare automată.

Legătura inversă *BIA* o numim fundamentală pentru că pleacă din nodul *B*, unde se însumează x cu x_e. Legăturile inverse care pleacă din punctele de bifurcaţie a informaţiei sau din alte noduri decît *B* le numim legături inverse secundare. Legăturile $B''NA_1$ şi $B''PA_1$ din figura 3 sînt secundare. Toate legăturile inverse sosesc în noduri de însumare.

Legătura inversă negativă secundară $B''NA_1$ măreşte timpul de circulaţie a informaţiei pe *ADB*, pe cînd legătura inversă pozitivă secundară $B''PA_1$ îl micşorează. Există şi alte mijloace de frînare şi accelerare a informaţiei pe anumite porţiuni ale circuitului fundamental al buclei de reglare, cum ar fi circuitele *RC*, amplificatoarele etc.

Dacă în interiorul buclei de reglare apar perturbaţii, cu frecvenţa $f_z > f_0$, sistemul nu poate interveni pentru înlăturarea lor. El se comportă ca un filtru trece-jos cu frecvenţa maximă limită egală cu $f_0 = 1/T_0$.

Cu noţiunile stabilite mai sus se trece la enunţarea criteriilor informaţionale de stabilitate şi calitate.

3. ENUNŢUL CRITERIILOR

Un sistem de reglare automată este absolut stabil dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :

$$t_{BIA} > t_{ADB} \text{ şi}$$

$$f_z < f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{t_{ADB} + t_{BIA}}. \tag{3}$$

Precizia de reglare a unui sistem de reglare automată este cu atît mai mare cu cît T_0 este mai mic şi f_z mai mic decît f_0. Astfel exprimat,

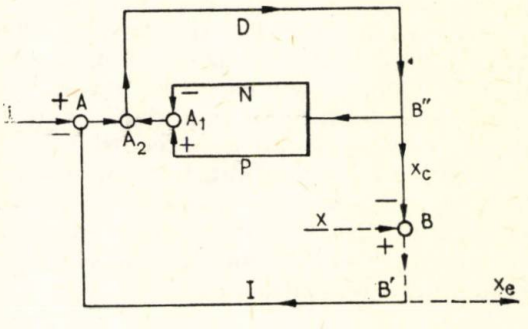


Fig. 3. — Schema bloc a unei bucle de reglare cu regulator PI:

A_1, A_2 — noduri secundare de însumare a informaţiei; B', B'' — puncte de bifurcaţie ainformaţiei.

$$\lim_{t \to 0} \frac{x_i - x_e}{x_i} \to 0 \text{ cînd}$$

$$T_0 \to 0 \text{ şi } f_z < f_0. \tag{4}$$

Un sistem de reglare automată este absolut instabil cînd

$$t_{BIA} < t_{ADB} \text{ și}$$
$$f_z > f_0 = \frac{1}{T_0}. \tag{5}$$

Un sistem este relativ stabil cînd

$$t_{BIA} < t_{ADB} \text{ și}$$
$$f_z < f_0 = \frac{1}{T_0}. \tag{6}$$

La limită ,cînd

$$t_{BIA} < t_{ADB} \tag{7}$$
$$\lim_{t \to \infty} \frac{x_i - x_e}{x_i} \to \infty,$$

sistemul este absolut instabil și

$$x_e = x \neq x_i. \tag{8}$$

Mărimea reglată x_e poate să ia orice valoare ca și mărimea de reglat x.

Criteriile practice Nichols și Ziegler de acordare a regulatoarelor se referă numai la cazul (6), unde, în dauna calității reglării, se evită uzarea prematură a elementului de execuție ce ar fi nevoit să execute curse întregi și cu frecvențe prea mari dacă s-ar afla în situația (3).

Cînd T_0 este suficient de mare și nu împietează funcționarea elementului de execuție, criteriul (3) de stabilitate indică folosirea regulatoarelor bipoziționale. Împreună, criteriile informaționale de stabilitate și calitate, respectiv (3) și (4), indică o nouă cale de urmat în domeniul practicii reglării. Obținerea unei reglări de calitate mare ne obligă să proiectăm sisteme cu T_0 cît mai mic, deci, din elemente cu constante de timp mici (rapide). Relațiile (3) ne arată cînd putem folosi numai regulatoarele bipoziționale care sînt ieftine, simple, robuste, sensibile și asigură reglajul de calitate maximă dacă se alege convenabil T_0 în raport cu posibilitățile elementului de execuție.

Criteriul de stabilitate (3) indică și faptul că trebuie să ne îndreptăm atenția, în special spre perfecționarea elementelor care intră în componența circuitului direct ADB, spre a putea să ne încadrăm numai în limitele stabilității absolute indicate de el și pentru a folosi în industrie numai regulatoare bipoziționale.

4. CONCLUZII

Buclele de reglare care folosesc regulatoare bipoziționale pot fi conectate direct, fără nici un artificiu, la sistemele conduse cu ajutorul calculatoaelor numerice.

Timpul fundamental de rezonanță, T_{0r}, la sistemele de reglare realizate practic, se determină, ca și la acordarea regulatoarelor, prin procedeul lui Nichols și Ziegler.

Cînd se proiectează o nouă buclă de reglare, calculul lui T_{0r} se face folosind metodele clasice, deci ecuațiile diferențiale care descriu comportarea sistemului. Pentru T_{0r} se întrevăd metode de calcul mai simple dacă se pornește de la noțiunea de informație definită de (1).

Lucrarea de față constitue o încercare de găsire a unei căi pentru a ieși din impasul la care s-a ajuns în studiul sistemelor de reglare automată.

Primită la redacție la 13 iunie 1974

APLICAREA METODEI ELEMENTULUI FINIT ÎN ANALIZA STRUCTURILOR CU NELINIARITATE GEOMETRICĂ I: REGIM STATIC

de V. GIURGIUȚIU *)
I.M.F.C.A.

Lucrarea tratează structurile elastice cu neliniaritate de tip geometric prin metoda elementului finit, în speță metoda deplasărilor, în acordanță cu teoriile generale existente. În analiza statică se introduce conceptul matricei de rigiditate incrementală, punînd în lumină metodele de calculare a componentelor ei, în special a matricei de rigiditate geometrică $\boldsymbol{K}_G$. Metoda este exemplificată pe structuri de tip bară-grindă; se remarcă o rigidizare progresivă a structurii cu creșterea sarcinii, rezultatele fiind comparate cu cele numerice-analitice.
În analiza dinamică se introduce conceptul de integrare pas-cu-pas, care, cuplat cu cel al matricei de rigiditate incrementală, permite integrarea numerică a ecuației diferențiale și matriceale neliniare, folosindu-se o schemă cu diferențe finite. Metoda este exemplificată din nou pe structuri bară-grindă, cu mase concentrate și cu masă distribuită, pentru care se remarcă o creștere considerabilă a frecvenței proprii cu mărimea amplitudinilor de oscilații.
Lucrarea cuprinde metode originale de îmbunătățire a convergenței analizei numerice, detaliile de calcul fiind prezentate în două anexe.
Atît pentru analiza statică, cît și pentru cea dinamică, s-au indicat domeniile practice în care metoda și-ar putea găsi o aplicare imediată.

LISTA DE SIMBOLURI ȘI NOTAȚII

Matrice și vectori:

$\boldsymbol{r}$ — vectorul deplasărilor,
$\boldsymbol{R}$ — vectorul forțelor,
$\boldsymbol{K}$ — matricea de rigiditate,
$\boldsymbol{K}_E$ — matricea contribuție „elastice" la rigiditate,
$\boldsymbol{K}_G$ — matricea contribuției „geometrice" la rigiditate,
$\boldsymbol{\rho}$ — vectorul deplasărilor nodale,
$\boldsymbol{P}$ — vectorul forțelor nodale,
$\boldsymbol{k}$ — matricea de rigiditate a elementului finit,
$\boldsymbol{\rho}_N$ — vectorul deformațiilor „naturale",
$\boldsymbol{P}_N$ — vectorul eforturilor „naturale",
$\boldsymbol{k}_N$ — matricea rigidității „naturale",

*) Doctorand la Aeronautics Department, Imperial College for Scierce and Technology Londra.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 2, 1975, P. 185–200

$\boldsymbol{a}_N$ — matricea de transformare la nivel de deformație elementară,
$\boldsymbol{a}$ — matricea de tip boolian de selectare a deplasărilor nodale,
$\boldsymbol{\Lambda}_i$ — matricea patratică a contribuției efortului natural $\boldsymbol{P}_{N_i}$,
$\boldsymbol{b}$ — matricea de transformare a sarcinilor exterioare în eforturi interioare,
ε — vectorul erorilor admisibile,
$\boldsymbol{M}$ — matricea de masă,
$\boldsymbol{C}$ — matricea de amortizare,
$\boldsymbol{F}(t)$ — vectorul forțelor de excitație.

Scalari:

E — modulul lui Young,
I — momentul de inerție al secțiunii de bară-grindă,
A — aria secțiunii de bară-grindă,
L — lungimea structurii,
l — lungimea elementului finit de bară-grindă,
P — sarcina laterală concentrată,
$P_0 = \dfrac{EI}{L^2}$ — sarcină reprezentativă,
$\lambda = \dfrac{AL^2}{I}$ coeficientul de svelteță.

Speciale:

Δ — arată că valoarea este incrementală,
n — indică poziția după n intervale,
$\cdot = \partial/\partial t$.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Metoda elementului finit, prezentînd interes teoretic-metodologic și practic general, a atras în mod deosebit atenția cercetătorilor și specialiștilor. Mai ales în ultima perioadă, odată cu extinderea utilizării calculatoarelor electronice în activitatea de cercetare și proiectare, de stabilire a „optimului" constructiv al pieselor și mecanismelor, subiectul a revenit în actualitate depășind granițele strict academice în direcția producției efective, în special în industria construcțiilor de mașini.

Întrucît în domeniul analizei neliniare — avem în vedere neliniaritatea de ordin geometric — metodele analitice nu se verifică integral, cel puțin pînă în prezent, sau aplicarea lor vizează cazuri și situații limită, ceea ce împiedică folosirea lor în practică, ne propunem ca în acest studiu să formulăm — și formalizăm — ipoteza „spargerii de fronturi", fără alte pretenții metodologice sau de concept. Ne permitem însă să observăm că extinderea metodei elementului finit la probleme neliniare a deschis orizonturi noi în teoria elasticității și rezistenței materialelor, înlesnind, astfel, analizarea situațiilor concrete care pînă atunci nu puteau fi abordate decît sub condiția restrictivă a tezei micilor deformații.

Încercarea de a stabili filiații abstracte[1] fixează bazele teoretice ale metodei în „notații matriceale" [2], precum și în „notații tensoriale" [3]. În studiul de față s-au adoptat metode și notații[4] cunoscute și acceptate ca originale în literatura științifică de specialitate.

Pentru exemplificarea metodei s-a luat în considerație un caz simplu, acela al structurilor de tip bară-grindă. Problema grinzilor a cunoscut o largă analiză și în trecut, începînd cu teoria lui Euler care se aplica deformațiilor mici, iar în ultimul sfert de veac numeroși autori au încercat soluționarea problemei marilor deformații cu neliniaritate geometrică.

Bisshop și Drucker (ref. 12) au rezolvat problema în mod analitic pentru rigiditate axială infinită ($\lambda = \infty$); o metodă matriceală de element finit a fost folosită de Saadatian (ref. 8) pentru $\lambda = 100$ (de fapt orice valoare a lui λ poate fi considerată de metodă). În acest studiu propunem o metodă nouă, respectiv cu convergență îmbunătățită.

În domeniul dinamic, problema a fost abordată mai mult analitic (cu integrare numerică) dar și matriceal. Chu și Hermann (ref. 11) consideră soluția analitică a unei bare cu masa uniform distribuită și articulată la ambele capete drept caz limită al unei plăci rectangulare articulate pe contur. Sabir și Lock (ref. 10) ajung la rezultate similare printr-o analiză matriceală, dar ambele analize presupun reazemele articulate drept rigide, ceea ce introduce eforturi de membrană mult mai mari decît pentru barele în catilever. Verna și Murty (ref. 13) dezvoltă o metodă analitică pentru studiul barelor în cantilever cu masă distribuită și mase concentrate, dar rezultatele lor se restrîng la valori relativ mici ale marilor deformații. În acest studiu, printr-o reformulare a condițiilor inițiale, s-a putut extinde valoarea amplitudinii la valori apropiate de maximul posibil, ceea ce pune în evidență mult mai clar efectul de sporire a frecvenței proprii de vibrații cu creșterea amplitudinii.

2. ANALIZA STATICĂ A STRUCTURILOR CU NELINIARITATE GEOMETRICĂ

2.1. Așa cum s-a menționat, lucrarea de față folosește notațiile și definițiile introduse de Argyris și al.[5] în analiza de element finit prin metoda deplasărilor; deoarece această metodă este acum larg răspîndită, nu vom insista aici asupra detaliilor ei în cazul aplicării metodei la structurile liniare.

Pentru a se putea depăși limitarea introdusă de ipoteza comportării liniare s-a propus folosirea unei analize incrementale[6]. Astfel, considerînd un sistem scalar, pe curba sarcină-deformație asociată (fig. 2.1) se poate pune în evidență în orice punct A rigiditatea tangențială K_Δ care leagă

[1]) O descriere rezumativă a cercetărilor efectuate după 1958 a se vedea în H. C. Martin, ref. 7.

[2]) vezi J.H. Argyris în ref. 2 și ref. 3, sau J.S. Prrzemieniecki în ref. 5.

[3]) vezi J.W. Wissmann în ref. 6.

[4]) vezi J.H. Argyris în ref. 1 și ref. 2.

[5]) pentru o descriere amplă vezi Argyris (ref. 1 și 2) sau Prezemieniecki (ref. 5).

[6]) vezi, de exemplu, Argyris (ref. 2, pag. 105) sau Turner (ref. 14).

valorile incrementale ale sarcinii R_Δ de cele ale deformației r_Δ. Generalizînd pentru n grade de libertate, vom obține relația matriceală

$$\boldsymbol{r}_\Delta = \boldsymbol{K}_\Delta^{-1} \boldsymbol{R}_\Delta, \tag{2.1}$$

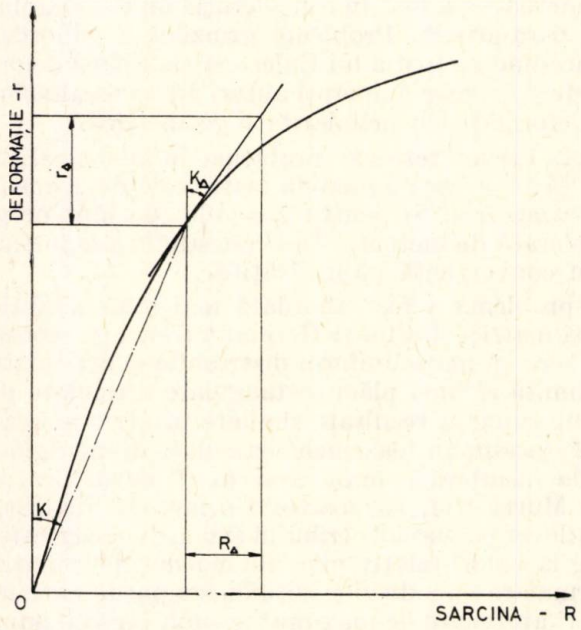


Fig. 2.1. — Curba tipică a deformației neliniare cu rigidizare progresivă în funcție de sarcină.

astfel extinzînd în domeniul neliniar cunoscuta relație liniară (aplicabilă în ipoteza micilor deformații)[7]:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{R}. \tag{2.2}$$

2.2. Înainte de a prezenta în detaliu modul de derivare a matricei $\boldsymbol{K}_\Delta$ de rigiditate incrementală, vom face următoarele ipoteze asupra deformației:

1) deformațiile mari ale structurii se datoresc în mod predominant deplasărilor de corp rigid (în special rotații),

2) deci deformațiile unitare (ε)sînt mici,

3) și deci legea lui Hooke a elasticității este încă aplicabilă.

Considerînd acum un element finit din structură, acesta va fi sub acțiunea forțelor nodale $\boldsymbol{P}$, avînd deformațiile nodale $\boldsymbol{\rho}$; ne vom reaminti[8] corespondența la nivel de element a ecuației (2.2):

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{P}. \tag{2.3}$$

Să presupunem în continuare că am efectuat o încărcare a structurii în domeniul neliniar la valorile $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}$ $(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\rho})$ și ne propunem să adăugăm

[7]) unii autori (ref. 10) extind relația (2.2) și la nivel integral, imaginînd o rigiditate secanta $\boldsymbol{K}$, dar ținem să subliniem caracterul absolut fictiv al acesteia (fig. 2.1).

[8]) vezi Argyris (ref. 1, p. 22—26).

o sarcină suplimentară mică $\boldsymbol{R}_\Delta$ ce va crea forțe nodale adiționale $\boldsymbol{P}_\Delta$ și va produce o deformare adițională $\boldsymbol{r}_\Delta$ (respectiv $\boldsymbol{\rho}_\Delta$ la nivel de element). De asemenea, să ne reamintim conceptul de „moduri naturale de deformație"[9] desemnate prin perechea $\boldsymbol{P}_N - \boldsymbol{\rho}_N$, conform relației

$$\boldsymbol{\rho}_N = \boldsymbol{a}_N \boldsymbol{\rho}, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}_N^t \boldsymbol{P}_N. \tag{2.5}$$

Și notînd valorile incremental asociate cu $\boldsymbol{P}_{N_\Delta}$ și $\boldsymbol{\rho}_{N_\Delta}$, vom putea scrie, conform unui principiu variațional,

$$\delta(\boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}_N^t \boldsymbol{P}_N),$$

$$\boldsymbol{P}_\Delta = \boldsymbol{a}_{N_\Delta}^t \boldsymbol{P}_N + \boldsymbol{a}_N^t \boldsymbol{P}_{N_\Delta}, \tag{2.6}$$

unde matricea de transformare $\boldsymbol{a}_N$ suferă o variație $\boldsymbol{a}_{N_\Delta}$ datorită deformației adiționale $\boldsymbol{\rho}_\Delta$ a elementului finit, conform relației

$$\boldsymbol{\rho}_{N_\Delta} = (\boldsymbol{a}_N + \boldsymbol{a}_{N_\Delta}) \boldsymbol{\rho}_\Delta. \tag{2.7}$$

Creșterea corespunzătoare în „forțele naturale" (eforturi unitare generalizate) $\boldsymbol{P}_N$ fiind $\boldsymbol{P}_{N_\Delta}$.

Aplicînd principiul lucrului mecanic virtual, cu deplasările virtuale $\boldsymbol{\rho}_\Delta$ și $\boldsymbol{\rho}_{N_\Delta}$, avem, la sfîrșitul incrementului de sarcină,

$$\boldsymbol{\rho}_\Delta^t(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_\Delta) = \boldsymbol{\rho}_{N_\Delta}^t (\boldsymbol{P}_N + \boldsymbol{P}_{N_\Delta}) = \boldsymbol{\rho}_\Delta^t(\boldsymbol{a}_N^t + \boldsymbol{a}_{N_\Delta}^t)(\boldsymbol{P}_N + \boldsymbol{P}_{N_\Delta}),$$

de unde

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_\Delta = (\boldsymbol{a}_N^t + \boldsymbol{a}_{N_\Delta}^t)(\boldsymbol{P}_N + \boldsymbol{P}_{N_\Delta}),$$

și folosind (2.5)

$$\boldsymbol{P}_\Delta = \boldsymbol{a}_N^t \boldsymbol{P}_{N_\Delta} + \boldsymbol{a}_{N_\Delta}^t \boldsymbol{P}_N. \tag{2.8}$$

Relația (2.8) prezintă o aproximare de ordinul 1 a incrementului de forțe nodale $\boldsymbol{P}_\Delta$.

Primul termen al relației (2.8) poate fi prelucrat în modul clasic al teorei deplasărilor, producînd expresia[10]

$$\boldsymbol{a}_N^t \boldsymbol{P}_{N_\Delta} = (\boldsymbol{a}_N^t \boldsymbol{k}_N \boldsymbol{a}_N) \boldsymbol{\rho}_\Delta, \tag{2.8a}$$

---

[9]) vezi Argyris ref. 3, p. 13—18. Să remarcăm că de fapt perechea $\boldsymbol{P}_N - \boldsymbol{\rho}_N$ reprezintă un tip generalizat de eforturi ($\boldsymbol{P}_N$) și deformații ($\boldsymbol{\rho}_N$) unitare.

[10]) vezi Argyris, ref. 2, p. 14.

și vom nota cu $\boldsymbol{k}_E$ cunoscuta matrice de rigiditate elastică la nivel de element :

$$\boldsymbol{k}_E = \boldsymbol{a}_N^t \, \boldsymbol{k}_N \, \boldsymbol{a}_N. \tag{2.9}$$

Al doilea termen ne va da contribuția suplimentară datorată eforturilor interioare $\boldsymbol{P}_N$ deja prezente în element la începutul incrementului și datorate încărcărilor anterioare. Se produce un efect de rigidizare deoarece deformațiile adiționale se vor efectua cu un plus de lucru mecanic necesar a se efectua tocmai asupra acestor eforturi interioare deja prezente. Pentru evaluarea acestui termen să presupunem că putem exprima variația matricei $\boldsymbol{a}_N$ sub forma

$$(\boldsymbol{a}_{N_\Delta})_i = \frac{\partial (\boldsymbol{a}_N)_i}{\partial \boldsymbol{\rho}} \, \boldsymbol{\rho}_\Delta, \tag{2.10}$$

unde i reprezintă indicele rîndului numărul i din matricea $\boldsymbol{a}_N$.

În acest caz, vom putea scrie în continuare :

$$\boldsymbol{a}_{N_\Delta}^t \boldsymbol{P}_N = (\Sigma \boldsymbol{P}_{N_i} \boldsymbol{\Lambda}_i) \, \boldsymbol{\rho}_\Delta, \tag{2.11}$$

unde

$$\boldsymbol{\Lambda}_i = \frac{\partial (\boldsymbol{a}_N)_i}{\partial \boldsymbol{\rho}}. \tag{2.12}$$

Deci notînd

$$\boldsymbol{k}_G = \Sigma \, \boldsymbol{P}_{N_i} \boldsymbol{\Lambda}_i, \tag{2.13}$$

vom putea exprima relația (2.8) în forma

$$\boldsymbol{P}_\Delta = (\boldsymbol{k}_E + \boldsymbol{k}_G) \, \boldsymbol{\rho}_\Delta, \tag{2.14}$$

unde $\boldsymbol{k}_G$ este rigiditatea geometrică.

Relația (2.14) se poate ansambla în modul cunoscut :

$$\boldsymbol{R}_\Delta = \Sigma \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{P}_\Delta \text{ și } \boldsymbol{\rho}_\Delta = \boldsymbol{a} \boldsymbol{r}_\Delta,$$

generînd relația între sarcină și deformație la nivel de structură :

$$\boldsymbol{R}_\Delta = [\Sigma \boldsymbol{a}^t \, (\boldsymbol{k}_E + \boldsymbol{k}_G) \, \boldsymbol{a}] \, \boldsymbol{r}_\Delta. \tag{2.15}$$

Expresia (2.15) poate fi exprimată sub forma relației (2.1), făcînd următoarele notații :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_\Delta &= \boldsymbol{K}_E + \boldsymbol{K}_G, \\ \boldsymbol{K}_E &= \Sigma \boldsymbol{a}^t \, \boldsymbol{k}_E \, \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{K}_G &= \Sigma \boldsymbol{a}^t \, \boldsymbol{k}_G \, \boldsymbol{a}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

unde $\boldsymbol{K}_E$ se numește matricea de rigiditate „elastică" a structurii, iar $\boldsymbol{K}_G$ este cunoscută ca matricea de rigiditate „geometrică", și reprezintă rigiditatea adițională introdusă de existența unor eforturi în structură ($\boldsymbol{P}_N$) la începutul aplicării incrementului de sarcină. Bineînțeles, $\boldsymbol{K}_E$ la rîndul ei

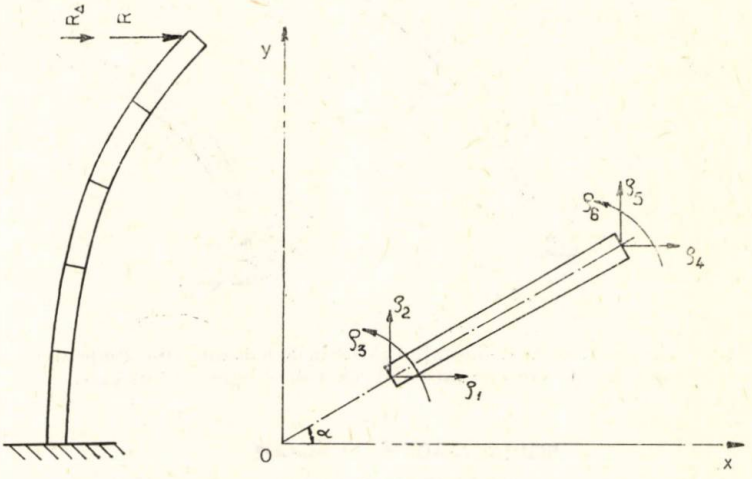


Fig. 2.2. — Analiză incrementală a structurilor bară-grindă : *a*) discretizarea în elemente finite ; *b*) elementul finit de bară-grindă cu șase deplasări nodale.

va fi derivată conform configurației în starea deformată la începutul fiecărui nou increment.

2.3. Pentru exemplificarea teoriei de mai sus să considerăm o structură de tipul bară-grindă, în speță o bară încastrată la un capăt (fig. 2.2). Structura este împărțită (fig. 2.2*a*) în elemente finite de tipul celui din figura 2.2*b*. În figura 2.3 sînt prezentate modurile de deformație naturală ale acestui tip de element și anume : deformația de elongare asociată cu efortul axial (fig. 2.3*a*), deformația de încovoiere pură (fig. 2.3 *b*) și cea de încovoiere în forfecare (fig. 2.3 *c*). Detaliile privind matricele $\boldsymbol{a}_N$ și $\boldsymbol{\Lambda}_i$, precum și metoda de calcul și schema logică a programului de calculator sînt prezentate în anexa 1.

Analiza a fost făcută pentru o valoare a coeficientului de svelțețe, $\lambda = 100$, rezultatele fiind prezentate în figurile 2.4 și 2.5, unde, în mod nedimensional, s-a prezentat variația săgeții la vîrf (δ/L) și contracției (Δ/L) cu sarcina (P/P_0, $P_0 = EI/L^2$), pe două domenii de încărcare. În figura 2.4, reprezentînd domeniul restrîns ($P/P_0 < 10$), s-a trasat comparativ rezultatul analitic[11], corelația fiind bună.

Avantajele metodei matriceale devin astfel evidente : pe de o parte, se pot analiza structuri reale cu o valoare finită a svelțeței, ceea ce este deocamdată practic imposibil cu metodele analitice, pe de altă parte, flexibilitatea metodei generale permite cu schimbări minore în programul

[11]) pentru λ = infinit vezi Bisshopp și Drucker în ref. 12.

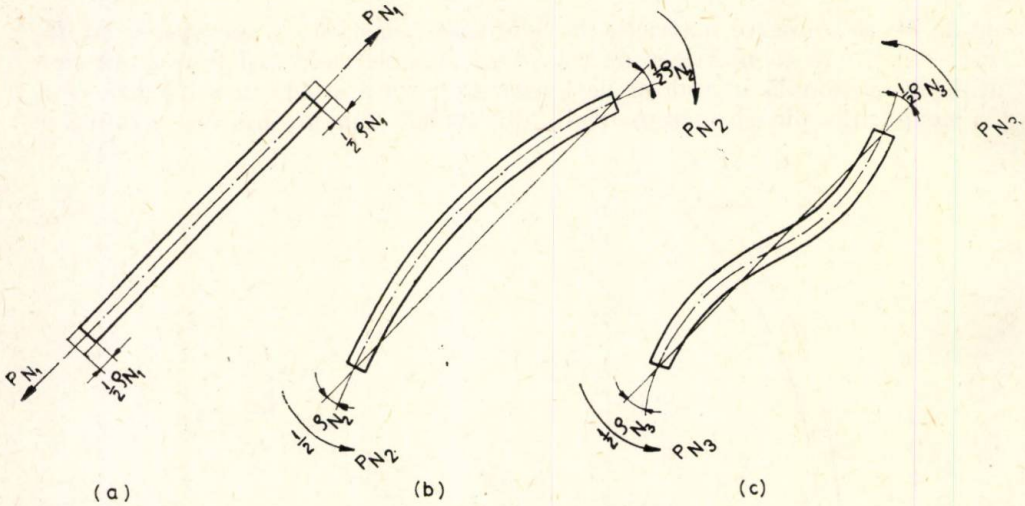


Fig. 2.3. — Modurile naturale de deformație și eforturile naturale asociate pentru elementul de bară grindă : *a*) elongație ; *b*) încovoiere pură, *c*) forfecare.

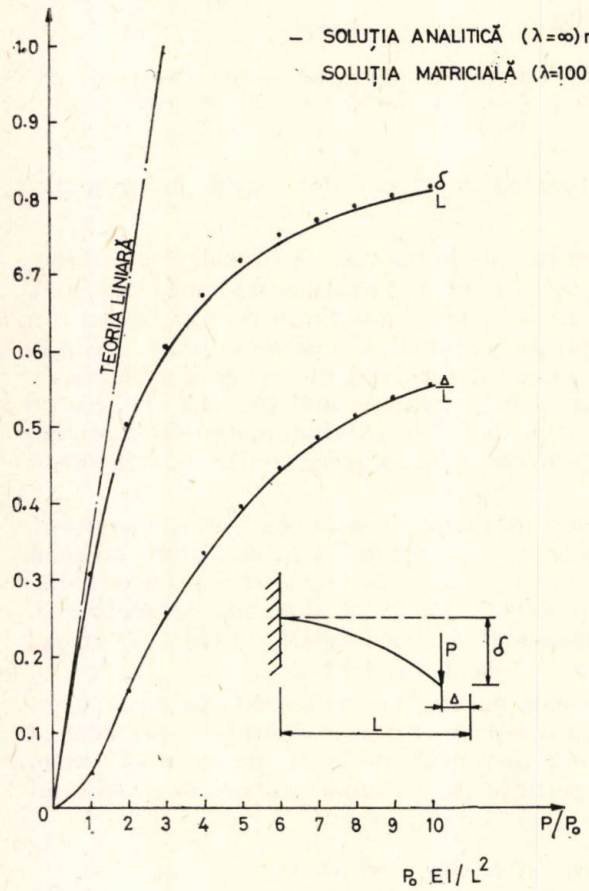


Fig. 2.4. — Rezultatele analizei de element finit pe domeniul restrîns de încărcare comparate cu rezultatele numerice-analitice.

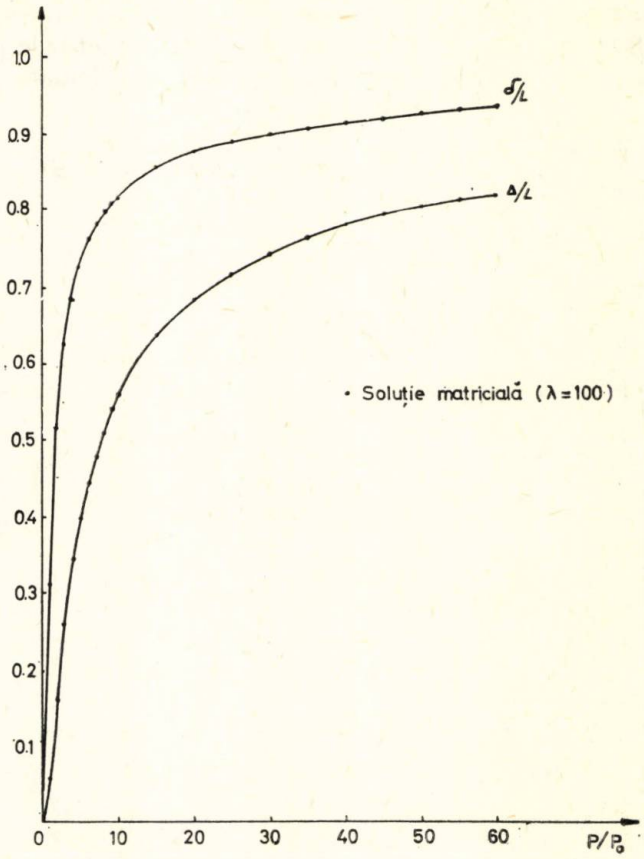


Fig. 2.5. — Rezultatele analizei de element finit pe domeniul extins de încărcare.

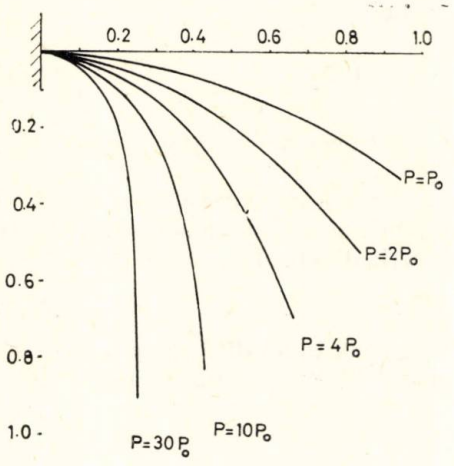


Fig. 2.6. — Deformatele grinzii în cantilever, pentru diferite valori ale sarcinii laterale.

de calculator, să se analizeze orice tip de structură aparținînd unei aceleași clase de element finit, ca, de exemplu, structurile prezentate în figura 2.7.

2.4. Pentru reducerea timpului de calculator, și deci a costului ana-

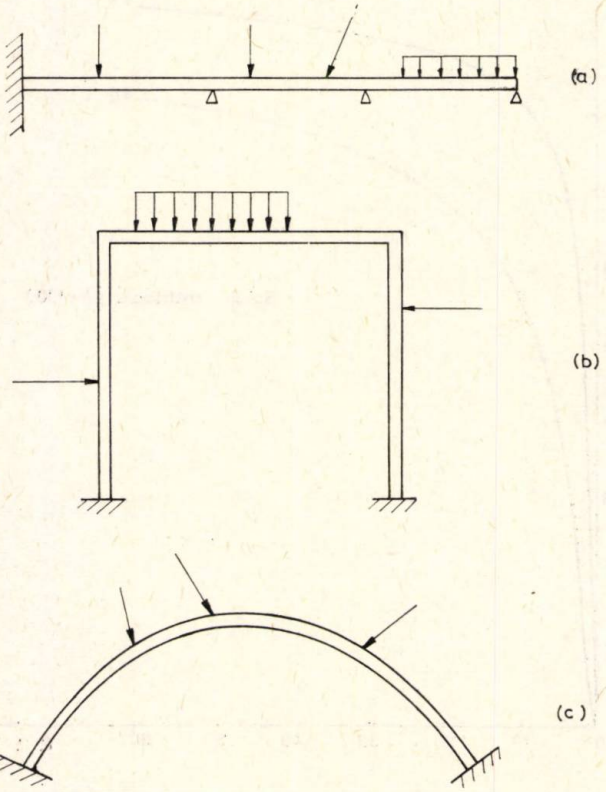


Fig. 2.7. — Alte tipuri de structuri bară-grindă în care studiul deformațiilor mari prezintă interes: *a*) grinzi pe reazeme multiple; *b*) grinzi portal: *c*) arce.

lizei, se recomandă folosirea unor metode de îmbunătățire a convergenței. În analiza de față s-au folosit doua metode originale[12]), și anume :

a) o variație a metodei generale a aproximațiilor de ordinul doi aplicată în calculul matriceal [13]) ce se exprimă în forma

$$\boldsymbol{r}_\Delta = \left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{K}_{\Delta_0}^{-1} + \boldsymbol{K}_{\Delta_1}^{-1}\right)\right]\boldsymbol{R}_\Delta, \tag{2.17}$$

unde indicii „0" și „1" indică, respectiv, stările de început și de sfîrșit a pasului incremental.

b) o aplicare originală a metodei matriceale mixte, și anume în aflarea eforturilor naturale $\boldsymbol{P}_N$ pe considerente de echilibru static în fiecare configurație deformată, conform unei relații de tipul

$$\boldsymbol{P}_N = \boldsymbol{bR}. \tag{2.18}$$

Folosind metodele de mai sus s-a reușit ca în analiză să se folosească pași incrementali de valoare relativ mare ($\Delta P/P_0 = 0{,}5 - 1{,}0$).

[12]) pentru detalii vezi anexa 1.
[13]) vezi, de exemplu, Argyris, ref. 4, p. 240.

ANEXA 1

CALCULUL DEFORMAȚIEI STATICE CU AMPLITUDINE MARE ÎNTR-O STRUCTURĂ DE TIP BARĂ-GRINDĂ CU NELINIARITATE GEOMETRICĂ

A.1.1. Calculul structurilor de tip bară-grindă se bazează pe divizarea structurii (fig. 2.2*a*) într-un număr de elemente finite (fig. 2.2*b*).

În element sînt considerate trei stări de deformație (moduri naturale de deformație ρ_N), care, împreună cu eforturile generalizate $\boldsymbol{P}_N$ asociate, produc starea de deformație și de eforturi reală din fiecare element, conform relațiilor :

$$\rho_N = \boldsymbol{a}_N \rho, \tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{a}_N^t \boldsymbol{P}_N. \tag{A.2}$$

Aceste trei moduri naturale de deformație sînt (fig. 2.3) : deformația axială (elongație) (ρ_{N1}, $\boldsymbol{P}_{N1}$), deformația de încovoiere pură (ρ_{N2}, $\boldsymbol{P}_{N2}$), și deformația de forfecare (ρ_{N3}, $\boldsymbol{P}_{N3}$).

Nu vom insista aici asupra modului de tratare a problemei pentru situația clasică a deformațiilor mici și liniare deoarece aceasta a intrat deja în uzul curent a analizei de element finit[14]).

Pentru rezolvarea problemei deformațiilor de amplitudine mare, cu neliniaritate geometrică, este necesar, așa cum s-a arătat în capitolul 2, să se adopte o metodă incrementală, în care sarcina este crescută treptat în pași mici, fiecare pas fiind aproximativ o funcție liniară de tipul

$$\boldsymbol{r}_\Delta = \boldsymbol{K}_\Delta^{-1} \boldsymbol{R}_\Delta, \tag{A.3}$$

unde $\boldsymbol{K}_\Delta$ va avea o nouă valoare pentru fiecare nou pas. În capitolul 2 s-a prezentat fundamentul teoretic al derivării matricei $\boldsymbol{K}_\Delta$. Conform formulei finale (2.16) s-a stabilit că în $\boldsymbol{K}_\Delta$ intră două contribuții și anume :

a) $\boldsymbol{K}_E$, matricea „elastică" corespunzătoare rigidității unei structuri avînd forma geometrică corespunzătoare structurii deformate, dar care nu include efectul eforturilor interioare deja prezente în structura deformată la începutul noului pas incremental.

b) $\boldsymbol{K}_G$, matricea „geometrică" care acoperă tocmai contribuția eforturilor interioare $\boldsymbol{P}_N$ deja existente în structura deformată la începutul unui nou pas incremental.

Dacă determinarea lui $\boldsymbol{K}_E$ nu prezintă dificultăți, folosindu-se în acest scop metodele uzuale din calculul liniar de element finit, determinarea lui $\boldsymbol{K}_G$ este oarecum mai dificilă, necesitînd o analiză mai detaliată. Conform relațiilor (2.13) și (2.16), avem :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_G &= \Sigma \boldsymbol{P}_{N_i} \boldsymbol{\Lambda}_i, \\ \boldsymbol{K}_G &= \Sigma \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{k}_G \boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Evaluarea matricelor $\boldsymbol{\Lambda}_i$ se poate face pe două căi :

---

[14]) vezi Argyris, ref. 2.

a) se poate evalua direct $\mathbf{\Lambda}_i$ conform relației dedusă anterior (2.12) :

$$\mathbf{\Lambda}_i = \frac{\partial(\boldsymbol{a}_N)_i}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \tag{A.5}$$

unde $(\boldsymbol{a}_N)_i$ sînt rîndurile matricei $\boldsymbol{a}_N$ de transformare a deformațiilor nodale $\boldsymbol{\rho}$ în deformații naturale $\boldsymbol{\rho}_N$:

$$\boldsymbol{a}_N = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{-2\sin\alpha}{L} & \dfrac{2\cos\alpha}{L} & 1 & \dfrac{2\sin\alpha}{L} & \dfrac{-2\cos\alpha}{L} & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.6}$$

iar diferențierea $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}$ se face conform relației

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{b}} = \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial b_k} \right\},$$

unde $\boldsymbol{a} = \{a_j\}, \qquad \boldsymbol{b} = \{b_k\};$

b) pe de altă parte, se poate deriva $\mathbf{\Lambda}_i$ prin analiza detaliată a mecanismului, conform căruia fiecare din eforturile interioare P_{Ni} produc rigidizarea elementului finit.

Indiferent de calea adoptată, vom avea, pentru elementul din figura 2.2*b* :

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \boldsymbol{0}, \tag{A.7}$$

$$\mathbf{\Lambda}_3 = \frac{2}{L^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dar, afară de contribuția $\mathbf{\Lambda}_1$, efortul axial P_{N1} va mai avea și o altă contribuție[15]) ce se poate exprima la nivelul rigidității natuiale $\boldsymbol{k}_N$ și anume : dacă inițial aveam

$$\boldsymbol{k}_N = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 3EI \end{bmatrix}, \tag{A.8}$$

[15]) Această contribuție este mică și, de obicei, ignorată de alți autori.

includerea efectului de forță axială va genera

$$\boldsymbol{k}_N = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 3EI \end{bmatrix} + P_{N1}L\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix}. \tag{A.9}$$

A.1.2. După determinarea matricei incrementale de rigiditate $\boldsymbol{K}_\Delta$, calculul deformatei se face conform ecuației (A.3) în pași mici $\boldsymbol{R}_\Delta$ de sarcină. Dar practica a arătat că pașii $\boldsymbol{R}_\Delta$ trebuie să fie relativ foarte mici pentru a se evita acumularea catastrofică a erorilor, și de aceea operațiunea poate deveni costisitoare în termeni ai timpului de calculator. Pentru îmbunătățirea convergenței și deci adoptarea de pași incrementali relativ mari s-au folosit două metode :

a) Aproximație de ordinul doi în evaluare lui $\boldsymbol{K}_\Delta$. Relația (2.1) ne dă $\boldsymbol{K}_\Delta$ la începutul pasului incremental, și dacă pasul este mare, eroarea introdusă este considerabilă. Argyris (ref. 4) a propus formula

$$\boldsymbol{K}_\Delta = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{K}_{\Delta_0} + \boldsymbol{K}_{\Delta_1}\right], \tag{A.10}$$

$$\boldsymbol{K}_{\Delta_0} = \boldsymbol{K}_\Delta(\boldsymbol{r}_0); \quad \boldsymbol{K}_{\Delta_1} = \boldsymbol{K}_\Delta(\boldsymbol{r}_1); \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_\Delta, \tag{A.11}$$

unde $\boldsymbol{K}_{\Delta_0}$ și $\boldsymbol{K}_{\Delta_1}$ sînt valorile lui $\boldsymbol{K}_\Delta$ la începutul și respectiv, la sfîrșitul pasului; dar cum $\boldsymbol{r}_1$ la sfîrșitul pasului este tocmai necunoscută, formula (A.10) se va folosi iterativ. După fiecare iterație se va face o comparație a pasului de deformație realizat cu cel realizat în iterația anterioară, iterațiile terminîndu-se atunci cînd pașii din două iterații succesive sînt identici conform relației :

$$|(\boldsymbol{r}_\Delta)_i - (\boldsymbol{r}_\Delta)_{i-1}| < \varepsilon. \tag{A1.2}$$

Folosirea formulei (A.11) în expresia (2.1) va genera

$$(\boldsymbol{r}_\Delta) = \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_{\Delta_0} + \boldsymbol{K}_{\Delta_1})\right]^{-1}\boldsymbol{R}_\Delta. \tag{A.13}$$

Dar s-a observat că expresia (A.13) nu este de loc satisfăcătoare în cazul încărcării cu forță laterală a unei bare încastrate la un capăt (structură cu rigidizare progresivă), ci din contră, produce divergență. De aceea autorul propune folosirea formulei derivate :

$$\boldsymbol{r}_\Delta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K}_{\Delta_0}^{-1} + \boldsymbol{K}_{\Delta_1}^{-1})\boldsymbol{R}_\Delta. \tag{A.14}$$

Această formulă a fost folosită în analiza de față cu rezultate foarte bune. Pe baza ei s-a elaborat programul de calculator cu schema logică din figura A.1. Convergența metodei este foarte bună, valori tipice fiind : increment

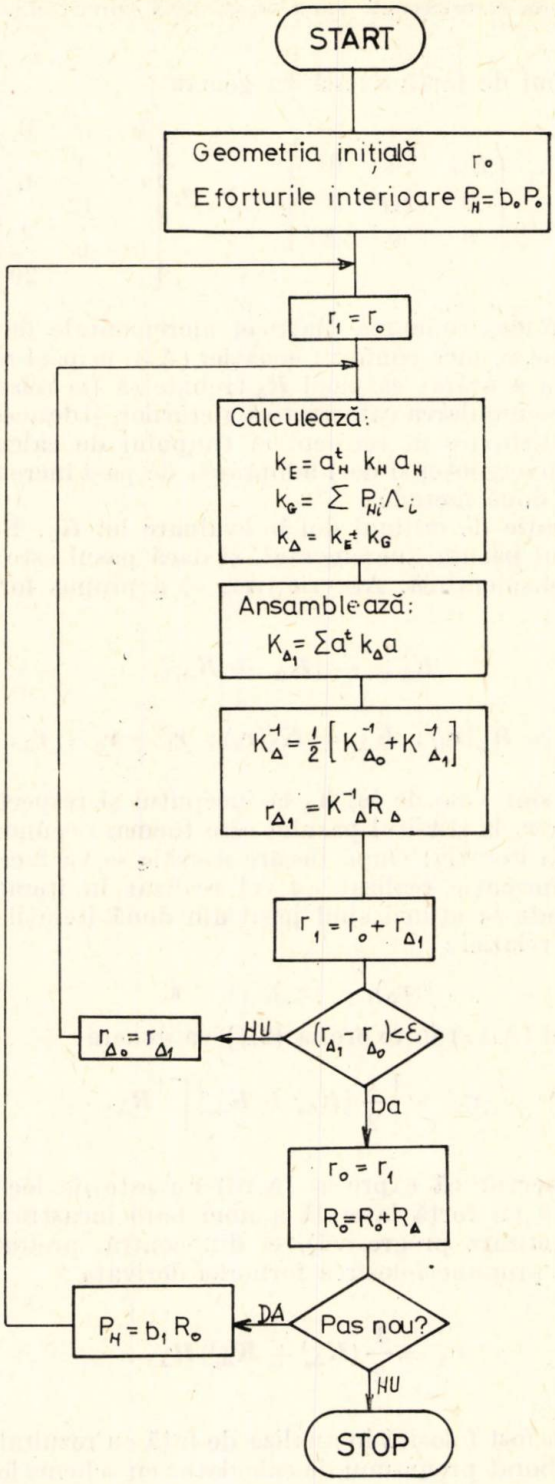

START
Geometria inițială r_0
Eforturile interioare $P_H = b_0 P_0$
$r_1 = r_0$
Calculează:
$k_E = a_H^t \; k_H \; a_H$
$k_G = \sum P_{Hi} \Lambda_i$
$k_\Delta = k_E + k_G$
Ansamblează:
$K_{\Delta_1} = \sum a^t \; k_\Delta \; a$
$K_\Delta^{-1} = \frac{1}{2}\left[K_{\Delta_0}^{-1} + K_{\Delta_1}^{-1}\right]$
$r_{\Delta_1} = K_\Delta^{-1} R_\Delta$
$r_1 = r_0 + r_{\Delta_1}$
$(r_{\Delta_1} - r_{\Delta_0}) < \varepsilon$
NU
$r_{\Delta_0} = r_{\Delta_1}$
Da
$r_0 = r_1$
$R_0 = R_0 + R_\Delta$
Pas nou?
DA
$P_H = b_1 R_0$
NU
STOP

Fig. A.1.

de sarcină $P/P_0 = 0{,}5 - 1{,}0$ ($P_0 = EI/L^2$); $\varepsilon = 10^{-5}$; numărul de iteraţii pe pas $= 5 - 6$.

b) Una din dificultăţile majore întîlnite în elaborarea analizei a fost legată de determinarea forţelor interioare. Conform teoriei matriceale a deformaţiilor, s-ar folosi, în mod incremental, relaţiile :

$$(\boldsymbol{P}_N)_\Delta = (\boldsymbol{k}_N)_n \, (\boldsymbol{a}_N)_n \, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_\Delta)_n , \tag{A.15}$$

$$(\boldsymbol{P}_N)_n = (\boldsymbol{P}_N)_{n-1} + (\boldsymbol{P}_N)_\Delta . \tag{A.16}$$

Dar s-a remarcat că expresia (A.15) este foarte sensibilă la erorile acumulate în special în $(\boldsymbol{a}_N)_n$ şi $(\boldsymbol{r}_\Delta)_n$, necesitînd, pentru convergenţă, valori incrementale de ordinul $\Delta P/P_0 = 0{,}001$. De aceea, pentru valorile mari ale pasului P folosite în analiza de faţă ar da naştere la valori în $\boldsymbol{P}_{N\Delta}$, care nu satisfac nici pe departe echilibrul static în structura deformată. Această dificultate a fost depăşită prin adoptarea unei metode care iese din cadrul riguros al teoriei deplasărilor şi anume determinarea valorii eforturilor interioare $\boldsymbol{P}_N$ pe considerente de echilibru static în starea deformată (2.18). Aceasta metodă a dat rezultate bune şi se poate aplica în analiza oricărei structuri static determinate.

Primită la redacţie la 24 iulie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. J.H. Argyris şi S. Kelsey, *Energy theorems and structural analysis*, Butterworths, 1960.
2. J.H. Argyris şi al., *Matrix methods of structural analysis a precis of recent developments*, AGAR-Dograph 72, Pergamon, 1963.
3. J.H. Argyris, *Continua and discontinua*, in Matrix methods in structural analysis, conference at Wright-Patterson Air-Force Base, Ohio, Oct. 1965, AD 646300.
4. J.H. Argyris şi A.S.L. Chan, *Applications of finite elements in space and time*, Inginieur Archiv 41(1972), p. 235–257.
5. J.S. Przemieniecki, *Theory of matrix structural analysis*, Mc. Graw Hill, 1968.
6. J.W. Wissmann, *Nonlinear structural analysis*, tensor formulation, in Matrix methods etc.
7. H.C. Martin, *On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflections and stability problems*, in Matrix methods etc.
8. H.G. Saadetian, *The finite element matrix analysis of a beam in the buckled and post-buckled range*, MSc thesis (1967), Aeronautics Dept., Imperial College for Science and Technology, London.
9. S.P. Chan, H.L. Cox şi W.A. Benfield, *Transient analysis of forced vibrations of complex structural mechanical systems*, Jour. Roy. Aero. Soc., *66*, 457 (1962).
10. A.B. Sabir şi A.C. Lock, *Large amplitude, free vibratins of geometrically non-linear circular arches*, in Symposium on nonlinear dynamics, Loughborough Univ., March 1972.
11. Hu-Nan Chu şi G. Herrmann, *Influence of large amplitude of free vibrations of rectangular elastic plates*, Jour. Appl. Mech. *23*, 532 (1956).
12. K.E. Bishopp şi D.C. Drucker, *Large deflections of cantilever beams*, Quarterly of Applied Mathematics *3*, 272–274 (1945).
13. M.K. Verma şi A.V. Krishna Murty, *Nonlinear vibrations of nonuniform beams with concentrated masses*, Jour. Sound & Vibr, **33** *(1)* 1–12 (1974).

14. M.J. Turner, E.H. Dill, H.C. Martin și R.J. Melosh, *Large deflections of structures subject to heating & external loads*, Jour. Aerospace Sciences, *27* (1960).

15. T.H. Sanders, *Laminated springs* (1923).

16. N.K. Benson, *Some applications of the finite element methods in automobile design*, Conf. on The Application of Finite Elements in Mechanical Engineering Design, Institution of Mechanical Engineers, London, Oct. 1972.

17. R.E. Bishop, G.M.L. Gladwell și S. Michaelson, *The matrix analysis of vibrations*, Cambridge Univ. Press 1965.

18. V. Vâlcovici, Șt. Bălan și R. Voinea, *Mecanica teoretică*, Ed. tehnică, 1963.

19. L. Solomon, *Elasticitate liniară*, Ed. Academiei, 1969.

20. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, 1958.

21. C.C. Teodorescu, *Rezistența materialelor cu aplicații în domeniul feroviar*, Ed. Căi ferate.

ASUPRA UNOR PROBLEME DIN TEORIA STRUCTURILOR

de I. MUNTEANU
Institutul politehnic Timişoara

În lucrare se discută în mod unitar problemele de statica structurilor, de ordinul I şi II, cele de stabilitate şi cele de dinamica frecvenţelor proprii şi a celor forţate, prin prisma condiţiilor ce pot fi scrise, ca şi a metodelor de utilizat, pentru rezolvarea lor.
Rezultă concluzii unitare asupra acestor probleme, cu referire la structura de calcul, la conţinutul matricelor deformaţiilor şi rigidităţilor, numărului necunoscutelor etc.

1. Statica, dinamica şi stabilitatea structurilor formează un grup compact de discipline ale teoriei structurilor formate din bare, servind calculului şi proiectării raţionale şi economice a construcţiilor. Aceste discipline se întîlnesc la intersecţia dintre acţiuni (care pot fi statice sau dinamice), structura de rezistenţă şi materialul de construcţie (cu caracteristici elastice sau nu) şi rezolvă problema eforturi-deformaţii, respectiv a verificării stabilităţii sau rezonanţei structurii.

Lucrarea îşi propune să realizeze o privire unitară asupra acestor discipline, din punctul de vedere al metodelor de calcul utilizate.

2. În baza dualităţii forţă-deplasare, iar în cazul corpului deformabil efort-deformaţie, pot fi utilizate condiţiile de compatibilitate a deformatei, respectiv de echilibru al forţelor, şi deci pentru rezolvarea acestor probleme din teoria structurilor sînt posibile metodele ştiute sub denumirea de, a forţelor, respectiv a deplasărilor.

Această dualitate îşi are corespondenţa în cele două variante sub care se poate scrie expresia lucrului virtual şi anume în varianta deplasărilor, respectiv a forţelor virtuale. În prima din aceste variante, se ştie că, se exprimă echilibrul forţelor reale:

$$\int_A \{P\}^t \{\bar{\Delta}\}\, dA + \int_V \{g\}^t \cdot \{\bar{\delta}\}\, dV + \int_V \{\sigma\}^t \cdot \{\bar{\varepsilon}\}\, dV = 0,$$

iar în cea de-a doua variantă se exprimă compatibilitatea deformatei reale:

$$\int_A \{\bar{P}\}^t \{\Delta\}\, dA + \int_V \{\bar{g}\}^t \{\delta\}\, dV + \int_V \{\bar{\sigma}\}^t \{\varepsilon\}\, dV = 0.$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 2, 1975, P. 201–210

Pentru oricare din metode, aceste condiții vor conduce la ecuația

$$\{C\} = [k]\{N\} + \{L\} \overset{\swarrow}{=} \{0\}$$

sau

$$\{C\} = [k,\ k_P] \begin{Bmatrix} N \\ P \end{Bmatrix} \overset{\swarrow}{=} \{0\}.$$

Dacă condiția „C" se scrie asupra compatibilității deformatei $[k]$ este matricea deformației unitare a structurii; în caz contrar, cînd „C" se referă la echilibrul forțelor, $[k]$ este matricea rigidității unitare a structurii; în mod similar, $\{L\}$ este vectorul deformațiilor, respectiv al forțelor din acțiunile propriu-zise, P.

3. *Problema de statica construcțiilor* apare atunci cînd sub sarcini statice o structură care se deformează, încărcîndu-se cu eforturi, trebuie dimensionată pentru a rezista acestor acțiuni.

În baza principiului suprapunerii efectelor rezultă că, în oricare din cele două metode de calcul, sistemul format din structura reală S și din acțiunile reale P care o solicită, va putea fi înlocuit cu un sistem de calcul format din structura de calcul specifică metodei și din sarcinile reale P, la care se adaugă acțiunile suplimentare caracteristice metodei de calcul (forțe de legătură în exces sau deplasări cinematic posibile).

Identitatea de comportare dintre sistemul real și cel de calcul se va referi la [13]:

— structura suficient legată S^0 $(n_f = 0)$	supralegată S, (n_f, n_d)	artificial supralegată $\mathscr{S}^0$ (cinematic determinată, $n_d = 0$).

— și acțiunile provenite din :

sarcinile P și forțele de legătură în exces F,	sarcinile P,	sarcinile P și deplasările de nod D,

și va putea fi scrisă sub forma

$$(S^0;\ P,\ F) \overset{\swarrow}{\equiv} (S;\ P) \overset{\swarrow}{\equiv} (\mathscr{S}^0;\ P,\ D).$$

Deoarece condițiile de continuitate a deformatei completează pe cele de echilibru, metoda forțelor este specifică problemelor static nedeterminate și se poate aplica pentru calculul structurilor supralegate. În schimb, deoarece în metoda deplasărilor, condițiile se scriu asupra echilibrului forțelor, rezultă că această metodă poate fi aplicată oricărei

probleme de statica structurilor, fie că aceasta este sau nu static determinată, respectiv atît structurilor suficient legate, cît și celor supralegate. Din acest punct de vedere metoda deplasărilor poate fi utilizată mai general decît metoda forțelor.

Ecuațiile de condiție vor fi deci

— în condiția de compatibilitate a deformatei (MF):

$$\{\Delta\} = [\delta]\{F\} + \{\Delta_p\} = 0$$

sau

$$[\delta,\ \delta_p]\begin{Bmatrix} F \\ P \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

— în condiția de echilibru al forțelor (MD):

$$\{H\} = [\eta]\{D\} + \{H_p\} = 0$$

sau

$$[\eta,\ \eta_p]\begin{Bmatrix} D \\ P \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Cunoașterea soluției

$$\{F\} = -[\delta]^{-1}\{\Delta_p\},$$

$$\{D\} = -[\eta]^{-1}\{H_p\},$$

permite a scrie eforturile

$$\{E\} = [e_F]\{F\} + [e_p]\{P\}$$

$$\{E\} = [e_D]\{D\} + [e_p^*]\{P\},$$

unde

— $[e_F]$, $[e_D]$, $[e_p]$ și $[e_p^*]$ sînt matrice de influență pentru eforturi,
— $[\delta]$ și $[\eta]$ sînt matricele deformației, respectiv a rigidității structurii, specifice problemei de statică de ordinul I,
— $\{F\}$ și $\{D\}$, matricea forțelor de legătură suplimentare și matricea deplasărilor nodurilor structurii, în aceleași condiții.

Relația $[\delta]\,[\eta] = [1]$ dintre deformație și rigiditate, are valabilitatea calitativă; în cazul cînd $n_f = n_d$ această relație are și valabilitate cantitativă.

4. *Problema calculului de ordinul II* nu se pune, în general, pentru orice situație privind structura sau încărcarea. Această problemă apare, independent luat, atunci cînd dintr-un calcul de ordinul I, în barele structurii (sau cel puțin într-una) se obțin eforturi axiale N, importante. Indirect, această problemă se pune în legătură cu problema stabilității.

Sistemul real este format din structura S și din încărcările provenite din forțele exterioare Q, normale pe axele barelor și din eforturile axiale N, obținute dintr-un calcul static de ordinul I; acestea din urmă pot fi constante sau nu de-alungul barelor.

În mod similar cu cele din calculul static de ordinul I, identitatea de comportare dintre sistemul real și cel de calcul, corespunzător celor două condiții fizice posibile, poate fi scrisă sub forma:

$$(S^0;\ N,\ Q,\ F_{II}) \overset{\checkmark}{\equiv} (S;\ N,\ Q) \overset{\checkmark}{\equiv} (\mathcal{S}^0;\ N,\ Q,\ D_{II}).$$

Ecuaţiile de condiţie vor fi deci:

— pentru compatibilitatea deformatei:

$$[\delta_{II}]\{F_{II}\} + \{\Delta_Q\} = \{0\},$$

unde

$$[\delta_{II}] = [\delta] + [\delta_\varkappa]$$

este matricea deformaţiilor unitare ale structurii S^0, obţinute în prezenţa forţelor axiale N.

— pentru echilibrul forţelor:

$$[\eta_{II}]\{D_{II}\} + \{H_Q\} = \{0\},$$

$$[\eta_{II}] = [\eta] + [\eta_\varkappa]$$

este matricea rigidităţilor unitare ale structurii $\mathscr{S}^0$, obţinute în prezenţa forţelor axiale N.

Termenii din matricea deformaţiilor specifice problemei, $[\delta_\varkappa]$ sau a rigidităţii specifice, $[\eta_\varkappa]$, provin numai de la barele încărcate cu forţa N şi depind de factorul de compresiune $\varkappa = l\sqrt{N/EI}$.

Matricele $\{\Delta_Q\}$ şi $\{H_Q\}$ au aceeaşi interpretare ca şi termenii liberi în statica de ordinul I.

Prin soluţionare rezultă:

— forţele de legătură în exces:

$$\{F_{II}\} = -[\delta_{II}]^{-1}\{\Delta_Q\},$$

— deplasările nodurilor:

$$\{D_{II}\} = -[\eta_{II}]^{-1}\{H_Q\}$$

şi cu aceasta, starea de eforturi:

$$\{E_{II}\} = \{E_Q\} + \{E_F\} = \{E_Q^*\} + \{E_D\}.$$

Structura de calcul S^0, se alege — de preferat — astfel încît forţele de legătură în exces F_{II} să fie puse în evidenţă sub forma de momente încovoietoare; în mod excepţional forţele F_{II} vor fi forţe propriu-zise.

Structura $\mathscr{S}^0$ se alege la fel ca în calculul de statică de ordinul I.

Ca urmare a celor de mai sus, problema poate fi de n_f ori nedeterminată static, respectiv de n_d ori nedeterminată cinematic.

5. *Problema* verificării *stabilităţii* unei structuri se pune ori de cîte ori aceasta, găsindu-se sub sarcină, se deformează suficient de mult pentru a nu mai oferi siguranţă mulţumitoare în exploatare; în atare situaţie apare necesitatea de a identifica limita dintre stările de echilibru stabil şi nestabil. Pierderea stabilităţii apare în prezenţa unor forţe N importante, de-alungul barelor suple.

Stabilitatea poate fi de două tipuri: rigidă şi nerigidă. În cazul din urmă, ţinînd seama de calităţile materialului, pot apare situaţiile de stabilitate: elastică şi neelastică. De asemenea, putînd fi vorba de condiţii

de încărcare diferite, pot apare cazurile de pierderea stabilității sub sarcini statice sau dinamice.

În cele de față, va fi vorba de problema stabilității elastice în condiții de încărcare statice.

În stabilitate, prin ipoteză, se admite că sarcinile normale pe axa lungă a barelor se pot reduce la forțe în noduri, dirijate axial acestora, fără o influență prea mare.

Similar cu cele discutate mai sus, identitatea de comportare dintre sistemul real și cel de calcul poate fi scrisă sub forma:

$$(S^0;\ N,\ F_s) \overset{\swarrow}{\equiv} (S;\ N) \overset{\swarrow}{\equiv} (\mathscr{S}^0;\ N,\ D_s),$$

rezultînd ecuațiile corespunzătoare condițiilor fizice:

— compatibilitatea deformatei:

$$[\delta_s]\ \{F_s\} = \{0\},$$

— echilibrul forțelor:

$$[\eta_s]\ \{D_s\} = \{0\},$$

unde

$$[\delta_s] = [\delta_{\text{II}}] \qquad [\eta_s] = [\eta_{\text{II}}],$$

sau

$$[\delta_s] = [\delta] + [\delta_\varkappa]. \qquad [\eta_s] = [\eta] + [\eta_\varkappa].$$

Au fost utilizate matricele:
$[\delta_s]$ și $[\eta_s]$, care sînt matricea deformațiilor structurii S^0, respectiv a rigidității structurii $\mathscr{S}^0$, specifice problemei de stabilitate; dimensiunile lor sînt $(n_f \cdot n_f)$ și $(n_d \cdot n_d)$.
$\{F_s\}$ și $\{D_s\}$ sînt vectorii forțelor de legătură în exces, respectiv a deplasărilor în nod, în problema de stabilitate.

Existența problemei de pierderea stabilității presupune:

$$\{F_s\} \overset{\swarrow}{\neq} \{0\}, \qquad \{D_s\} \overset{\swarrow}{\neq} \{0\},$$

ceea ce conduce la soluția

$$|\delta_s| \overset{\swarrow}{=} 0, \qquad |\eta_s| \overset{\swarrow}{=} 0.$$

Deoarece termenii din matricele $[\delta_\varkappa]$ și $[\eta_\varkappa]$ depind de factorul de compresiune $\varkappa = l\sqrt{N/EI}$, din soluțiile obținute, prin încercări va rezulta N_{cr} și apoi $P_{cr} = N_{cr}$.

6. *Problema dinamică.* Studiul comportării structurii sub acțiunea unor încărcări dinamice este necesar atunci cînd efectul acestora este apreciabil în raport cu cel al încărcărilor statice.

Problema dinamică se pune sub două aspecte: cel legat de calculul pulsațiilor proprii (θ) ale structurii și cel ce apare odată cu considerarea forțelor perturbatoare (ω).

În primul caz se vor confrunta valorile θ cu ω pentru a evita rezonanța. În cel de-al doilea caz, se vor determina stările de eforturi și de deformații dinamice, în vederea dimensionării.

Ipotezele sînt în general aceleași cu cele din problema de statica structurilor, din care se vor aminti în mod expres aceea a micilor deformații dinamice, ceea ce permite a se apela la suprapunerea efectelor; se va adăuga, în mod specific, ideea neglijării amortizării.

Din punctul de vedere al metodei de calcul și pornind de la aceeași dualitate dintre efort și deformație, se va putea apela fie la metoda bazată pe condiții de compatibilitate a deformatei (MF), fie la metoda bazată pe condiții de echilibru al forțelor de inerție (MD).

Masa structurii este distribuită după o lege oarecare. Pentru calcul, masa acestei structuri se va concentra în mai multe puncte, în mod corespunzător, astfel încît să se obțină structura de calcul dinamic avînd n_g grade de libertate dinamică.

Alegerea numărului n_g și a locului unde să fie plasate aceste mase concentrate este de natură apreciativă: se va ține seama de distribuția reală a masei și se va urmări ca rezultatele dinamice pentru structura de calcul să nu fie foarte diferite de cele ale structurii reale. Drept criterii de pornire se va considera că deformata dinamică a structurii va fi la fel cu cea obținută din acțiunea statică a forțelor P_q (pentru ω), sau a celor din forțe masice (pentru θ); se vor obține astfel marile deplasări punctuale, respectiv locul de plasare al maselor concentrate.

Știind că avem la dispoziție două metode de calcul și că structura de calcul dinamic are n_g grade de libertate, rezultă că:

— în calculul frecvențelor proprii sistemul este format din structura S cu n_g grade de libertate și din acțiunile caracteristice metodei: forțe de inerție sau deplasări compatibile acestora; se va putea scrie deci că sistemele sînt:

$$(S; F_d) \equiv (S;\ D_d),$$

— în calculul vibrațiilor forțate, sistemul de calcul este format din structura S și din sarcinile perturbatoare reale P, la care se adaugă acțiunile suplimentare caracteristici metodei de calcul. Identitatea de comportare va putea fi scrisă sub forma

$$(S;\ P, F_\omega) \equiv (S;\ P, D_\omega).$$

6.1. În calculul frecvențelor proprii, θ, ale structurii S cu n_g grade de libertate dinamică, cele două posibilități de a scrie condiția fizică a problemei a condus la ecuațiile următoare:

— condiția de compatibilitate a deformatei pe direcția gradelor de libertate dinamică:

$$[\bar{\delta}]\ \{F_d\} + \{D_d\} = \{0\},$$

— condiția de echilibru a forțelor pe direcția gradelor de libertate dinamică:

$$[\bar{\eta}]\ \{D_d\} + \{F_d\} = \{0\}.$$

Cu forţele de inerţie şi elongaţiile :

$$\{F_d\} = -\left[\diagdown m \diagup\right] \theta^2 \{A\} \sin(\theta t + \varphi),$$

$$\{D_d\} = \{A\} \sin(\theta t + \varphi),$$

după prelucrări, se obţine

$$([\bar{\delta}]\left[\diagdown m \diagup\right]\theta^2 - [1])\{A\} = \{0\}$$

sau

$$\{\Delta_\theta\} = [\delta_\theta]\{A\} = \{0\},$$

$$([\bar{\eta}] - \left[\diagdown m \diagup\right]\theta^2)\{A\} = 0$$

sau

$$\{H_\theta\} = [n_\theta]\{A\} = \{0\},$$

unde

$[\delta_\theta]$ este matricea deformaţiilor dinamice specifică pulsaţiilor proprii ; are dimensiunea $(n_g \cdot n_g)$,

$[\eta_\theta]$ idem, matricea rigidităţilor dinamice.

Deoarece pentru a avea problemă de vibraţii proprii, deci mişcare liberă :

$$\{A\} \neq \{0\},$$

rezultă că soluţia va fi

$$|\delta_\theta| = 0,$$

$$|\eta_\theta| = 0.$$

Dezvoltînd, cu $\lambda = 1/\theta^2$, rezultă

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \lambda^{n-i} = 0$$

şi, respectiv,

$$C_i = C_i(\delta, m),$$

$$C_i = C_i(n, m).$$

În final, se obţin soluţiile cu care se formează matricea pulsaţiilor proprii $\left[\diagdown \theta \diagup\right]$, precum şi matricea modurilor de vibraţii $[A]$.

Deoarece matricele deformaţiilor, respectiv a rigidităţilor dinamice, se referă la acelaşi fenomen fizic, rezultă că

$$[\bar{\delta}][\bar{\eta}] = [1] = [\bar{\eta}][\bar{\delta}],$$

şi deoarece condiţiile au putut fi scrise pentru aceeaşi structură S, această egalitate are atît caracter calitativ, cît şi cantitativ.

Vom recunoaşte matricele :

— matricea maselor (diagonală) :

$$\left[\diagdown m \diagdown\right] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix}.$$

Observaţii. — Prin n este arătat numărul gradelor de libertate şi aşa cum este notat mai sus, rezultă că fiecare masă are un singur grad de libertate ; în caz contrar, deoarece numărul de mase este mai mic decît numărul gradelor de libertate, o masă poate intra în matricea m de două sau de trei ori.

— matricea pulsaţiilor proprii (diagonală) :

$$\left[\diagdown \theta \diagdown\right] = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \theta_n \end{bmatrix},$$

— matricea deformaţiilor :

$$[\bar{\delta}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

— matricea rigidităţilor :

$$[\bar{\eta}] = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix}.$$

— Matricele $\bar{\delta}$ şi $\bar{\eta}$ sînt barate pentru a arăta că ele sînt calculate pentru structura reală S, cu n_g grade de libertate dinamică;

— vectorul amplitudinilor elongaţiilor, $\{A\} = \{A_1 \dots A_n\}^t$.

6.2. În problema vibraţiilor forţate, ω, impuse structurii S cu n_g grade de libertate dinamică, condiţia fizică a problemei va fi scrisă pe baza compatibilităţii deformatei (Δ_ω), sau a echilibrului forţelor (H_ω), pe direcţia gradelor de libertate.

Se consideră forţele perturbatoare :

$$\{P_\omega\} = \sin \omega t \, \{P_1 \dots P_q\}^t.$$

Ecuaţiile de condiţie vor fi, deci, pentru :

— compatibilitatea deformatei :

$$[\bar{\delta}]\{F_\omega\} + \{D_\omega\} + \{\bar{\Delta}_{P,\omega}\} = \{0\},$$

— echilibrul forţelor :

$$[\bar{\eta}]\{D_\omega\} + \{F_\omega\} + \{\bar{H}_{P,\omega}\} = 0.$$

După prelucrări rezultă

$$([\bar{\delta}] - \left[\diagdown m \diagdown\right]^{-1} (\omega^2)^{-1}) \{F_\omega\} + \{\bar{\Delta}_{P,\omega}\} = \{0\}$$

$$([\bar{\eta}] - \left[\diagdown m \diagdown\right] \omega^2) \{D_\omega\} + \{\bar{H}_{P,\omega}\} = \{0\},$$

sau

$$\{\Delta_\omega\} = [\delta_\omega]\{F_\omega\} + \{\bar{\Delta}_{P,\omega}\} = \{0\}, \quad | \quad \{H_\omega\} = [\eta_\omega]\{D_\omega\} + \{\bar{H}_{P,\omega}\} = 0.$$

S-a notat

$[\delta_\omega]$ și $[\eta_\omega]$ — matricea deformațiilor, respectiv a rigidităților dinamice ale structurii, specifice vibrațiilor forțate; au dimensiunea $(n_g \cdot n_g)$;

$\{F_\omega\}$ și $\{D_\omega\}$ — vectorul forțelor de inerție, respectiv al deplasărilor aferente acestora, în dreptul maselor.

Matricele $\bar{\delta}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\Delta}_{P,\omega}$ și $\bar{H}_{P,\omega}$ sînt barate pentru a arăta că ele sînt calculate pentru structura reală S, cu n_g grade de libertate dinamică.

Vom observa că matricele invarianților proprii problemei de dinamică sînt formate cu termeni de tipul celor din problema de statică ($[\bar{\delta}]$ și $[\bar{\eta}]$) la care se adaugă termeni specifici problemei de dinamică (funcție de masa m și de frecvența proprie θ sau de frecvența forțată ω).

Soluția:

$$\{F_\omega\} = -[\delta_\omega]^{-1}\{\bar{\Delta}_{P,\omega}\} \quad | \quad \{D_\omega\} = -[\eta_\omega]^{-1}\{\bar{H}_{P,\omega}\},$$

permite scrierea stării de eforturi:

$$\{E\} = [e_F]\{F_\omega\} + \{E_P\} \quad | \quad \{E\} = [e_D]\{D_\omega\} + \{E_P^*\},$$

unde

$[e_F]$ și $[e_D]$ sînt matrice de influență pentru eforturi și au dimensiunile $(s \cdot n_g)$ (s arată numărul de secțiuni).

Cu cele de mai sus se poate scrie apoi

$$\{D_\omega\} = -\left[\diagdown m \diagup\right]^{-1}(\omega^2)^{-1}\{F_\omega\}.$$

CONCLUZII

În oricare din problemele de statică, de stabilitate sau de dinamică, condițiile care duc la rezolvarea problemei pot fi puse asupra compatibilității deformației sau asupra echilibrului forțelor.

Problema de statică (I și II) și cea de stabilitate se conduce pe structura de calcul suficient legată S^0 sau pe cea cinematic determinată $\mathscr{S}^0$, obținute în mod corespunzător din structura de studiat S. Problema de dinamică se conduce chiar pe structura S.

Ca urmare, problemele de statică și de stabilitate introduc n_f necunoscute provenite din forțele de legătură suplimentare, sau n_d necunoscute provenite din deplasările de nod cinematice, iar problema dinamică introduce n_g necunoscute provenite din forțele de inerție, respectiv deplasările corespunzătoare gradelor de libertate dinamice.

Aceste concluzii sînt rezumate în tabelul următor :

Structura	Problema		Scopul	Condiția „C"	Structura de calcul pentru condiția F	Structura de calcul pentru condiția D	nr. nec. pentru condiția F	nr. nec. pentru condiția D	L
S	statică	I, II	eforturi, deformații	compatibilitatea deformatei (nec. F) sau echilibrul forțelor (nec. D)	S^0	$\mathscr{S}^0$	n_f	n_d	$\neq 0$
	stabilitate		echilibrul stabil						$=0$
	dinamică	θ	rezonanța		S		n_g		$=0$
		ω	eforturi, deformații						$\neq 0$

Matricele invarianților, în oricare din probleme și condiții fizice, sînt patrate și simetrice. Ele conțin termeni specifici problemei și condiției fizice considerate.

Relația de inversare dintre matricea deformației și cea a rigidității este valabilă în oricare din problemele discutate ; pentru problemele de statică și stabilitate ea are valabilitate numai calitativă, pentru $n_f = n_d$.

Primită la redacție la 17 august 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Procofiev-Smirnov, *Statica construcțiilor*, O.P.E.D., București, 1951.
2. Al. Gheorghiu, *Statica construcțiilor*, Edit. tehnică, București, 1965.
3. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, Edit. tehnică, București, 1959.
4. R.K. Livesley, *Matrix methods of structural analysis*, The Mac Millan Co, NY, 1966.
5. Ping-Chun Wang, *Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor*, E.T. București, 1970.
6. I. Munteanu, I. Sturz, *Contribuții la rezolvarea structurilor spațiale*, St. cerc. mec. apl., *3* (1969).
7. J.A.L. Matheson, *Hyperstatic structures*, B.S.P., London, 1959.
8. L. Solomon, *Elasticitate liniară*; Edit. Academiei București, 1969.
9. Ch. Massonnet și alții, *Calcul des structures sur ordinateur*, Eyrolles, 1972 E.T., București, 1973.
10. J. Courbon, *Calcul des structures*, Dunod, Paris, 1972.
11. G.N. Smith, *An Introduction to Matrix au Finite Element Methods in Civil Engineering*, A.S.P. LTD, London.
12. I. Munteanu, I. Sturz, *Considerații generale asupra calculului static al structurilor spațiale*, Buletinul IPTV, Timișoara, 13(27), 2(1968).
13. I. Munteanu, *Calculul structurilor spațiale în formulare matriceală*, Ed. Facla, Timișoara, 1973.
14. C. Avram, I. Munteanu, *Dinamica construcțiilor*, Litografia IPTV, Timișoara, 1965.
15. Șt. Bălan, *Lecții complementare de mecanică teoretică*, E.D.P. București, 1969.
16. Gere și Weaver, *Analysis of framed structures*, D.V.N.C. London.
17. Timoshenko-Gere, *Teoria stabilității elastice*, E.T. București, 1967.
18. N.K. Snitko, *Dinamica construcțiilor*, Edit. tehnică, București, 1962.
19. M. Ifrim, *Analiza dinamică a structurilor*, EDP, Buc. 1973.
20. A. Scarlat, *Stabilitatea structurilor*, E.T. Buc. 1969.

ASUPRA TENSIUNILOR REALE DIN DANTURA ANGRENAJELOR

de N. POSEA, AL. ANGHEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În proiectarea angrenajelor, calculul de rezistență al danturii și aspectele de oboseală și durabilitate constituie părți importante, pentru care, în literatura de specialitate, nu s-a definitivat încă o metodă completă și exactă.
Menționăm pe această linie faptul că eforturile unitare în dantura angrenajului se determină cu formulele de la barele drepte, ceea ce, evident, nu este exact întrucît dimensiunile dinților angrenajelor fac ca ipoteza secțiunilor plane să nu mai fie valabilă.
În lucrarea de față se analizează starea de tensiuni în dantura angrenajelor pe baza teoriei elasticității și se pun în evidență diferențele ce apar față de teoria de bară adoptată în metodele actuale de proiectare. Algoritmul pentru determinarea acestor tensiuni, pentru toate tipurile dimensionale de danturi, a fost transpus într-un program de calcul scris în limbajul ALGOL, specific calculatorului numeric folosit, Eliott 4120, existent în cadrul Institutului de cercetări și proiectări rafinării, Ploiești.

1. CONSIDERAȚII PRIVIND CALCULUL DE REZISTENȚĂ CLASIC AL ANGRENAJELOR

Proiectarea angrenajelor folosește ca metodă de calcul, așa numita „metodă clasică" [1], în care, ținînd seama de geometria danturii, cinematica și dinamica angrenării, se stabilește o forță convențională de calcul, cu ajutorul căreia, în secțiunea cea mai solicitată a dintelui, se determină eforturile unitare, care se compară cu rezistența admisibilă la oboseală, stabilită pentru ciclul de solicitare la care este supus angrenajul.

În cadrul acestei metode, forța convențională F_{nc}(fig. 1*a*) aplicată în punctul de angrenare P_e, se consideră, pentru calcul, translatată în punctul P_d, de intersecție dintre linia de angrenare $N - N$ și axul dintelui.

Pornind din P_d și construind un solid de egală rezistență la încovoiere (desenat punctat în fig. 1*a*), punctele de tangență ale conturului acestuia cu flancurile dintelui determină secțiunea cea mai solicitată (CT).

Dacă se consideră forța de calcul F_t, componenta tangențială a lui F_n în polul angrenării, și α unghiul de angrenare (fig. 2), atunci componentele forței de calcul din punctul de ieșire din angrenare sînt

$$F_{te} = \frac{F_t \cos \alpha_e}{\cos \alpha,}, \quad F_{re} = \frac{F_t \sin \alpha_e}{\cos \alpha}. \tag{1.1}$$

Eforturile din secțiunea CT au valorile

$$N = F_{re} = \frac{F_t \sin \alpha_e}{\cos \alpha,}, \quad M = F_{te} \cdot h_e = \frac{F_t h_e \cos \alpha_e}{\cos \alpha}. \tag{1.2}$$

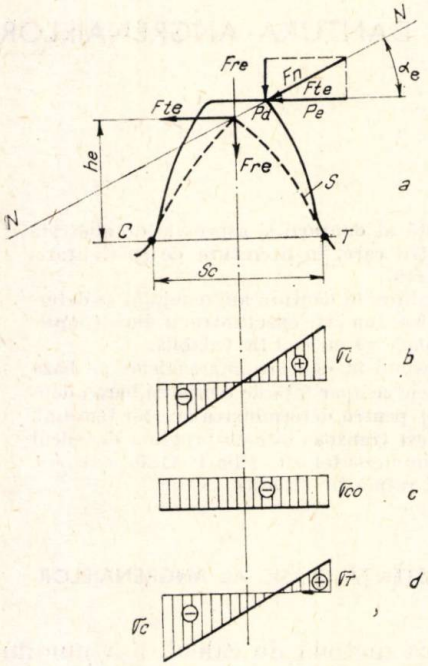


Fig. 1

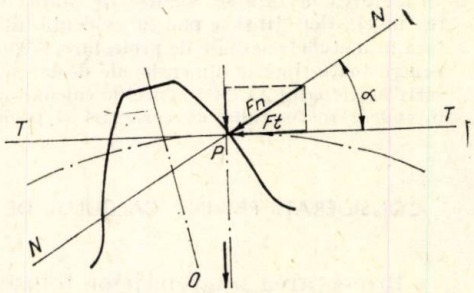


Fig. 2

Cunoscînd dimensiunile secțiunii $CT(l \times s_c)$ și aplicînd expresia efortului unitar normal de la încovoierea simplă cu forță axială, efortul unitar maxim de întindere (fig. 1 *b*, *c*, *d*) apare în punctul T și are valoarea

$$\sigma_T = \frac{F_{te} h_e}{l s_c^2/6} - \frac{F_{re}}{l s_c}. \tag{a}$$

De regulă, mărimile h_e și s_c se exprimă în funcție de pas sau de modul prin relațiile

$$h_e = k_1 p = \pi k_1 m; \qquad s_c = k_2 p = \pi k_2 m, \tag{b}$$

unde k_1 și k_2 sînt coeficienți dependenți de forma dintelui.

Dacă valorile (b) și 1.1 se introduc în (a) și se notează

$$k = \frac{k_2^2}{6 k_1 \cos \alpha_e - k_2 \sin \alpha_e}, \tag{c}$$

rezultă expresia

$$\sigma_T = \frac{F_t}{\pi l m k \cos \alpha} \cdot \tag{1.2}$$

Pentru verificarea de rezistență a dintelui se introduce condiția

$$\sigma_T \leqslant \sigma_{a,R}, \tag{1.3}$$

în care σ_{aR} reprezintă rezistența admisibilă pentru solicitarea variabilă, avînd coeficientul de asimetrie R, considerat de obicei pulsator sau alternant simetric.

Ținînd seama că secțiunea dintelui este variabilă, rezultă că în punctul T, din secțiunea normală pe axa dintelui, apar și eforturi unitare tangențiale pe care condiția (1.3) le neglijează.

În lucrările [5], [6], pe baza unor cercetări fotoelastice, se pun în evidență la baza dintelui importante concentrări de tensiuni, care, de asemenea, nu sînt luate în considerare de către formula de verificare (1.3). Pentru eliminarea acestor neajunsuri, Niemann [5] propune pentru verificarea de rezistență a dintelui expresia

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_T^2 + (\gamma\tau)^2} \leqslant \sigma_{aR}, \tag{1.4}$$

în care γ, avînd valori pînă la 2,5, este un coeficient experimental ce ține seama de concentrările de tensiuni, iar τ se consideră cu valoarea medie

$$\tau = \frac{F_{te}}{l s_c} = \frac{F_t \cos \alpha_e}{l s_c \cos \alpha}. \tag{1.5}$$

Tot valoarea medie pentru τ se introduce și în DIN 3990 [1], cu toate că atît în [5], cît și în [4] se subliniază necesitatea determinării exacte a valorilor lui τ.

Se precizează că diferitele procedee de calcul de rezistență ale angrenajelor se diferențiază, în special, prin modul de stabilire al forței de calcul și prin poziția ce se adoptă pentru aceasta. Toate metodele, însă, determină efortul unitar σ din încovoiere cu formula lui Navier, iar pentru τ, adoptă cel mult valoarea medie.

2. EXPRESIILE REALE ALE TENSIUNILOR ÎN DANTURA ANGRENAJELOR

Pornind de la forma geometrică a unui angrenaj cilindric, paralel, cu dinții drepți, care de altfel servește drept bază și la proiectarea celorlalte tipuri de angrenaje, dinții angrenajului (fig. 3) se consideră console, de secțiune variabilă, încastrate în obada roții. Întrucît diferența de grosime

a dintelui măsurată pe normala la axa lui între flancurile cu profilul în evolventă și între dreptele AC și BD (fig. 3) este foarte mică, dintele se reduce pentru calculul tensiunilor în teoria elasticității la o grindă de formă trapezoidală (fig. 4*a*), avînd încastrarea în dreptul secțiunii celei mai solicitate de la baza dintelui real.

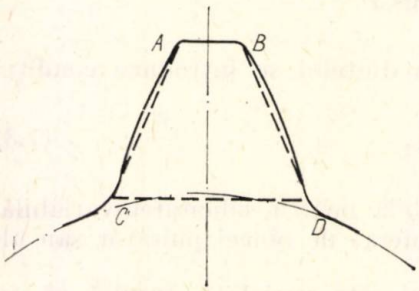


Fig. 3

Această consolă este acționată în punctul P_e (fig. 4*a*) de forțele Q și P, obținute din componentele forței de angrenare în P_e (vezi fig. 6), împărțite prin dimensiunea l a dintelui. Se precizează că evaluarea componentelor P și Q în figura 6 este mai exactă decît cea a componentelor (1.1) din metoda clasică.

Ținînd seama de principiul lui de Saint Vènant, starea de tensiuni în grinda trapezoidală, în puncte suficient de depărtate de locul de aplicare al sarcinilor depinde numai de rezultanta acestora. În consecință, tensiunile în puncte depărtate de P_e cu mai mult de $2a$ (fig. 4*a*) nu sînt influențate de modul de aplicare al sarcinilor și deci acestea pot fi înlocuite cu un sistem echivalent aplicat în punct O(fig. 4*b*), corespunzător penei elastice la care se ajunge prin prelungirea laturilor AC și BD ale trapezului.

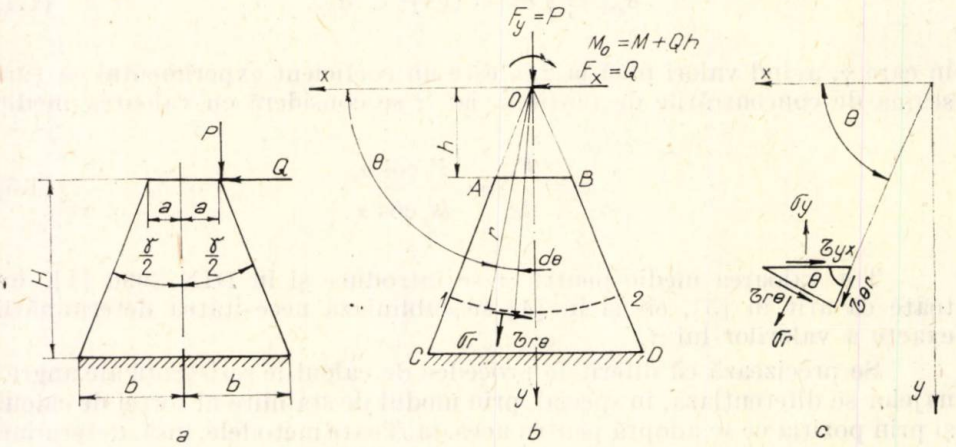


Fig. 4

În funcție de Q, P (fig. 4*a*) și de sistemul de axe adoptat (fig. 4*b*), încărcarea echivalentă din O are componentele:

$$F_x = Q,$$

$$F_y = P, \tag{2.1}$$

$$M_0 = Pa + Qh = M + Qh.$$

Pentru calculul tensiunilor se aplică metoda generală a teoriei plane a elasticității [3] prin folosirea unei funcții de eforturi (Airy). În acest scop se alege funcția de eforturi

$$F(r,\ \theta) = Ar\theta\sin\theta + Br\theta\cos\theta + C\sin 2\theta + D\theta, \tag{2.2}$$

dependentă de constantele A, B, C, D și care satisface condiția de biarmonicitate

$$\Delta\Delta F = 0. \tag{2.3}$$

Pornind de la funcția de eforturi (2.2) tensiunile în sistemul de coordonate polare $(r,\ \theta)$ ales, se determină cu expresiile

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r},$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \tag{2.4}$$

$$\tau_r = \tau_{\theta r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta},$$

care, folosind (2.2), conduc la

$$\sigma_r = 2A\frac{\cos\theta}{r} - 2B\frac{\sin\theta}{r} - 4C\frac{\sin 2\theta}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = 0, \tag{2.4'}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 2C\frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{D}{r^2}.$$

Rezultatul $\sigma_\theta = 0$ este în concordanță cu condițiile la limită pentru σ_θ pe laturile AC și BD ale grinzii, care sînt neîncărcate. Pe aceste laturi mai trebuie îndeplinită și condiția $\tau_{\theta r} = 0$, care conduce la relația

$$D = 2C\cos\gamma. \tag{d}$$

Pentru determinarea constantelor A, B, C se face o secțiune circulară după arcul 1,2 (fig. 4*b*) și pentru partea de deasupra se scriu ecuațiile de echilibru :

$$M_O - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_{r\theta}\, r\, d\theta \cdot r = 0,$$

$$Q + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma_r\, r d\theta \cdot \cos\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_{r\theta}\, r d\theta \cdot \sin\theta = 0, \qquad \text{(e)}$$

$$P + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma_r\, r d\theta \sin\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_{r\theta}\, r d\theta \cos\theta = 0,$$

în care $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ și $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Introducînd în relațiile (e) expresiile (2.4′) și (d) se obțin succesiv constantele :

$$C = -\frac{M_0}{2(\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)}\ ;\ A = -\frac{Q}{\gamma - \sin\gamma}\ ;\ B = \frac{P}{\gamma + \sin\gamma}. \qquad \text{(f)}$$

Cu ajutorul acestora, formulele de calcul ale tensiunilor (2.4′) devin :

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\gamma + \sin\gamma}\frac{\sin\theta}{r} - \frac{2Q}{\gamma - \sin\gamma}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{2(M + Qh)}{\sin\gamma - \gamma\cos\gamma}\frac{\sin 2\theta}{r^2},$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{M + Qh}{\sin\gamma - \gamma\cos\gamma}\cdot\frac{\cos\gamma + \cos 2\theta}{r^2}, \qquad (2.5)$$

$$\sigma_\theta = 0.$$

Pe o secțiune normală pe axa dintelui folosind sistemul de axe din figura 4*b* și elementul infinitesimal din figura 4*c*, rezultă tensiunile

$$\sigma_y = \frac{\sigma_r}{2} - \frac{\sigma_r}{2}\cos 2\theta + \tau_{r\theta}\sin 2\theta,$$

$$\tau_{yx} = \frac{\sigma_r}{2}\sin 2\theta + \tau_{r\theta}\cos 2\theta. \qquad (2.6)$$

Prin introducerea expresiilor (2.5) în (2.6) și ținînd seama de relațiile dintre coordonatele polare și cele cartesiene ($x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$), se obțin tensiunile pe secțiunea normală pe axa dintelui sub forma

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\gamma+\sin\gamma}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2Q}{\gamma-\sin\gamma}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} -$$

$$-\frac{4(M+Qh)}{\sin\gamma-\gamma\cos\gamma}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\times\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right), \qquad (2.7)$$

$$\tau_{yx}=\tau=-\frac{2P}{\gamma+\sin\gamma}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2Q}{\gamma-\sin\gamma}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} -$$

$$-\frac{M+Qh}{\sin\gamma-\gamma\cos\gamma}\times\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+(x^4-y^4)\cos\gamma}{(x^2+y^2)^3}.$$

Domeniul de valabilitate al acestora este pentru y de la aproximativ egal cu $h+2a$ pînă la $h+H$.

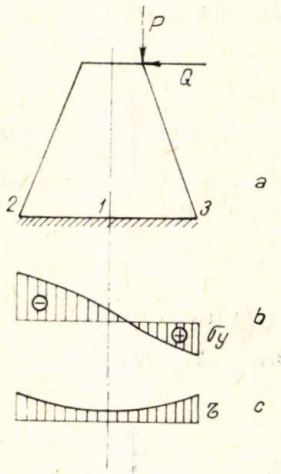


Fig. 5

Aplicînd expresiile (2.7) pentru punctele 1, 2, 3 din secțiunea de la baza dintelui (fig. 5*a*) se obțin valorile:

$$\sigma_y^{(1)} = -\frac{2P}{(\gamma+\sin\gamma)(h+H)},$$

$$\tau^{(1)} = -\frac{(M+Qh)(1-\cos\gamma)}{(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)(h+H)^2}, \qquad (2.8)$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848

$$\sigma_y^{(2)} = \frac{1}{(h+H)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)^2}\left[-\frac{2P}{\gamma+\sin\gamma}-\frac{2Q\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\gamma-\sin\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(M+Qh)\sin\gamma}{(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)(h+H)}\right], \tag{2.9}$$

$$\tau^{(2)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{(h+H)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)^2}\left[-\frac{2P}{\gamma+\sin\gamma}-\frac{2Q\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\gamma-\sin\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(M+Qh)\sin\gamma}{(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)(h+H)}\right],$$

$$\sigma_y^{(3)} = \frac{1}{(h+H)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)^2}\left[-\frac{2P}{\gamma+\sin\gamma}+\frac{2Q\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\gamma-\sin\gamma}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(M+Qh)\sin\gamma}{(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)(h+H)}\right], \tag{2.10}$$

$$\tau^{(3)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{(h+H)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)^2}\left[\frac{2P}{\gamma+\sin\gamma}-\frac{2Q\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\gamma-\sin\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(M+Qh)\sin\gamma}{(\sin\gamma-\gamma\cos\gamma)(h+H)}\right].$$

Alura diagramei σ_y este reprezentată în figura 5*b*, iar a diagramei τ în figura 5*c*.

3. ALGORITM ŞI PROGRAM AUTOMAT DE CALCUL AL TENSIUNILOR ÎN DANTURA ANGRENAJELOR CILINDRICE CU DINŢI DREPŢI

În scopul obţinerii unui program care să necesite ca date de intrare numai elementele generale ale angrenajului, algoritmul elaborat cuprinde trei părţi prin care se determină : poziţia şi direcţia forţei de calcul, dimensiunile geometrice ale schemei de calcul, calculul eforturilor unitare în orice secţiune normală pe axa dintelui.

3.1. POZIŢIA ŞI DIRECŢIA FORŢEI DE CALCUL F_c

În figura 6 este reprezentat dintele neflancat al unei roţi cu centrul în O_1 şi raza cercului de rostogolire R_r. Cunoscînd polul angrenării P şi

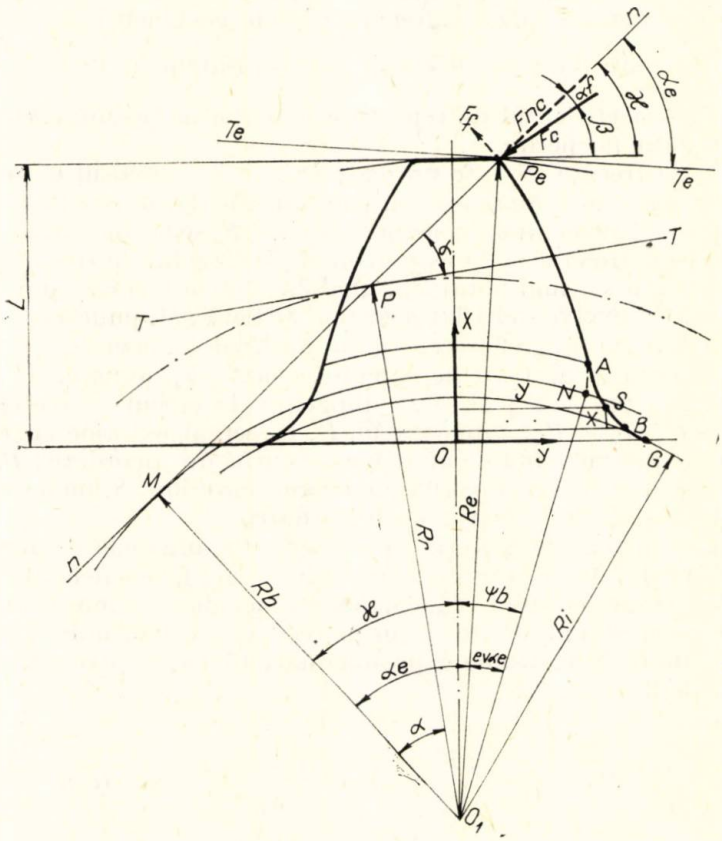


Fig. 6

unghiul de angrenare α se duce direcţia liniei de angrenare $n - n$, care trece prin P_e, punctul de aplicaţie al forţei normale de angrenare.

Din polul O_1 se duce axa dintelui, iar din punctul G al cercului interior, mijlocul interspaţiului dintre doi dinţi, o perpendiculară pe aceasta.

Se obţine astfel punctul O, în care se alege originea sistemului de axe XY şi distanţa

$$O_1O = R_i \cos\frac{\pi}{z}, \tag{3.1}$$

cu ajutorul căreia se calculează segmentul

$$L = R_e - O_1O = R_e - R_i \cos\frac{\pi}{z}, \tag{3.2}$$

de la vîrful dintelui la axa Y (z reprezintă numărul de dinţi).

Forţa normală de angrenare de calcul F_{nc} are direcţia liniei de angrenare $n-n$ şi face cu axa Y unghiul $\varkappa$. Valoarea ei se determină prin multiplicarea forţei normale de angrenare F_n cu coeficienţii C_s, C_d, C_l şi $\frac{1}{\varepsilon}$, unde C_s reprezintă coeficientul de suprasarcină; C_d — coeficientul dinamic; C_l — coeficientul de repartiţie neuniformă pe lungimea dintelui, şi ε — gradul de acoperire.

Forţa de frecare F_f este normală la $n-n$ şi sensul ei depinde de faptul dacă roata este motoare sau condusă (în fig. 6 este luat pentru o roată motoare). Prin compunerea forţelor F_{nc} şi F_f se obţine forţa rezultantă F_c care, faţă de direcţia $n-n$ este deviată cu unghiul de frecare (α_f).

Pe figura 6 s-a mai notat: β, unghiul dintre forţa F_c şi axa Y; N, punctul iniţial al evolventei aflat pe cercul de bază; M, punctul de tangentă al direcţiei liniei de angrenare cu cercul de bază cu raza R_b; ψ_b, semigrosimea unghiulară a dintelui pe cercul de bază; α_e, unghiul de presiune în P_e; ev. $\alpha_e = \operatorname{tg}\alpha_e - \alpha_e$; $T-T$, tangenta la cercul de rostogolire cu raza R_r în P; T_e-T_e, tangenta în P_e la cercul exterior cu raza R_e; A, punctul de pe evolventă de unde începe curba de racordare; B, punctul de intersecţie al curbei de racordare cu cercul interior; S, punct curent de coordonate X şi Y de pe curba de racordare.

Dacă se utilizează notaţiile obişnuite din organele de maşini: α_0, unghiul profilului de referinţă; m, modulul roţii; f_0, coeficientul înălţimii capului dintelui de referinţă; C_0, coeficientul jocului de fund; ξ, deplasarea specifică a profilului; δ, coeficientul de reducere al înălţimii dintelui şi μ, coeficientul de frecare, atunci expresiile mărimilor care precizează direcţia forţei de calcul [4] sînt:

$$\varkappa = \sphericalangle NO_1M - \psi_b = \frac{\overline{MP_e}}{R_b} - \psi_b = \frac{R_b \operatorname{tg}\alpha_e}{R_b} - \psi_b = \operatorname{tg}\alpha_e - \psi_b; \tag{3.3}$$

$$\psi_b = \frac{\pi}{2z} + \frac{2}{z}\xi \operatorname{tg}\alpha_0 + ev\cdot\alpha_0, \tag{3.4}$$

$$R_d = \frac{mz}{2}, \tag{3.5}$$

$$\cos \alpha_e = \frac{R_b}{R_e} = \frac{R_d \cos \alpha_0}{R_e}, \tag{3.6}$$

$$\alpha_f = \operatorname{arc\,tg} \mu, \tag{3.7}$$

$$\beta = \operatorname{tg} \alpha_e - \frac{\pi}{2z} - \frac{2\xi \operatorname{tg} \alpha_0}{z} - ev \cdot \alpha_0 \mp \alpha_f. \tag{3.8}$$

Semnul superior „minus" din relația (3.8) se adoptă pentru roata conducătoare și semnul inferior „plus" pentru roata condusă.

3.2. STABILIREA DIMENSIUNILOR SCHEMEI DE CALCUL

În lucrarea [4] sînt deduse ecuațiile generale parametrice ale profilului dintelui. Curba de racordare ASB (fig. 6) față de sistemul de axe de coordonate OXY adoptat, este reprezentată prin relațiile :

$$\begin{aligned} X &= (R_d - x_0 - r_0 \cos \gamma) \cos \varphi + (x_0 \operatorname{tg} \gamma + r_0 \sin \gamma) \sin \varphi - R_i \cos \frac{\pi}{z}, \\ Y &= (R_d - x_0 - r_0 \cos \gamma) \sin \varphi - (x_0 \operatorname{tg} \gamma + r_0 \sin \gamma) \cos \varphi, \end{aligned} \tag{3.9}$$

în care

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x}_0 \cdot m, \\ y_0 &= \bar{y}_0 \cdot m, \\ r_0 &= \bar{r}_0 \cdot m, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\bar{x}_0 = f_0 - c_0 - \bar{r}_0 - \xi,$$

$$\bar{y}_0 = \frac{\pi}{4} + f_0 \operatorname{tg} \alpha_0 + \bar{r}_0 \cos \alpha_0,$$

$$\bar{r}_0 = \frac{c_0}{1 - \sin \alpha_0}.$$

Parametrii φ și γ din expresiile (3.9) variază în intervalele

$$\frac{y_0}{R_d} \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{R_d}\left[y_0 + x_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right)\right], \tag{3.11}$$

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) \tag{3.12}$$

și sînt legați prin relația

$$\varphi = \frac{y_0 + r_0 \operatorname{tg} \gamma}{R_d}. \tag{3.13}$$

Prin încercări succesive, variind pe γ și φ, astfel încît să respecte condițiile (3.11), (3.12), 3.13), se determină din (3.9), valoarea minimă a lui $Y(Y_{\min})$ și apoi coordonata corespunzătoare X_1, cu ajutorul căreia se precizează secțiunea cea mai solicitată a dintelui, care pe schema de calcul corespunde secțiunii din încastrare. Lungimea de calcul a consolei rezultă

$$H = L - X_1, \tag{3.14}$$

unde L se determină prin (3.2) sau prin expresia

$$L = m\left[\left(\frac{z}{2} + \xi\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{z}\right) + f_0\left(1 + \cos\frac{\pi}{z}\right) + c_0 \cos\frac{\pi}{z} - \delta\right]. \tag{3.15}$$

Înălțimea secțiunii din încastrare (fig. 4*a*) va fi

$$s_c = 2b = 2Y_{\min}. \tag{3.16}$$

Grosimea dintelui la vîrf este dată de relația cunoscută

$$s_e = 2a = R_e\left[\frac{\pi}{z} - 2(ev\alpha_e - ev\alpha_0)\right]. \tag{3.17}$$

3.3. CALCULUL TENSIUNILOR

Dimensiunile schemei de calcul (consola din fig. 4*a*, *b*) se determină cu formulele (3.14), (3.16) și (3.17).

Cunoscînd F_{nc} și coeficientul de frecare se stabilește

$$F_c = F_{nc}\sqrt{1 + \mu^2}, \tag{3.18}$$

și componentele

$$Q = \frac{F_c \cos\beta}{l}; \quad P = \frac{F_c \sin\beta}{l}, \tag{3.19}$$

în care β se calculează cu (3.8).

Avînd dimensiunile geometrice și forțele Q, P, eforturile unitare în orice secțiune a dintelui (consola din fig. 4*b*) se calculează cu expresiile (2.7).

3.4. PREZENTAREA PROGRAMULUI

Algoritmul de mai sus a fost transpus într-un program denumit prescurtat „CDB" scris în limbaj ALGOL. Schema bloc a acestui program este dată în figura 7.

Datele de intrare ale programului sînt elementele generale ale oricărui angrenaj și anume : m, z, α, α_0, c_0, f_0, ξ, δ, μ, l și F_{tc}.

În cadrul programului se determină mai întîi direcția forței de angrenare în punctul de ieșire (P_e) și dimensiunile consolei de calcul.

SCHEMA BLOC A PROGRAMULUI C.D.B.

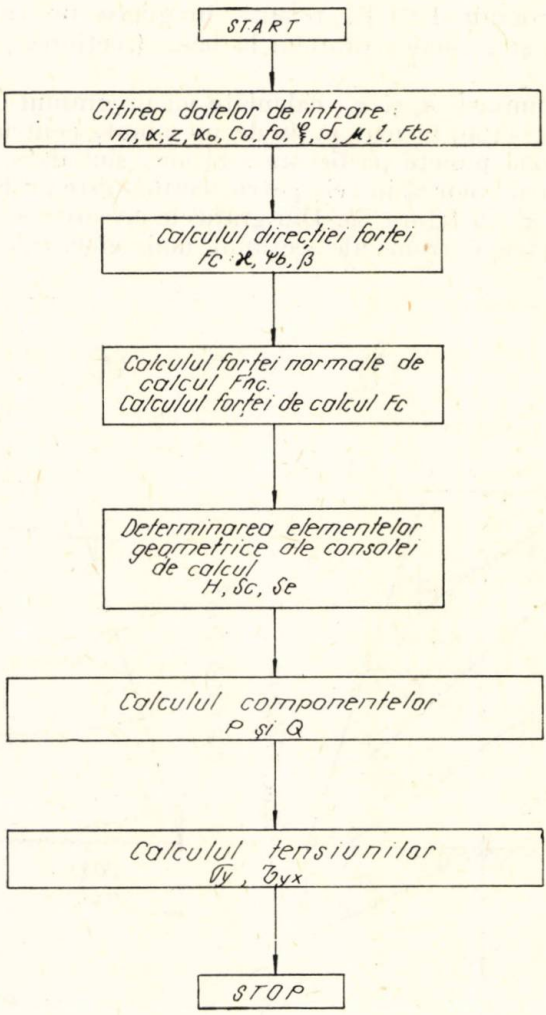


Fig. 7

Eforturile unitare σ și τ se calculează în secțiunea de la baza dintelui (secțiunea din încastrare) și în alte secțiuni normale pe axa dintelui distanțate între ele la $\frac{H}{4}$.

Programul detailat este dat în anexa 1.

4. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră un angrenaj ai cărui parametri geometrici sînt :

$m = 10$ mm ; $z = 50$; $\alpha = \alpha_0 = 20°$; $c_0 = 0{,}20$; $f_0 = 1{,}0$; $\xi = 0$ (angrenaj nemodificat) ; $\delta = 0{,}0$; $\mu = 0{,}01$; lungimea dintelui $l = 250$ mm și care este solicitat de forța de calcul $F_{tc} = 20.000$ daN.

Aplicînd programul CDB, rezultă lungimea de calcul a consolei $H = 22{,}468$ mm și grosimea dintelui la bază (secțiunea din încastrare) $s_c = 22{,}84$ mm.

Eforturile unitare σ_y și τ_{yx} calculate cu programul CDB la calculatorul cifric Eliott 4120, în mai puțin de un minut, pentru patru secțiuni distincte și în nouă puncte pe fiecare secțiune, sînt date în tabelul 1.

Variația tensiunilor σ_y în cele patru secțiuni este arătată în figura 8*a*, iar a tensiunilor τ_{yx} în figura 8*b*. Din graficele acestora se observă cu claritate că în punctele extreme ale secțiunii, unde eforturile σ sînt maxime,

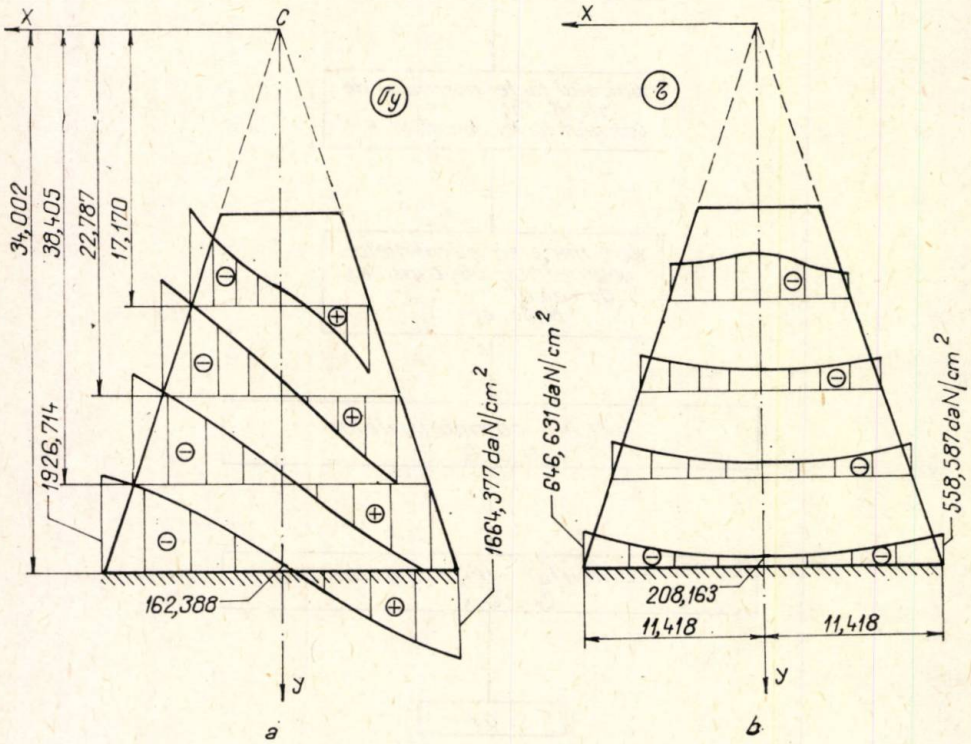


Fig. 8

rezultă maxime şi eforturile unitare tangenţiale, ceea ce pune în evidenţă atît inaplicabilitatea, în acest caz, a teoriei de bară din Rezistenţa materialelor, cît şi importanţa calculului exact efectuat deoarece mărimea eforturilor tangenţiale maxime reprezintă circa o treime din eforturile unitare normale maxime.

Tabelul 1

y (mm)	x (mm)	σ_y (daN/cm²)	τ_{yx} (daN/cm²)
	− 5.762	1349.136	−452.788
	− 4.322	737.239	−501.807
	− 2.881	259.216	−623.373
	− 1.441	− 78.036	−749.017
17.170	0.000	− 321.759	−817.322
	1.441	− 556.517	−802.258
	2.881	− 867.969	−725.526
	4.322	−1306.357	−645.060
	5.762	−1868.958	−627.247
	− 7.648	1747.349	−586.434
	− 5.736	1211.190	−484.409
	− 3.824	693.542	−445.598
	− 1.912	210.996	−446.666
22.787	− 0.000	− 242.441	−464.026
	1.912	− 689.122	−486.783
	3.824	− 1152.228	−522.569
	5.736	− 1640.012	−592.347
	7.648	− 2139.027	−717.886
	− 9.533	1756.171	−589.395
	− 7.150	1289.625	−440.161
	− 4.766	797.990	−345.787
	− 2.383	200.100	−301.253
28.405	0.000	− 194.495	−298.639
	2.383	− 683.670	−333.436
	4.766	− 1165.964	−407.535
	7.150	− 1633.641	−526.753
	9.533	− 2070.389	−694.851
	−11.418	1664.377	−558.587
	− 8.564	1254.497	−396.312
	− 5.709	801.336	−282.157
34.022	− 2.855	323.710	−219.594
	− 0.000	− 162.383	−208.163
	2.855	− 643.948	−246.464
	5.709	− 1108.554	−333.711
	8.564	− 1541.712	−468.607
	11.418	− 1926.714	−646.631

5. CONCLUZII

a) În cazul oricărui angrenaj pe flancurile de la baza dinților, așa cum s-a subliniat în lucrările [4], [5], [6] apar concentrări importante ale eforturilor unitare tangențiale și deci calculul exact al acestora reprezintă o necesitate.

b) Procedeul de calcul al eforturilor unitare, prezentat în această lucrare, stabilit prin aplicarea metodologiei teoriei plane a elasticității și transpus în programul denumit „CDB", permite calculul exact al eforturilor unitare normale și tangențiale în secțiunea cea mai solicitată și oricare altă secțiune necesitînd din partea proiectantului numai datele dimensionale generale ale unui angrenaj și forța tangențială de calcul.

c) Programul CDB este întocmit pentru un angrenaj cilindric cu dinți drepți, dar el poate fi aplicat și la alte tipuri de angrenaje cu condiția ca să se determine în prealabil mărimile corespunzătoare angrenajului cilindric echivalent.

Aceste mărimi pot fi calculate cu ajutorul unei subrutine care să fie atașată programului general.

d) Întrucît eforturile unitare maxime σ și τ apar în aceleași puncte (fibrele extreme ale dintelui) și cum valorile lui τ_{max} reprezintă circa $\frac{1}{3}\sigma_{max.}$, rezultă cu neglijarea tensiunii tangențiale (metoda clasică) sau introducerea ei cu valoarea medie (metoda Niemann) nu pot fi acceptate la stadiul actual al proiectării, cînd accesul la un calculator este la îndemîna oricărui institut de proiectare. În plus, folosirea valorilor aproximative pentru σ (calculate în rezistența materialelor) nu reprezintă o măsură de prudență ci, din contră, o situație defavorabilă în care tensiunile maxime de calcul sînt inferioare celor reale.

Pentru exemplul analizat, valoarea $\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ calculată cu valorile maxime exacte σ și τ depășește cu mai mult de 12% valoarea lui $\sigma_{ech} = \sigma_T$ stabilit în metoda clasică pentru calculul angrenajului.

e) Avînd în vedere faptul că în punctele cele mai solicitate ale secțiunii apar concomitent tensiuni σ și τ variabile, verificarea de rezistență trebuie făcută după teoria solicitărilor variabile compuse cu o expresie de forma

$$\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{L0}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{max}}{\tau_{L0}}\right)^2 = \frac{1}{c^2}, \tag{5.1}$$

în care c reprezintă coeficientul de siguranță, iar σ_{L0}, τ_{L0} rezistențele limită la oboseală pentru tensiuni normale, respectiv tangențiale.

Primită la redacție la 9 iulie 1974

Anexa 1

```
CDB;
    "BEGIN"
"INTEGER"Z,I,J,I1;
"REAL"M,A0N,C0,F0,CSI,MIU,FTC,V,R0,X0,Y0,RD,L,D,RE,RI,CAE,
     AE,F1,EVA0N,B1,FNC,FC,YB,XB,YA,XA,Q,P,EVAE,SE,MD,A,B,H,LM,
     TGA2,GA2,GA,H1,YI,PY,YF,PX,X,Y,SIGY,TAU;
"ARRAY"G[1:8],F[1:8,1:2];
"READ"M,Z,A0N,C0,F0,CSI,D,MIU,LM,FTC;"PRINT"SAMELINE,ALIGNED(5,2)
,M,Z,A0N,C0,F0,CSI,
    ""L"",SAMELINE,D,MIU,LM,ALIGNED(7,2),FTC,""L2"";
A1:=A*V;                                          V:=3.14159/180;
A0N:=A0N*V;
R0:=C0/(1-SIN(A0N));
X0:=(F0+C0-R0-CSI)*M;
Y0:=(3.14159*4+F0*TAN(A0N)+R0*COS(A0N))*M;
RD:=M*Z/2;
L:=M*((Z/2+CSI)*(1-COS(3.14159/Z))+F0*(1+COS(3.14159/Z))+
     C0*COS(3.14159/Z)-D);RE:=RD+(F0+CSI-D)*M;
   RI:=RD-(F0+C0-CSI)*M;
                          CAE:=RD*COS(A0N)/RE;
AE:=ARCCOS(CAE);
F1:=ARCTAN(MIU);
EVA0N:=TAN(A0N)-A0N;
B1:=TAN(AE)-3.14159/(2*Z)-2*CSI*TAN(A0N)/Z-EVA0N-F1;
FNC:=FTC/COS(A1);
FC:=FNC*SQRT(1+MIU↑2);
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"8"DO"
"BEGIN"
"READ"G[I];
G[I]:=G[I]*V;
F[I,1]:=(Y0+X0*TAN(G[I]))/RD;
"IF"F[I,1]"GE"Y0/RD"AND"F[I,1]"LE"
    Y0/RD+X0*TAN(3.14159/2-A0N)/RD"THEN"
F[I,2]:=1.0"ELSE"F[I,2]:=0.0;
"END";
J:=0;
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"5"DO"
"BEGIN"
"IF"F[I,2]=0"THEN""GOTO"ET1;
XB:=(RD-X0-R0*M*COS(G[I]))*COS(F[I,1])+(X0*TAN(G[I])+
                                                R0*M*SIN(G[I]))*
SIN(F[I,1])-RI*COS(3.14159/Z);
                          YB:=(RD-X0-R0*M*COS(G[I]))*SIN(F[I,1])-(P0*TAN
(G[I])+R0*M*SIN(G[I]))*COS(F
[I,1]);
"IF"J=0"THEN""BEGIN"
    YA:=YB;
    XA:=XB;
    I1:=I;
"GOTO"ET2;"END";
"IF"YA>YB"THEN""BEGIN"
    YA:=YB;
    XA:=XB;
    I1:=I;
    "END";
ET2:
J:=J+1;
ET1:
"END";
"PRINT"SAMELINE,ALIGNED(6,2),F[I1,1],XA,YA,""L"";
YB:=YA;
XB:=XA;
```

Anexa 1 (continuare)

```
Q:=FC*COS(B1)/LM;
P:=FC*SIN(B1)/LM;
EVAE:=TAN(AE)-AE;
SE:=RE*(3.14159/Z-2*(EVAE-EVA0N));
MO:=P*SE/2;
A:=SE/2;
B:=YB;
H:=L;
TGA2:=(B-A)/H;
GA2:=ARCTAN(TGA2);
GA:=2*GA2;
H1:=B/TAN(GA2)-H;
YI:=H1+H/4;
PY:=H/4;
YF:=H1+H;
PX:=A/10;
"FOR"Y:=YI"STEP"PY"UNTIL"YF"DO"
"FOR"X:=Y*TAN(-GA2)"STEP"ABS(Y*TAN(-GA2)/4)"UNTIL"
    Y*TAN(GA2)+0.02"DO"
"BEGIN"
   SIGY:=(-(2*P*Y↑3)/((GA+SIN(GA))*(X↑2+Y↑2)↑2)-
         (2*Q*X*Y↑2)*((GA-SIN(GA))*(X↑2+Y↑2)↑2)-
         (4*(MO+Q*H1)*X*Y/((SIN(GA)-GA*COS(GA))*(X↑2+Y↑2)↑2))
        *((X↑2-Y↑2)/(X↑2+Y↑2)-SIN(GA2)*SIN(GA2)))*100;
TAU:=(-(2*P*X*Y↑2)/((GA+SIN(GA))*(X↑2+Y↑2)↑2)-(2*Q*X↑2*Y)/((GA-SIN(GA))*(X
↑2+Y↑2)↑2)-
      (MO+Q*H1)*((X↑2-Y↑2)↑2-4*X↑2*Y↑2+(X↑4-Y↑4)*COS(GA))/(
      (SIN(GA)-GA*COS(GA))*(X↑2+Y↑2)↑3))*100;

"PRINT"SAMELINE,ALIGNED(9,3),Y,X,SIGY,TAU,''L'';
"END";

"END";
```

BIBLIOGRAFIE

1. LEOPOLD SAUER ş.a., *Angrenaje, proiectare, materiale*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1970.
2. M. FILONENCO, *Teoria elasticităţii*, Ed. tehnică, 1952.
3. P.P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticităţii*, vol. II. Ed. Academiei, 1966.
4. V. ANDOJSKI, *Calculul angrenajelor*, Institutul de documentare tehnică ,Bucureşti, 1956.
5. G. NIEMANN, *Maschinenelemente*, Berlin-Götingen-Heildelberg, Springer Verlag, 1958.
6. I. SOLOMOV, *Vlitianie tolşcini oboda zubciatogo colesa na velicinu coefiţienta conţentraţii naprajenii*, Vestnic maşinostroenia, *6* (1973).

CALCULUL ADÎNCIMII OPTIME DE MANDRINARE PENTRU ÎMBINĂRILE PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE AXIAL LA ÎNTINDERE SAU COMPRESIUNE

de A. PAVEL
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se prezintă o metodă analitică de calcul a adîncimii optime de mandrinare, elaborată — pe considerente de rezistență la smulgere — pentru îmbinările prin mandrinare lisă folosite în cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activității industriale. După ce se precizează ipotezele de calcul și formulele pentru determinarea presiunii instantanee de contact și a forțelor de smulgere, se procedează la stabilirea și interpretarea unor noi formule de calcul pentru adîncimea de mandrinare atît pentru solicitarea axială de întindere, cît și pentru solicitarea axială de compresiune. Totodată se indică condițiile de verificare și domeniul de valabilitate al acestor formule. În încheierea lucrării sînt dezvoltate două exemple de calcul folosind noile formule.

1. INTRODUCERE

Îmbinarea prin mandrinare este tipul de asamblare nedemontabilă folosit pe scară largă în construcția de utilaje pentru industriile petrolieră prelucrătoare, chimică, petrochimică, energetică etc., care, în cazul aparaturii tubulare, are ca scop realizarea unei legături etanșe și rezistente între țevile fasciculelor tubulare și corpurile locașurilor, de obicei cilindrice, din plăcile tubulare în care acestea se fixează.

Practica de mai multe decenii a realizării tehnologice — de cele mai multe ori în mod empiric — și a exploatării îmbinărilor prin mandrinare demonstrează că rezistența și etanșeitatea acestui tip de îmbinare depind de o întreagă serie de factori, printre care cei mai importanți sînt următorii [23] : cuplul motor folosit la antrenarea dornului dispozitivului de mandrinare sau gradul de mandrinare, caracteristicile fizice-mecanice ale materialelor țevilor și plăcilor tubulare, starea suprafețelor de contact, prezența și mărimea capetelor (răsfrînte sau nu) de țeavă petrecute în afara plăcii (fig. 1*a* și *b*), tipul îmbinării prin mandrinare (fig. 1), viteza și procedeul de mandrinare (prin rostogolire, cu acționare pneumatică sau electrică; prin tragere, cu acționare pneumatică sau hidraulică etc.), numărul rolelor de mandrinare (și de răsfrîngere) etc.

Metodele de calcul la rezistență și etanșeitate elaborate pînă în prezent pentru îmbinările prin mandrinare pot fi împărțite, în general, în următoarele două grupe :

— metode bazate în principal pe date experimentale acumulate de-a lungul unei îndelungate perioade de realizări empirice [1] — [15];

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 2, 1975, P. 229–248

în majoritate, așa cum rezultă din studiul [23], aceste metode nu sînt suficient de bine fundamentate din punct de vedere teoretic;

— metode analitice, bazate pe particularizări ale teoriei elasticității [16], [17] sau ale teoriei plasticității [18] — [22] (problema plană); aceste metode au fost numai parțial și în cazuri cu totul particulare verificate

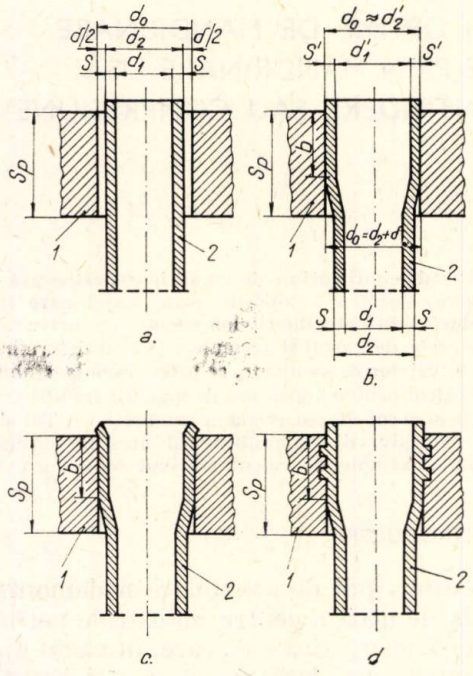


Fig. 1. — Tipuri de îmbinare prin mandrinare: *a* — țeava nemandrinată; *b* — mandrinare lisă în locașuri cilindrice, fără răsfrîngerea capătului (capetelor) țevii; *c* — mandrinare lisă în locașuri cilindrice, cu răsfrîngerea capătului (capetelor) țevii; *d* — mandrinare (cu sa fără răsfrîngerea capătului sau a capetelor țevilor) în locașuri cilindrice cu renuri.
1 — placă tubulară; *2* — țeavă; *3* — renuri.

experimental, sînt foarte complicate și, din această cauză, au un domeniu restrîns de aplicare și valabilitate.

În țara noastră, problema calculului îmbinărilor prin mandrinare a fost abordată de curînd [23]—[25], deși ponderea acestor îmbinări în construcția de aparatură tubulară pentru industriile petrolieră prelucrătoare, chimică, petrochimică, energetică etc. a fost și a rămas foarte mare, iar dificultățile ridicate de cerințele calitative impuse acestor îmbinări au fost și sînt deosebit de însemnate [23].

În cele ce urmează se va prezenta — pe baza considerentelor de rezistență la smulgere — o metodă analitică de calcul a adîncimii de mandrinare pentru îmbinările prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere (fig. 3*a*) sau compresiune (fig. 3*b*) elaborată special pentru cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activității industriale.

IPOTEZE DE CALCUL

1. Îmbinarea prin mandrinare lisă dintre țevi și placa tubulară se consideră ca fiind o „îmbinare prin frecare" între două piese tubulare (fig. 2). Grosimea m' a piesei tubulare exterioare (decupate din placa

tubulară) se presupune egală (din motive de rigiditate la mandrinare) cu jumătate din lățimea minimă admisibilă m (egală cu cel puțin 6 mm [23]) a punții dintre două țevi alăturate (fig. 2).

2. În exploatare, deci după încheierea operațiilor de mandrinare și punerea sub sarcină a îmbinărilor prin mandrinare, se consideră că

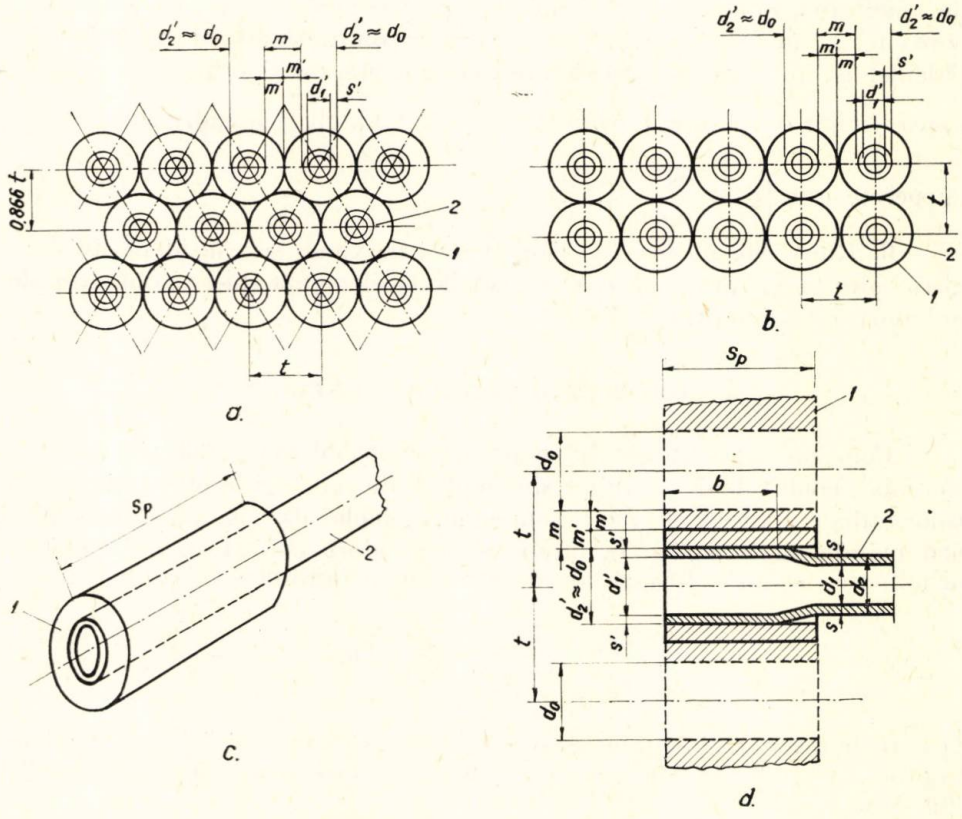


Fig. 2. — Îmbinarea prin mandrinare lisă privită ca o îmbinare prin frecare între două piese tubulare : *a* — repartiția triunghiulară a țevilor ; *b* — repartiția pătratică a țevilor ; *c* — piese tubulare îmbinate prin frecare ; *d* — secțiune longitudinală prin îmbinare.
1 — placa tubulară sau piesa tubulară exterioară, decupată din placa tubulară ;
2 — țevile mandrinate sau piesa tubulară interioară.

modul de lucru al celor două elemente (piese tubulare) componente ale îmbinării corespunde unui sistem elastic, în calculele ce urmează avîndu-se în vedere numai deformațiile elastice ale acestui sistem care apar în condiții de lucru. Rezultă așadar că eforturile unitare din îmbinare nu trebuie să depășească în nici un caz limita de curgere a materialelor din care se confecționează elementele îmbinării, pentru ca metoda de calcul ce va fi prezentată să poată fi aplicată. Se va avea în vedere că $\sigma_{ct} < \sigma_{cp}$.

3. Se consideră că în domeniul deformațiilor elastice țeava este suficient de rigidă, astfel că nu există pericolul pierderii stabilității ei nici în direcție radială, și nici în direcție axială.

4. Se consideră [23], de asemenea, că placa tubulară este infinit rigidă.

5. Se vor considera, separat, și se vor studia următoarele două cazuri de solicitare a îmbinărilor prin mandrinare lisă : solicitarea axială la întindere (fig. 3*a*, indice 1) și solicitarea axială la compresiune (fig. 3*b*, indice 2). Calculele se vor face, pentru fiecare caz în parte, considerînd atît mandrinarea țevilor cu perete subțire $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} < 1{,}1\right)$, cît și mandrinarea țevilor cu perete gros $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1{,}1\right)$.

6. Eforturile unitare σ_p și σ_t (valori maxime) se consideră uniform distribuite pe grosimea m' și s' a celor două elemente (piese tubulare) ale îmbinării prin mandrinare lisă.

CALCULUL PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT

Folosind legea lui Hooke generalizată (problema plană și problema spațială), condițiile de echilibru și condițiile de compatibilitate a deformațiilor radiale, toate scrise pentru un element inelar dx (fig. 3*c*) al îmbinării prin mandrinare lisă (fig. 3), într-o lucrare anterioară [24] a fost stabilită următoarea ecuație diferențială a presiunii instantanee de contact :

$$\frac{dp_{1,2}}{dx} \pm \frac{k_{1,2}}{r_0} \cdot p_{1,2} = 0, \tag{1}$$

în care indicele 1 și semnul plus (+) corespunde solicitării la întindere (fig. 3*a*), iar indicele 2 și semnul minus (—) — solicitării la compresiune (fig. 3*b*).

Formulele de calcul ale coeficienților $k_{1,2}$ (respectiv k_1 și k_2) sînt indicate, recapitulativ, în tabela 1, în funcție de tipul țevilor mandrinate, de natura solicitării și de corelația dintre modulele de elasticitate longitudinale E_p și E_t.

Integrînd ecuația diferențială (1) și punînd următoarele condiții de contur :

— pentru solicitarea de întindere (fig. 3*a* și *d*) :

$$x = 0 \rightarrow \sigma_{p_1} = 0 \rightarrow p_0 = p_1|_{x=0};$$

— pentru solicitarea de compresiune (fig. 3*b* și *e*) :

$$x = b \rightarrow \sigma_{p_2} = 0 \rightarrow p_0 = p_2|_{x=b},$$

Tabela 1

Formule de calcul pentru coeficienții k_1 și k_2 (v. formulele 1—4)

Corelația dintre modulele de elasticitate longitudinale E_p și E_t / Solicitarea îmbinării / Tipul țevilor mandrinate	$E_p \neq E_t$		$E_p = E_t$		Notații
	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	Întindere (k_1)	Compresiune (k_2)	
Țevi cu perete gros. Starea de eforturi este spațială	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)-\mu\dfrac{E_p-E_t}{E_t}(\beta_p^2-1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2+1)+\beta_p^2+1)-\mu\dfrac{E_p-E_t}{E_t}(\beta_p^2-1)}$	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$\beta_t = \dfrac{1}{1-\dfrac{s'}{r_0}}$; $\beta_p = 1 + \dfrac{m'}{r_0}$
Țevi cu perete gros. Starea de eforturi este plană	$k_1 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$	$k_2 = 2\mu f \dfrac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2+1)+(\beta_p^2+1)}$			$\psi = \dfrac{E_p(\beta_p^2-1)}{E_t(\beta_t^2-1)}$ pentru $E_p \neq E_t$ $\psi = \dfrac{\beta_p^2-1}{\beta_t^2-1}$ pentru $E_p = E_t$
Țevi cu perete subțire	$k_1 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)+\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)-\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$k_1 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)+\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\psi\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)-\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1-\dfrac{s'}{2r_0}\right)+\left(1+\dfrac{m'}{2r_0}\right)\right]}$	$\psi = \dfrac{m'E_p}{s'E_t}$ pentru $E_p \neq E_t$ $\psi = \dfrac{m'}{s'}$ pentru $E_p = E_t$
	$k_1 \approx \mu f$ pentru $\begin{cases} s' \ll 2r_0 \\ m' \ll 2r_0 \end{cases}$	$k_2 \approx \mu f \dfrac{\psi-1}{\psi+1}$ pentru $\begin{matrix} s' \ll 2r_0 \\ m' \ll 2r_0 \end{matrix}$	$k_1 = \mu f$ pentru $\begin{cases} s' \ll 2r_0 \\ m' \ll 2r_0 \end{cases}$	$k_2 = \mu f \dfrac{\psi-1}{\psi+1}$ pentru $\begin{cases} s' \ll 2r_0 \\ m' \ll 2r_0 \end{cases}$	

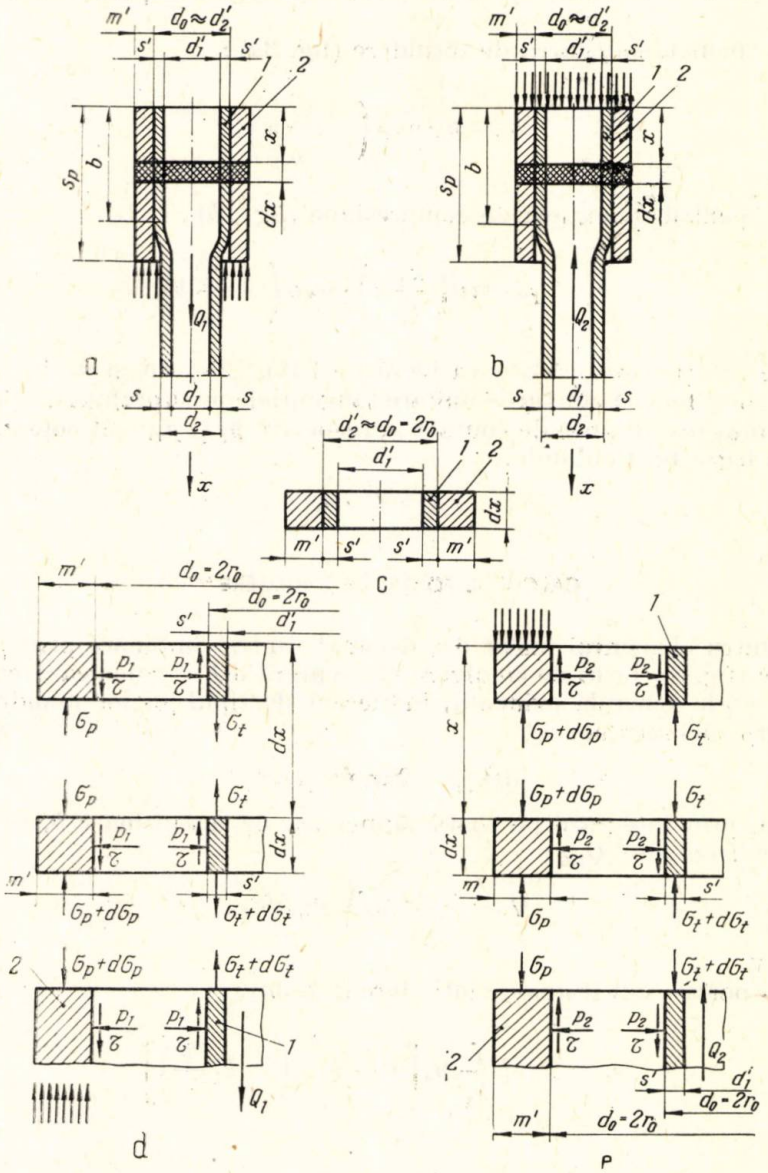


Fig. 3. — Scheme de calcul a îmbinărilor prin mandrinare lisă : *a* — solicitarea la întindere a îmbinărilor prin mandrinare ; *b* — solicitarea la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare ; *c* — element inelar *dx* al îmbinărilor prin mandrinare ; *d* — echilibrul elementului inelar *dx* în cazul solicitării la întindere ; *e* — echilibrul elementului inelar *dx* în cazul solicitării la compresiune.
1 — țevile mandrinate sau piesa tubulară interioară ;
2 — placa tubulară sau piesa tubulară exterioară, decupată din placa tubulară.

pentru calculul presiunii instantanee de contact între cele două elemente (piese tubulare) îmbinate prin mandrinare, au fost obținute următoarele formule :

— pentru solicitarea de întindere (fig. 3*a*) :

$$p_1 = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{k_1}{r_0} x\right); \tag{2}$$

— pentru solicitarea de compresiune (fig. 3*b*) :

$$p_2 = p_0 \cdot \exp\left(\frac{k_2}{r_0} x\right) \cdot \exp\left(-\frac{k_2}{r_0} b\right). \tag{3}$$

Se menționează că atît în lucrările [24], [25], cît și în lucrarea de față, se consideră că eforturile unitare tangențiale pe suprafața de contact τ și presiunea instantanee de contact p, respectiv p_1 și p_2, sînt corelate între ele prin legea lui Coulomb :

$$\tau = f^{*)} \cdot p. \tag{4}$$

CALCULUL FORȚEI DE SMULGERE **)

Pentru elementul inelar dx, decupat dintr-o îmbinare prin mandrinare lisă (fig. 3), forța de smulgere elementară dQ se calculează cu următoarea relație generală evidentă, indiferent de tipul țevilor mandrinate și de natura solicitărilor :

$$dQ_{1,2} = 2\pi r_0 f p_{1,2}\, dx, \tag{5}$$

de unde, prin integrare pe toată adîncimea de mandrinare b, se obține forța de smulgere $Q_{1,2}$:

$$Q_{1,2} = 2\pi r_0 f \int_0^b p_{1,2}\, dx, \tag{6}$$

respectiv

— pentru solicitarea de întindere (fig. 3*a*) :

$$Q_1 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} p_0 \left[1 - \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right)\right] \tag{7}$$

sau

$$Q_1 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} p_0 \cdot q_1, \tag{8}$$

---

*) Cercetările experimentale efectuate de autorii lucrării [16] pe modele de îmbinare prin mandrinare lisă au arătat că valorile coeficientului de frecare sînt în general cuprinse în intervalul $f = 0{,}40 \ldots 0{,}50$, ceea ce corespunde datelor menționate și în alte lucrări de specialitate [22].

**) Smulgerea se poate produce prin tragere (solicitarea de întindere) sau prin împingere (solicitarea de compresiune).

— pentru solicitarea de compresiune (fig. 3*b*) :

$$Q_2 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} p_0 \left[1 - \exp\left(- k_2 \frac{b}{r_0}\right)\right] \tag{9}$$

sau

$$Q_2 = 2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} p_0 q_2, \tag{10}$$

rezultînd

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{q_1}{q_2}, \tag{11}$$

unde

$$q_1 = 1 - \exp\left(- k_1 \frac{b}{r_0}\right), \tag{12}$$

$$q_2 = 1 - \exp\left(- k_2 \frac{b}{r_0}\right) \tag{13}$$

sau

$$q_1 = \frac{Q_1}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} p_0}, \tag{14}$$

$$q_2 = \frac{Q_2}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} p_0}. \tag{15}$$

Domeniul de valabilitate al formulelor de calcul (5) —(15) pentru forţa de smulgere este precizat în lucrarea [25], în care sînt date şi condiţiile respective de verificare pentru diferite ipoteze de calcul (privind tipul ţevilor mandrinate, starea de eforturi, natura solicitării etc.).

CALCULUL ADÎNCIMII DE MANDRINARE

O importanţă deosebită pentru realizarea tehnologică corespunzătoare şi pentru asigurarea unei anumite rezistenţe la smulgere a îmbinărilor prin mandrinare o prezintă adîncimea de mandrinare b, adică adîncimea pe care se realizează îmbinarea 100 % prin mandrinare a celor două elemente ale asamblării nedemontabile respective.

În funcţie de valoarea lui b variază forţa de smulgere Q (formulele 6 —15), deci variază rezistenţa îmbinării prin mandrinare şi pentru a asigura îmbinării o anumită rezistenţă este necesar ca b să aibă o anumită valoare. Această valoare poate fi determinantă în stabilirea grosimii

plăcii tubulare s_p (dacă restul solicitărilor nu sînt periculoase), ea reprezentînd grosimea minimă $s_{p_{min}}$ a plăcii tubulare sub care nu se va putea coborî dacă se dorește asigurarea unei anumite rezistențe la smulgere.

În anumite situații, cînd solicitările din placa tubulară (datorite presiunii sau diferenței de presiune, momentului încovoietor etc.), provenite din alte încărcări decît cele axiale din îmbinările prin mandrinare, nu sînt prea ridicate, adîncimea de mandrinare b va reprezenta grosimea maximă $s_{p_{max}}$ a plăcii tubulare, peste care nu este necesar să se treacă deoarece condițiile de lucru (rezistență la smulgere, presiune, moment încovoietor etc.) nu necesită acest lucru și sub care nu este îngăduit să se coboare pentru că scade nepermis de mult rezistența la smulgere.

Rezultă din această scurtă analiză că adîncimea de mandrinare b poate constitui unul din criteriile (uneori chiar singurul criteriu) care să precizeze limitele extreme de variație ale grosimii s_p a plăcii tubulare. Acest lucru este deosebit de important din punct de vedere practic, dacă se are în vedere consumul de material și de energie pentru realizarea îmbinărilor prin mandrinare. Prin stabilirea unor adîncimi de mandrinare b raționale, în condițiile unei perfecționări continue a operațiilor de mandrinare (în spiritul concluziilor prezentate în lucrarea [23]) se poate îmbunătăți mult calitatea îmbinărilor prin mandrinare și se pot reduce serios cheltuielile de fabricație.

În cele ce urmează se vor indica noi formule de calcul pentru adîncimea de mandrinare b și se vor expune cîteva noi considerații privind modul de rezolvare al problemei determinării acestei valori.

Logaritmînd expresia (7) și ținînd cont de notația (14), după efectuarea unor operații elementare de calcul și ordonare, pentru îmbinarea prin mandrinare lisă solicitată axial la întindere (fig. 3*a*) se obține

$$b_1 = \frac{r_0}{k_1} \cdot \ln \frac{1}{1 - q_1}. \tag{16}$$

Logaritmînd expresia (8) și ținînd cont de notația (15), după efectuarea de asemenea a unor operații elementare de calcul și ordonare, pentru îmbinarea prin mandrinare lisă solicitată axial la compresiune (fig. 3*b*) se obține

$$b_2 = \frac{r_0}{k_2} \cdot \ln \frac{1}{1 - q_2}. \tag{17}$$

Formulele (16) și (17) astfel obținute permit determinarea adîncimii de mandrinare pentru îmbinările prin mandrinare solicitate axial la întindere și, respectiv, la compresiune, dacă se cunosc dimensiunile constructive ale elementelor respective (țevi și placă tubulară), coeficienții k_1 și k_2, coeficientul de frecare f, presiunea inițială de contact p_0 și forța axială Q_1 sau Q_2 care urmează să fie preluată de către îmbinare.

În legătură cu folosirea acestor formule se fac următoarele observații:

1) forțele de smulgere relative q_1 și q_2 se vor calcula cu formulele (14) și, respectiv, (15);

2) intervalul de variaţie al acestor forţe de smulgere relative este următorul :

$$0 < q_1 < 1, \qquad 0 < q_2 < 1, \tag{18}$$

deoarece întotdeauna (vezi formulele 12 şi 13) sînt îndeplinite condiţiile evidente :

$$\begin{aligned} &k_1 \frac{b}{r_0} > 0 \rightarrow \exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right) > 1, \quad \text{deci} \quad \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right) < 1 \\ &k_1 \frac{b}{r_0} < \infty \rightarrow \exp\left(k_1 \frac{b}{r_0}\right) < \infty, \quad \text{deci} \quad \exp\left(-k_1 \frac{b}{r_0}\right) > 0 \\ &k_2 \frac{b}{r_0} > 0 \rightarrow \exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) > 1, \quad \text{deci} \quad \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) < 1 \\ &k_2 \frac{b}{r_0} < \infty \rightarrow \exp\left(k_2 \frac{b}{r_0}\right) < \infty, \quad \text{deci} \quad \exp\left(-k_2 \frac{b}{r_0}\right) > 0 ; \end{aligned} \tag{19}$$

3) formulele (14) şi (15) sînt valabile, în conformitate cu ipotezele de calcul precizate la începutul lucrării, numai în domeniul deformaţiilor elastice, verificarea încadrării în acest domeniu urmînd a se face aşa cum se arată în lucrarea [25].

Dintre toate condiţiile de verificare stabilite în lucrarea [25], în cele mai multe cazuri practice sînt suficiente următoarele :

a) pentru ţevile cu perete gros $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1,1\right)$, în cazul solicitării axiale la întindere a îmbinărilor prin mandrinare lisă :

— după teoria întîia de rupere :

$$q_1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_1}{f}\left(1 - \frac{s'}{d_0}\right), \tag{20}$$

— după criteriul de plasticitate al lui Mises-Huber :

$$\frac{2\,\beta_t\, q_1}{\beta_t + 1} \sqrt{1 + \frac{k_1}{f\, q_1}\left[1 + \frac{k_1(\beta_t^4 + 3)}{4\beta_t^4 f\, q_1}\right]} \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_1}{f}, \tag{21}$$

— condiţie de verificare suplimentară :

$$1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{\beta_t^2 + 1}, \tag{22}$$

b) pentru țevile cu perete gros $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1{,}1\right)$, în cazul solicitării axiale la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare lisă:

— după teoria întîia de rupere:

$$q_2 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f} \cdot \left(1 - \frac{s'}{d_0}\right), \tag{23}$$

— după criteriul de plasticitate al lui Saint-Venant:

$$\frac{2\beta_t}{\beta_t + 1}\left[q_2 - \frac{k_2\,(\beta_2^t + 1)\,(1 - q_2)}{2f\beta_t^2}\right] \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{k_2}{f}, \tag{24}$$

— condiție de verificare suplimentară:

$$1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{\beta_t^2 - 1}{\beta_t^2 + 1}, \tag{22}$$

c) pentru țevile cu perete subțire $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} < 1{,}1\right)$, în cazul solicitării axiale la întindere a îmbinărilor prin mandrinare lisă:

— după teoria întîia de rupere:

$$q_1 \leqslant \mu \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0}, \tag{25}$$

— după criteriul de plasticitate al lui Saint-Venant:

$$1 - (1 - \mu)\,(1 - q_1) \leqslant \mu \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0}, \tag{26}$$

— după criteriul de plasticitate al lui Mises-Huber:

$$q_1 \sqrt{1 + \frac{\mu}{q_1}\left(1 + \frac{\mu}{q_1}\right)} \leqslant \mu \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0}, \tag{27}$$

d) pentru țevile cu perete subțire $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} < 1{,}1\right)$, în cazul solicitării axiale la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare lisă:

— după teoria întîia de rupere:

$$q_2 \leqslant \mu \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0} \cdot \frac{\psi - 1}{\psi + 1}, \tag{28}$$

— după criteriul de plasticitate Mises-Huber :

$$q_2 \frac{\psi + 1}{\psi - 1} \sqrt{1 - \frac{k_2(1 - q_2)}{f q_2} \left[1 - \frac{k_2(1 - q_2)}{f q_2}\right]} \leqslant \mu \cdot \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0}, \tag{29}$$

— condiție de verificare suplimentară :

$$1 \leqslant \frac{\sigma_{ct}}{p_0} \cdot \frac{s'}{r_0}. \tag{30}$$

Așadar, formulele (16) și (17) sînt valabile și deci pot fi folosite în practică dacă sînt îndeplinite, corespunzător, condițiile (20) — (30). Dacă nu sînt îndeplinite corespunzător aceste condiții, deci se iese în afara domeniului deformațiilor elastice, formulele (16) și (17) își pierd valabilitatea și deci nu mai pot fi folosite în practică.

Făcînd raportul forțelor de smulgere relative q_1 și q_2 (formulele 14 și 15), se obține

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{Q_1 k_1}{Q_2 k_2}, \tag{31}$$

de unde rezultă

$$q_1 = q_2 \cdot \frac{Q_1 k_1}{Q_2 k_2} \tag{32}$$

sau

$$q_2 = q_1 \frac{Q_2 k_2}{Q_1 k_1}. \tag{33}$$

Dacă îmbinarea prin mandrinare este solicitată axial și la întindere și la compresiune de o aceeași forță $Q = Q_1 = Q_2$, atunci din relațiile (31) — —(33) rezultă

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{k_1}{k_2}, \tag{34}$$

$$q_1 = q_2 \cdot \frac{k_1}{k_2}, \tag{35}$$

$$q_2 = q_1 \frac{k_2}{k_1}, \tag{36}$$

de unde, dacă se are în vedere că întotdeauna $k_1 \gg k_2$, se obține

$$q_1 \gg q_2. \tag{37}$$

Făcînd raportul adîncimilor de mandrinare b_1 și b_2 (v. formulele 16 și 17), se obține

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\ln \dfrac{1}{1-q_1}}{\ln \dfrac{1}{1-q_2}}. \tag{38}$$

de unde rezultă

$$b_1 = b_2 \cdot \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\ln \dfrac{1}{1-q_1}}{\ln \dfrac{1}{1-q_2}} \tag{39}$$

sau

$$b_2 = b_1 \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{\ln \dfrac{1}{1-q_2}}{\ln \dfrac{1}{1-q_1}}. \tag{40}$$

Avînd în vedere că întotdeauna $k_1 \gg k_2$ și că, pentru $Q = Q_1 = Q_2$, este îndeplinită inegalitatea (37), rezultă din relațiile (38) — (40) că, pentru îmbinările prin mandrinare lisă solicitate axial și la întindere și la compresiune de o aceeași forță Q, adîncimile de mandrinare b_1 și b_2 sînt în general diferite, fiind îndeplinită condiția $b_1 > b_2$.

Formulele (16) și (17) pot fi scrise și sub următoarea formă generală :

$$b_{1,2} = \frac{r_0}{k_{1,2}} \cdot \ln \frac{1}{1-q_{1,2}}, \tag{41}$$

de unde rezultă

$$\frac{b_{1,2} \cdot k_{1,2}}{r_0} = \ln \frac{1}{1-q_{1,2}}. \tag{42}$$

În tabela 2, pentru diferite valori ale forței de smulgere relative $q_{1,2}$, sînt indicate valorile $\frac{b_{1,2} \cdot k_{1,2}}{r_0}$ și $\frac{b_{1,2}}{r_0}$, calculate cu formula (42),iar în figura 4 este reprezentată grafic dependența (42).

Din figura 4 se observă că pentru o valoare constantă $k_{1,2}$ și un diametru $d_0 = 2r_0$ al locașului din placa tubulară constant, cu creșterea forței de smulgere relative $q_{1,2}$, deci cu creșterea forței de smulgere $Q_{1,2}$, adîncimea de mandrinare necesară b crește după o lege exponențială, tinzînd asimptomic către $+\infty$ pentru $q_{1,2} \to 1,0$.

Se observă, de asemenea, că în aceleaşi condiţii ($k_1 = 0{,}12$; $k_2 = 0{,}05$; $r_0 = \text{const.}$), pentru $q_1 = q_2 = q$, adîncimea de mandrinare nece-

Tabela 2

Valorile $\frac{b_{1,2} \cdot k_{1,2}}{r_0}$ şi valorile $\frac{b_{1,2}}{r_0}$ calculate cu formula (42)

$q_{1,2}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
a) Cazul general											
$\frac{b_{1,2} \cdot k_{1,2}}{r_0}$	0,000	0,108	0,223	0,357	0,506	0,693	0,915	1,201	1,606	2,303	$+\infty$
b) Cazul $k_1 = 0{,}12$											
$\frac{b_1}{r_0}$	0,00	0,90	1,86	2,97	4,21	5,77	7,63	10,00	13,39	19,18	$+\infty$
c) Cazul $k_2 = 0{,}05$											
$\frac{b_2}{r_0}$	0,00	2,16	4,46	7,15	10,10	13,84	18,30	24,00	32,10	46,00	$+\infty$

sară b_1 pentru solicitarea de întindere (fig. 4*b*) este mai mică decît adîncimea de mandrinare necesară b_2 pentru solicitarea de compresiune (fig. 4*c*),

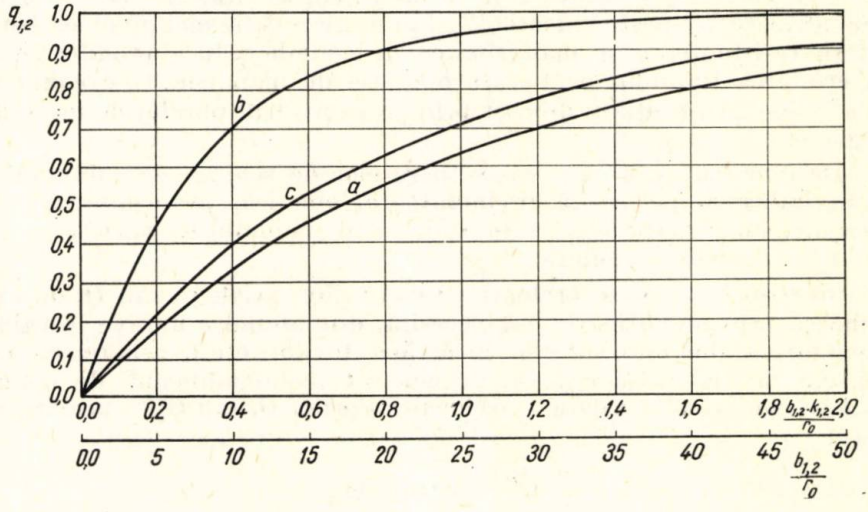


Fig. 4. — Reprezentarea grafică a dependenţei (42) : *a* — cazul general ; *b* — cazul $k_1 = 0{,}12$; *c* — cazul $k_2 = 0{,}05$.

deoarece, conform cu (31), $Q_2 > Q_1$, pentru cazul din figura 4 rezultînd :

$$\frac{Q_1 k_1}{Q_2 k_2} = 1,$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{k_1}{k_2} = \frac{0{,}12}{0{,}05} Q_1 = 2{,}4\, Q_1 \tag{43}$$

sau, dacă se are în vedere formula (39) sau (40)

$$b_2 = b_1 \frac{k_1}{k_2} = \frac{0{,}12}{0{,}05} b_1 = 2{,}4\, b_1, \tag{44}$$

deci

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{k_1}{k_2}. \tag{45}$$

Această concluzie (45) rezultă direct şi din relaţiile (11) — (13) dacă în acestea din urmă se face $q_1 = q_2 = q$.

Tot din figura 4 rezultă următoarea concluzie deosebit de importantă din punct de vedere practic : în cazul solicitării axiale la întindere sau la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare lisă, forţa de smulgere ($q_{1,2}$ sau $Q_{1,2}$) creşte — de la zero — cu creşterea adîncimii de mandrinare după aceeaşi lege exponenţială, tinzînd asimptotic către o anumită valoare constantă pentru $b \to +\infty$. Înseamnă deci că pentru o anumită valoare a adîncimii de mandrinare, notată, de exemplu, cu $b_{\text{lim}1,2}$, forţa de smulgere $q_{1,2}$ sau $Q_{1,2}$ practic va rămîne constantă. În consecinţă, mărirea adîncimii de mandrinare $b_{1,2}$ peste valoarea $b_{\text{lim}1,2}$ nu are practic nici un efect asupra creşterii rezistenţei prin mandrinare; în schimb reduce productivitatea prin creşterea timpului pe fiecare operaţie de mandrinare şi contribuie serios la sporirea preţului de cost prin creşterea consumului de materiale, energie etc.

De remarcat însă că în cazul aparatelor de schimb de căldură folosite în industria petrolieră prelucrătoare, chimică, petrochimică, energetică etc,. în general $b_{\text{lim}1,2}$ este în afara domeniului de variaţie al grosimii s_p a plăcilor tubulare.

Observaţii. 1) Dacă preluarea solicitărilor axiale Q_1 sau Q_2 de către îmbinarea prin mandrinare lisă necesită, din anumite motive (evaluare aproximativă, neuniformitatea încărcării ţevilor etc.), asigurarea unui coeficient de siguranţă $c_{1,2} > 1$, atunci la calculul adîncimii de mandrinare b se vor avea în vedere — în locul valorilor Q_1 sau Q_2 — următoarele valori :

$$Q_1' = c_1 . Q_1 > Q_1, \tag{46}$$

$$Q_2' = c_2 . Q_2 > Q_2, \tag{47}$$

formulele (14) și (15) devenind în acest caz

$$q_1' = \frac{Q_1'}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_1} p_0} = c_1 \cdot q_1, \tag{48}$$

$$q_2' = \frac{Q_2'}{2\pi r_0^2 \frac{f}{k_2} p_0} = c_2 \cdot q_2, \tag{49}$$

iar formulele (16) și (17) căpătînd următoarea formă :

$$b_1' = \frac{r_0}{k_1} \cdot \ln \frac{1}{1 - c_1 q_1} > b_1, \tag{50}$$

$$b_2' = \frac{r_0}{k_2} \cdot \ln \frac{1}{1 - c_2 q_2} > b_2. \tag{51}$$

Este important de reținut că și în cazul folosirii acestor din urmă formule (50) și (51), satisfacerea condițiilor de verificare (20) — (30) este obligatorie.

2) În afara îmbinărilor prin mandrinare lisă, formulele (16) și (17), respectiv (50) și (51), pot fi folosite pentru determinarea adîncimii de mandrinare b și în cazul altor tipuri de îmbinare prin mandrinare (cu răsfrîngerea capetelor țevilor, cu una sau mai multe renuri cu sau fără răsfrîngerea capetelor țevilor etc., fig. 1), calculul fiind acoperitor în aceste din urmă cazuri.

Exemple de calcul

Exemplul 1. Să se determine adîncimea de mandrinare $b_{1,2}$ pentru o îmbinare prin mandrinare lisă, solicitată axial la întindere sau compresiune pentru care se cunosc următoarele date :

$$d_0 = 2r_0 = 25{,}6 \; mm \; (d_0 \approx d_2'),$$

$$d_2 \times s = 25 \text{ x } 2{,}5 \text{ mm } (d_1 = 20 \text{ mm}),$$

$$\delta = d_0 - d_2 = 0{,}6 \text{ mm},$$

$$t = (1{,}25 \ldots 1{,}35)\, d_2 ; \quad t = 32 \text{ mm},$$

$$m' = \frac{m}{2} = \frac{t - d_0}{2} = \frac{32 - 25{,}6}{2} = 3{,}2 \text{ mm},$$

$s' = \frac{d_0 - d_1}{2} = 2{,}3$ mm, pentru un grad de mandrinare $H = 1{,}6\,\%$ din

$$d_0 = d_2 + \delta ;$$

materialul ţevii: OLT 35, pentru care $\sigma_{ct} = 2\,300$ kgf/cm²; materialul plăcii tubulare: OLC 45 îmbunătăţit, pentru care

$\sigma_{cp} = 3\,800$ kgf/cm²;

$E_p = E_t = 2{,}1 \cdot 10^6$ kgf/cm²,

$f = 0{,}45$,

$\mu = 0{,}3$,

$p_0 = 145$ kgf/cm²,

$Q_1 = 2\,320$ kgf (pentru solicitarea la întindere),

$Q_2 = 2\,885$ kgf (pentru solicitarea la compresiune),

$c_{1,2} = 1{,}0$ (coeficient de siguranţă).

Rezolvare.

1. Se precizează domeniul de calcul:

$$\beta = \frac{d_2}{d_1} = \frac{25}{20} = 1{,}25 > 1{,}1,$$

deci ţeava este cu perete gros, rezultînd (v. tabela 1):

$$\beta_t = \frac{1}{1 - \frac{s'}{r_0}} = \frac{1}{1 - \frac{2s'}{d_0}} = \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot 2{,}3}{25{,}6}} = 1{,}22,$$

$$\beta_p = 1 + \frac{m'}{r_0} = 1 + \frac{2m'}{d_0} = 1 + \frac{2 \cdot 3{,}2}{25{,}6} = 1{,}25.$$

2. Se calculează „maleabilitatea relativă" a ţevii, avîndu-se în vedere că $E_p = E_t$ (vezi tabela 1):

$$\psi = \frac{\beta_p^2 - 1}{\beta_t^2 - 1} = \frac{1{,}25^2 - 1}{1{,}22^2 - 1} = 1{,}16.$$

3. Se calculează coeficienţii k_1 şi k_2 (vezi tabela 1):

$$k_1 = 2\mu f \frac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi(\beta_t^2 + 1) + (\beta_p^2 + 1)} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}45 \cdot \frac{1{,}16 \cdot 1{,}22^2 + 1}{1{,}16 \cdot (1{,}22^2 + 1) + (1{,}25^2 + 1)} = 0{,}136,$$

$$k_2 = 2\mu f \frac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2 + 1) + (\beta_p^2 + 1)} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}45 \cdot \frac{1{,}16 \cdot 1{,}22^2 - 1}{1{,}16 \cdot (1{,}22^2 + 1) + (1{,}25^2 + 1)} = 0{,}036.$$

4. Se calculează forţele de smulgere relative $q_{1,2}$, rezultînd :
— pentru solicitarea la întindere (formula 14) :

$$q_1 = \frac{2\,320}{2.\pi.1{,}28^2 \cdot \dfrac{0{,}45}{0{,}136} \cdot 145} = 0{,}47,$$

— pentru solicitarea la compresiune (formula 15) :

$$q_2 = \frac{2\,885}{2.\pi.1{,}28^2 \cdot \dfrac{0{,}45}{0{,}036} \cdot 145} = 0{,}155.$$

5. Se calculează adîncimea de mandrinare $b_{1,2}$:
— pentru solicitarea la întindere (formula 16) :

$$b_1 = \frac{12{,}8}{0{,}136} \cdot \ln \frac{1}{1 - 0{,}47} = 60 \text{ mm},$$

— pentru solicitarea la compresiune (formula 17) :

$$b_2 = \frac{12{,}8}{0{,}036} \cdot \ln \frac{1}{1 - 0{,}155} = 60 \text{ mm}.$$

6. Se verifică domeniul de valabilitate al formulelor folosite mai sus, de exemplu :
— după criteriul de plasticitate al lui Mises-Huber pentru solicitare la întindere (formula 21) :

$$\frac{2.1{,}22.0{,}47}{1{,}22 + 1} \sqrt{1 + \frac{0{,}136}{0{,}45.0{,}47} \cdot \left[1 + \frac{0{,}136 \cdot (1{,}22^4 + 3)}{4.1{,}22^4.0{,}45.0{,}47}\right]} =$$

$$= 0{,}710 < \frac{2\,300}{145} \cdot \frac{2{,}3}{12{,}8} \cdot \frac{0{,}136}{0{,}45} = 0{,}86,$$

— după criteriul de plasticitate al lui Saint-Venant pentru solicitarea la compresiune (formula 24) :

$$\frac{2.1{,}22}{1{,}22 + 1} \left[0{,}155 - \frac{0{,}036 \cdot (1{,}22^2 + 1) \cdot (1 - 0{,}155)}{2.0{,}45.1{,}22^2}\right] = 0{,}165 <$$

$$< \frac{2\,300}{145} \cdot \frac{2{,}3}{12{,}8} \cdot \frac{0{,}036}{0{,}45} = 0{,}228.$$

Condiţiile de verificare (21) şi (24) fiind îndeplinite, rezultă aşadar că îmbinarea prin mandrinare considerată lucrează în domeniul defor-

maţiilor elastice şi, deci, folosirea formulelor (16) şi (17) nu numai că este permisă, dar este şi corectă. Rezultă deci că, pentru ca îmbinarea prin mandrinare respectivă să asigure satisfacerea condiţiei de rezistenţă, adîncimea de mandrinare adoptată b va trebui să satisfacă următoarea condiţie:

$$b \geqslant b_1 = b_2 = 60 \text{ mm}.$$

Exemplul 2. Să se determine adîncimea de mandrinare $b_{1,2}$ pentru îmbinarea prin mandrinare lisă din exemplul precedent, considerînd $Q = Q_1 = Q_2 = 2\,320$ kgf şi $c = c_1 = c_2 = 1{,}0$.

Rezolvare.

1. Se calculează forţele de smulgere relative $q_{1,2}$ în acest caz:

$$q_1 = \frac{2\,320}{2 . \pi . 1{,}28^2 \cdot \dfrac{0{,}45}{0{,}136} \cdot 145} = 0{,}47,$$

$$q_2 = \frac{2\,320}{2 . \pi . 1{,}28^2 \cdot \dfrac{0{,}45}{0{,}036} \cdot 145} = 0{,}124.$$

2. Rezultă următoarele valori pentru adîncimea de mandrinare $b_{1,2}$:

$$b_1 = \frac{12{,}8}{0{,}136} \cdot \ln \frac{1}{1 - 0{,}47} = 60 \text{ mm},$$

$$b_2 = \frac{12{,}8}{0{,}036} \cdot \ln \frac{1}{1 - 0{,}124} = 46{,}7 \text{ mm}.$$

Aşadar, dacă îmbinarea prin mandrinare considerată urmează să preia, succesiv, o aceeaşi forţă axială Q de întindere sau de compresiune, evident, hotărîtoare va fi adîncimea de mandrinare b_1, adoptîndu-se în final

$$b \geqslant b_1 = 60 \text{ mm}.$$

ANEXĂ

Notaţii:

p_0 este presiunea iniţială de contact (presiunea ce se manifestă pe suprafaţa de contact ţeavă-placă tubulară înainte de solicitarea îmbinării prin mandrinare), în kgf/cm²;

$p, p_1, p_2, p_{1,2}$ — presiunea instantanee de contact, în kgf/cm²;

$Q, Q_1, Q_2, Q_{1,2}, Q_1', Q_2'$ — forţe axiale ce solicită îmbinarea prin mandrinare (forţe de smulgere), în kgf;

$q, q_1, q_2, q_{1,2}, q_1', q_2'$ — forţe de smulgere relative;

σ_{p_1}, σ_{p_2} — eforturi unitare normale longitudinale în placa tubulară, provenite din acţiunea forţelor de smulgere, în kgf/cm²;

σ_{t_1}, σ_{t_2} — eforturi unitare normale longitudinale în ţevi, provenite din acţiunea forţelor de smulgere, în kgf/cm²;

$d\sigma_p$, $d\sigma_t$ — creşteri ale eforturilor unitare normale longitudinale σ_p şi σ_t, în kgf/cm²;

σ_{ct}, σ_{cp} — limita de curgere a materialului din care se confecţionează ţevile şi, respectiv, plăcile tubulare în care se mandrinează ţevile, în kgf/cm²;

τ — eforturi unitare tangenţiale pe suprafaţa de contact ţeavă — placă tubulară, în kgf/cm²;

E_p, E_t — module de elasticitate longitudinale, în kgf/cm²;

ψ — „maleabilitatea relativă" a ţevii [16];

k_1, k_2, $k_{1,2}$ — coeficienţii depinzînd de dimensiunile şi proprietăţile elastice ale pieselor îmbinate prin mandrinare;

f — coeficient de frecare pe suprafaţa de contact dintre piesele îmbinate prin mandrinare;

μ — coeficientul lui Poisson;

x — ordonată curentă, măsurată în direcţie axială, în cm;

dx — creşterea ordonatei curente x, în cm;

b, b_1, b_2, $b_{1,2}$, b_1', b_2' — adîncimea de mandrinare, în cm;

$b_{\text{lim}\,1,2}$ — adîncimea de mandrinare limită, în cm;

s_p — grosimea plăcii tubulare, în cm;

t — pasul dintre ţevile fasciculului tubular, în cm;

s şi s' — grosimea ţevii înainte şi după mandrinare ($s' < s$), în cm;

m — lăţimea minimă admisibilă a punţii dintre două ţevi alăturate, în cm;

$m' = \frac{m}{2}$ — grosimea piesei tubulare exterioare, decupate din placa tubulară, în cm;

$d_0 = 2r_0 \approx d_2'$ — diametrul locaşului din placa tubulară în care se mandrinează ţeava, în cm;

$\delta = d_0 - d_2$ — jocul iniţial dintre ţeavă şi peretele locaşului din placa tubulară, în cm;

d_2 şi d_2' — diametrul exterior al ţevii înainte şi după mandrinare ($d_2' > d_2$), în cm;

d_1 şi d_1' — diametrul interior al ţevii înainte şi după mandrinare ($d_1' > d_1$), în cm;

H — gradul de mandrinare, în % din $d_0 = d_2 + \delta$ sau în unităţi relative;

$$\beta = \frac{d_2}{d_1}; \quad \beta_t = \frac{1}{1 - \frac{s'}{r_0}}; \quad \beta_p = 1 + \frac{m'}{r_0};$$

c, c_1, c_2 — coeficienţi de siguranţă;
indice p — pentru placa tubulară;
indice t — pentru ţeavă;
indice 1 — pentru solicitarea la întindere;
indice 2 — pentru solicitarea la compresiune.

Primită la redacţie la 18 aprilie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Ю. Л. Вихман, И. Ф. Бабицкий, С. И. Вольфсон, *Расчет и конструирование нефтезаводской аппаратуры*, Гостоптехиздат, Москва, Ленинград, 1953.
2. И. Ф. Бабицкий, Ю. Л. Вихман, С. И. Вольфсон, *Расчет и конструирование аппаратуры нефтеперерабатывающих заводов*, Недра, Москва, 1965.
3. Şt. Teodorescu, *Construcţia şi calculul mecanic al aparaturii statice din instalaţiile de prelucrarea ţiţeiului şi petrochimice*, TLI, Bucureşti, 1956.
4. С. С. Берман, *Теплообменные аппараты и конденсационные устройства турбоустановок*, Машгиз, Москва, 1959.
5. А. Н. Константинов, Н. А. Самсонов, М. А. Бейцман, К. Я., Иванец, *Аппараты и оборудование нефтеперерабатывающих заводов* (Расчет и конструирование), Справочная книга, Гостоптехиздат, Москва, 1960.
6. T. Hobler *Ruch ciepla i wymienniki*, Wydanie II uzupelnione, Warszawa, 1959.
7. А. Д. Домашнев, *Конструирование и расчет химических аппаратов*, Машгиз, Москва, 1961.
8. П. А. Антикайн, М. С. Аронорич, А. М. Бакластов, *Рекуперативные теплообменные аппараты*, Госэнергоиздат, Москва, Ленинград, 1962.
9. А. Н. Лейбо, Э. Б. Хесин, Я. С. Черняк, *Справочник механика нефтеперерабатывающего завода*, Гостоптехиздат, Москва, 1963.
10. M. Renert, G. Tănase, *Calculul şi construcţia utilajului chimic*, Vol. I, Ediţia a II-a. EDP, Bucureşti, 1964.
11. Г. Л. Вихман, С. А. Круглов, *Основы конструирования аппаратов и машин нефтеперерабатывающих заводов*, Гостоптехиздат, Москва, 1962.
12. M.A. Kicighin, G.N. Kostenko, *Schimbătoare de căldură şi instalaţii de vaporizare*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
13. MIPC, NID 2550-62., *Aparatură pentru industria chimică şi petrolieră, Plăci tubulare. Prescripţii de calcul.*
14. F.L. Rubin, *Petroleum Refiner*, **40**, *6* (1961).
15. Al. Davidescu, H. Mucica, *Schimbul de căldură în instalaţiile industriale*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1964.
16. Л. П. Перцев, В.М. Долинский, *Химическое и нефтяное машиностроение*, Сентябрь, *3* (1964).
17. А. П. Мураров, *Судостроение*, **26**, *II* (1960).
18. А. Н. Антошин, „Сб". За новое советское энергооборудование, ЦКТИ, Ленинград, 1939.
19. A.D. Nadai, Trans. ASME, vol. 65, p. 865–880, 1943.
20. I.N. Goodier, Trans. ASME, vol. 65, p. 489–496, 1943.
21. G. Sachs, Journal of Applied Mechanics, vol. 14, nr. 4, 1947.
22. E.D. Grimson, Trans. ASME, vol. 65, p. 497–505, 1943.
23. A. Pavel, Construcţia de maşini, **XVIII**, *3* (1966).
24. A. Pavel, St. cerc. mec. apl., **27** şi **28**, *6* şi *1* (1968) şi (1969).
25. A. Pavel, St. cerc. mec. apl., **29**, *1* şi *2* (1970).

UNELE ERORI DE PRELUCRARE PROVOCATE DE EROAREA DE CALCUL A RAPORTULUI DE TRANSMITERE AL ROȚILOR DE SCHIMB

de E. BOTEZ, D. CATRINA
Institutul politehnic București

Reglarea unor lanțuri cinematice închise de la mașinile-unelte se realizează prin roți de schimb, care trebuie să asigure rapoarte de transmitere determinate de constantele mașinii-unelte, caracteristicile geometrice ale sculei folosite și piesei prelucrate.
În cazul pieselor cu condiții severe de precizie a traiectoriei directoare — freze melc-modul, roți dințate cu dinți înclinați etc., — acest raport de transmitere se exprimă printr-un număr cu cel puțin șase cifre zecimale, care trebuie realizat prin numere întregi — numerele de dinți ai roților de schimb.
De aici rezultă inevitabil erori între raportul de transmitere necesar și cel realizabil prin roți de schimb.
În articol sînt analizate influențele erorii de calcul a raportului de transmitere asupra preciziei elementelor geometrice ale piesei prelucrate la detalonarea frezei melc-modul și la frezarea cu freză melc-modul a roților dințate cu dinți înclinați.
Este propusă, de asemenea, o metodică de calcul a roților de schimb, bazată pe dezvoltarea raportului de transmitere în fracții continue, metodică programată pe calculatorul electronic ; aceasta asigură erori de calcul suficient de mici, care conduc la erori geometrice ale piesei prelucrate neglijabile față de toleranțele corespunzătoare admise de standardele în vigoare.

După cum este cunoscut, reglarea unor lanțuri cinematice de la mașinile-unelte se face prin roți de schimb, care trebuie să asigure anumite rapoarte de transmitere necesare realizării caracteristicilor cinematice ale mișcării reglate; precizia acestei mișcări, dată între altele și de precizia de calcul a roților de schimb, influențează în mod direct — în cazul lanțurilor cinematice generatoare închise — asupra preciziei unor parametri geometrici ai piesei prelucrate, întrucît închiderea lanțului cinematic se face prin mecanismul fictiv [1], piesa prelucrată fiind una din componentele acestuia.

Fie ecuația de reglare (fig. 1) a unui lanț cinematic închis

$$i = \frac{A}{B} = \frac{1}{i_w} \cdot \frac{i_{D_1}}{i_{D_2}} \cdot \frac{i_{11}}{i_{12} \cdot i_{22}},$$

relație în care

i_w este raportul de transmitere al mecanismului fictiv piesă-sculă;

i_{D_1}, i_{D_2} sînt rapoartele de transmitere dimensionale ale elementelor finale ale lanțului cinematic închis;

i_{11}, i_{12}, i_{22} sînt rapoartele de transmitere (adimensionale) prin roţile dinţate situate pe ramurile respective ale lanţului cinematic;

i este raportul de transmitere reglabil.

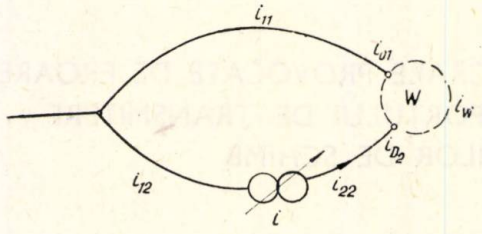


Fig. 1. Lanţ cinematic închis.

Din cele de mai sus rezultă că raportul de transmitere reglabil se poate scrie sub forma

$$i = \frac{A}{B} = f_{(x,\,y,\,z)}, \tag{1}$$

în care raportul de transmitere al roţilor de schimb este o funcţie de:

x — maşina-unealtă, prin constanta lanţului cinematic în cauză, pasul şurubului conducător etc;

y — sculă, în general prin numărul de profiluri generatoare identice de pe tăişul ei;

z — piesă, prin parametri săi geometrici, daţi de desenul de execuţie (pasul filetului, numărul de dinţi, modulul danturii, unghiul de înclinare al elicei etc.).

Pentru o situaţie concretă, numeric dată, este cunoscut că raportul de transmitere al roţilor de schimb este un număr zecimal:

$$f_{(x,\,y,\,z)} = \frac{m}{10^n}, \tag{2}$$

în care m, n sînt numere întregi; în cazul prelucrării unor piese de precizie, acest număr zecimal are şase, şapte cifre zecimale ($n \geqslant 6$), de unde şi dificultatea rezolvării ecuaţiei (1): în partea dreaptă a egalităţii apare un număr zecimal cu şase, şapte cifre zecimale, în timp ce în partea stîngă a egalităţii, apare o fracţie ordinară în numere întregi — numerele de dinţi ai roţilor de schimb.

Pentru rezolvarea acestor ecuaţii sînt cunoscute mai multe metode, reductibile la două:

— metoda tabelară, exemplificată în lucrările [2], [3];

— metoda fracţiilor reduse, expusă în lucrarea [1].

Metoda tabelară este cea mai expeditivă — în tabele se găsesc direct roţile de schimb necesare realizării unui anumit raport de transmitere — dar, după cum vom arăta, conduce în multe cazuri la soluţii care introduc erori grosolane în raportul de transmitere din cauză că din tabele sîntem

nevoiți să alegem raportul de transmitere cel mai apropiat de cel dorit; aceasta va avea ca efect obținerea de erori inadmisibil de mari pentru unii parametri geometrici ai piesei prelucrate, atunci cînd aceasta reclamă pretenții deosebite de precizie (freze melc-modul, roți dințate cu dinți înclinați etc.).

În privința tabelelor de rapoarte de transmitere sînt de observat două tendințe:

— tabele pentru o pereche de roți de schimb;

— tabele pentru două perechi de roți de schimb.

Astfel, în lucrarea [3] se dau, cu opt cifre zecimale, toate rapoartele de transmitere realizabile cu o pereche de roți de schimb, de forma

$$i = \frac{A}{B} \leqslant 1,$$

în care A și B iau toate valorile posibile de la 1 la 200; în total, circa 12 000 rapoarte de transmitere distincte, subunitare.

În lucrarea [2] se dau, cu șase cifre zecimale, circa 40 000 rapoarte de transmitere prin două perechi de roți de schimb de forma

$$i = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \leqslant 1.$$

Or este evident că:

— numărul rapoartelor de transmitere realizabile printr-o pereche de roți de schimb este relativ mic (din cele 200 × 200 posibile, jumătate sînt subunitare, adică 20 000, dintre care multe sînt egale, atunci cînd numerele A, B au un divizor comun); din această cauză, distanța dintre două rapoarte de transmitere consecutive este mare;

— numărul rapoartelor de transmitere realizabile prin două perechi de roți de schimb este foarte mare (și anume pătratul numărului de rapoarte de transmitere realizabile printr-o pereche de roți de schimb, deci circa 144 000 000 subunitare), ceea ce face imposibilă cuprinderea lor în tabele complete.

De aici rezultă limitele lucrării [2], eroarea extrem de mică ce poate fi realizată cu două perechi de roți de schimb și necesitatea unor metode care, în lipsa tabelelor, să ofere numerele de dinți ale roților de schimb care să realizeze rapoarte de transmitere cu eroare admisă pentru situația dată.

Metoda fracțiilor reduse poate asigura rapoarte de transmitere cu o precizie prealabil stabilită, ceea ce va conduce la o precizie deosebită a traiectoriei directoare pe piesa prelucrată, parametri geometrici care determină această traiectorie avînd erori cu mult sub cele admise de standardele de precizie corespunzătoare; în schimb, atunci cînd raportul de transmitere are multe cifre zecimale, numărul fracțiilor reduse crește, calculul devenind foarte laborios.

Ca urmare, ne-am propus, ca plecînd de la metoda fracțiilor reduse, să găsim o modalitate ca aceste calcule să fie efectuate pe calculatorul electronic, modalitate pe care o vom prezenta în cele ce urmează.

★

Din cele de mai sus a rezultat că în rare cazuri putem determina numere întregi A, B, care să fie numere de dinți și care să satisfacă egalitatea (1); de cele mai multe ori ele aproximează valoarea funcției $f_{(x,\,y,\,z)}$ din membrul drept al acestei egalități, cu alte cuvinte, raportul de transmitere al roților de schimb va avea o eroare Δi față de valoarea dorită.

În cele ce urmează ne propunem să determinăm erorile parametrilor geometrici ai piesei, provocate de eroarea raportului de transmitere al roților de schimb.

Funcția f fiind întotdeauna inversabilă (de cele mai multe ori ea este un produs), din ecuația (1) se poate determina expresia parametrilor geometrici ai piesei, ca funcție de raportul de transmitere reglabil i, de parametri cinematici x ai mașinii, de parametrii geometrici y ai sculei,

$$z = \varphi_{(i,\,x,\,y)} \tag{3}$$

Diferențiind relația (3), obținem:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial \varphi}{\partial i}\,\mathrm{d}i + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{4}$$

sau, trecînd de la infiniți mici la diferențe finite,

$$\Delta z = \frac{\partial \varphi}{\partial i}\cdot\Delta i + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\Delta y, \tag{5}$$

din care rezultă că erorile parametrilor geometrici ai piesei depind de eroarea Δi a raportului de transmitere al roților de schimb, de erorile Δx ale acelor parametri ai lanțului cinematic al mașinii care intervin în relația (1), ca și de erorile Δy ale acelor parametri ai sculei, care participă la ecuația (1).

Expresia (5) mai poate fi scrisă sub forma

$$\Delta z = \Delta z_i + \Delta z_x + \Delta z_y, \tag{6}$$

în care

$$\Delta z_i = \frac{\partial \varphi}{\partial i}\cdot\Delta i,$$

$$\Delta z_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\Delta x,$$

$$\Delta z_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\Delta y$$

sînt componentele erorilor la piesă provocate de erorile raportului de transmitere al roților de schimb, de erorile lanțului cinematic și, respectiv, de erorile sculei.

În prezentul articol ne concentrăm atenţia asupra primei componente :

$$\Delta z_i = \frac{\partial \varphi}{\partial i} \cdot \Delta i, \tag{7}$$

din care rezultă că erorile parametrilor geometrici ai piesei sînt proporţionale cu eroarea Δi a raportului de transmitere al roţilor de schimb.

Să exemplificăm pentru :

a) *detalonarea frezei melc-modul* pe strungul de detalonat, a cărui schemă structurală este redată în figura 2. Pentru cele două lanţuri cinematice închise (de filetare, de detalonare) roţile de schimb se determină cu relaţiile :

$$i_F = \frac{A_F}{B_F} = C_F \cdot \frac{p_D}{p_s}, \tag{8}$$

$$i'_D = \frac{A'_D}{B'_D} = C'_D \cdot \frac{z_p}{z_k}, \tag{9}$$

$$i''_D = \frac{A''_D}{B''_D} = C''_D \cdot \frac{z_p}{z_k \cdot p_c}, \tag{10}$$

în care C_F, C'_D, C''_D (constantele lanţurilor cinematice), p_s (pasul şurubului conducător) şi z_k (numărul de profile identice înfăşurate pe cama de detalonare) sînt parametri dependenţi de maşina-unealtă ; p_D (pasul axial al danturii), z_p (numărul de canale de evacuare a aşchiilor) şi p_c (pasul acestor canale) sînt parametri geometrici ai piesei prelucrate.

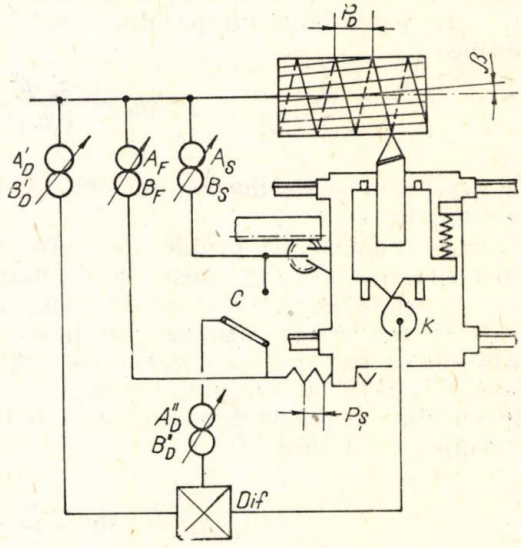


Fig. 2. Schema structurală a strungului de detalonat.

Din ecuațiile (8), (9), (10), rezultă parametri geometrici ai piesei prelucrate :

$$p_D = i_F \cdot p_s \cdot \frac{1}{C_F}, \tag{11}$$

$$p_c = \frac{C_D'' \cdot z_p}{z_k \cdot i_D''} \tag{12}$$

(relația 9 nu introduce erori, căci și în partea dreaptă a egalității apar numere întregi ; în plus, z_p are standardizate numai valorile 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, ceea ce ușurează calculele) și deci, eroarea de pas al danturii Δp_D, respectiv eroarea de pas al elicei canalelor de evacuare Δp_c, provocate de eroarea Δi a raportului de transmitere, sînt date de

$$\Delta p_D = \frac{p_s}{C_F} \cdot \Delta i, \tag{13}$$

$$\Delta p_c = \frac{C_D'' \cdot z_p}{z_k \cdot i_D''^2} \cdot \Delta i. \tag{14}$$

Iată deci o concluzie interesantă : eroarea de pas al danturii Δp_D nu depinde de parametrii piesei prelucrate, ci numai de lanțul cinematic de filetare ; ea este cu atît mai mică, cu cît pasul șurubului conducător p_s este mai mic, iar constanta de filetare mai mare.

În privința erorii pasului canalelor elicoidale, din (10) și (14) se obține

$$\Delta p_c = \frac{z_k \cdot p_c^2}{C_D'' \cdot z_p} \cdot \Delta i, \tag{15}$$

ea depinzînd și de mașina-unealtă, și de piesa prelucrată, și anume, se micșorează dacă :

— numărul de profile ale camei de detalonare este mic ($z_k = 1$), iar constanta lanțului cinematic C_D'' mare ;

— pasul elicei canalelor este mic, iar numărul de dinți ai piesei mare.

În numeroase situații, din tabele se poate constata [2] că două rapoarte de transmitere consecutive diferă prin cîteva unități zecimale de rangul 4, după cum există și situații în care (tab. 1) aceste diferențe sînt de o unitate zecimală de rangul 3($\Delta i = 10^{-3}$), ceea ce face ca erorile corespunzătoare pe piesă să fie :

$$\Delta p_D = 10^{-3} \cdot \frac{p_s}{C_F}, \text{ [mm]},$$

$$\Delta p_c = 10^{-3} \frac{C_D'' \cdot z_p}{z_k \cdot i_D''^2}, \text{ [mm]}.$$

Tabelul nr. 1

Raport i din tabel			Raport intermediar		
Raport i	Roți de schimb	Eroare Δi	Raport i	Roți de schimb	Eroare Δi
0,065104	$\frac{25}{80}\cdot\frac{25}{120}$	1×10^{-3}	0,065660	$\frac{25}{127}\cdot\frac{20}{60}$	3×10^{-6}
0,066116	$\frac{20}{110}\cdot\frac{40}{110}$				
0,077639	$\frac{25}{70}\cdot\frac{25}{115}$	1×10^{-3}	0,078260	$\frac{20}{100}\cdot\frac{18}{46}$	1×10^{-6}
0,078740	$\frac{30}{120}\cdot\frac{40}{127}$				
0,053030	$\frac{20}{120}\cdot\frac{35}{110}$	4×10^{-4}	0,053214	$\frac{101}{13}\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{20}{104}$	1×10^{-7}
0,053475	$\frac{20}{85}\cdot\frac{25}{110}$				
0,070304	$\frac{25}{70}\cdot\frac{25}{127}$	7×10^{-4}	0,070804	$\frac{24}{64}\cdot\frac{24}{88}\cdot\frac{27}{39}$	1×10^{-7}
0,071023	$\frac{25}{80}\cdot\frac{25}{110}$				

Notă: roțile de schimb pentru rapoartele intermediare calculate cu metoda fracțiilor reduse

Pentru strungul de detalonat 1 A81 /1/ la care

$$C_F = \left\{\frac{1}{1};\ \frac{4}{1};\ \frac{16}{1}\right\},$$

$$p_s = \frac{25{,}4}{2},\ [\text{mm}],$$

$$z_k = 1,$$

$$C''_D = 6,$$

se obțin erorile :

$$\Delta p_D = \begin{cases} 12{,}7\ [\mu m] \text{ cînd } C_F = \dfrac{1}{1}, \\ 3{,}2\ [\mu m] \text{ cînd } C_F = \dfrac{4}{1}, \\ 0{,}8\ [\mu m] \text{ cînd } C_F = \dfrac{16}{1}, \end{cases}$$

prima din ele nefiind admisibilă pentru unele module și clase de precizie (tab. 2); și, respectiv,

$$\Delta p_c = \frac{p_c^2}{6 z_p} \cdot 10^{-3},\ [mm],$$

Tabelul nr. 2

Abaterea admisibilă a pasului elicei dintelui [μm] (extras din STAS 3092-67)

Clasa de precizie	Modulul, mm						
	sub 1,5	1,5 – 2,5	2,5–4	4–6	6–10	10–16	16–20
AA	± 5	± 5	± 6	± 8	±10	–	–
A	± 8	± 8	±10	±12	±16	±20	±25
B	±12	±12	±16	±20	±25	±32	±40
C	±20	±20	±25	±32	±40	±50	±63

sau, eroarea relativă:

$$\frac{\Delta p_c}{p_c} = \frac{p_c}{60 z_p}\ \%:$$

Pentru o freză melc-modul avînd

$$p_c = 10\,000 \text{ mm},$$

$$z_p = 16 \text{ dinți},$$

se obține o eroare relativă :

$$\frac{\Delta p_c}{p_c} = \frac{10\,000}{60 \times 16} = 10\,\% \text{ (minim)},$$

iar pentru o freză melc-modul cu

$$p_c = 20\,000 \text{ mm},$$

$$z_p = 9 \text{ dinți},$$

se obține

$$\frac{\Delta p_c}{p_c} = \frac{20\,000}{60 \times 9} = 37\,\% \text{ (maxim)},$$

ceea ce depășește prevederile STAS 3092-67 (tab. 3) pentru module sub 6 mm, chiar și pentru clsa *C* de precizie.

Tabelul nr. 3

Abaterea admisibilă a pasului canalelor de evacuare, în procente (STAS 3092-67)

Clasa de precizie	Modulul, mm			
	sub 2,5	2,5–6	6–16	16–20
AA	±2	±1,6	±1,25	–
A	±3	±2,5	±2	±1,6
B	±5	±4	±3	±2,5
C	Nu se reglementează			

b) *frezarea roților dințate cilindrice cu dinți înclinați*, pe mașina de frezat cu freză melc-modul, a cărei schemă structurală este prezentată în figura 3.

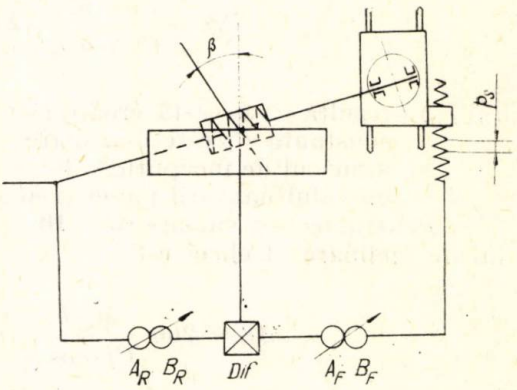


Fig. 3. Schema structurală a mașinii de frezat roți dințate cu freză melc-modul.

Cele două lanțuri cinematice închise (de rulare și de filetare) se reglează cu roți de schimb care se determină cu relațiile :

$$i_R = \frac{A_R}{B_R} = C_R \cdot \frac{k_s}{z_p}, \tag{16}$$

$$i_F = \frac{A_F}{B_F} = C_F \cdot \frac{\sin \beta}{m_n \cdot k_s}, \tag{17}$$

în care mașina-unealtă intervine prin C_R, C_F (constantele celor două lanțuri cinematice), scula prin k_s (numărul de începuturi ale frezei melc-modul) și piesa prin z_p (numărul de dinți), m_n (modulul normal) și β (unghiul de înclinare al elicei dinților).

Dacă rezolvarea primei ecuații nu ridică probleme (în membrul drept apar numere întregi), în schimb cea de-a doua introduce erori. Din (17) se deduce

$$\sin \beta = \frac{m_n \cdot k_s \cdot i_F}{C_F} \tag{18}$$

și deci

$$\beta = \operatorname{arc\,sin} \frac{m_n \cdot k_s \cdot i_F}{C_F}, \tag{19}$$

de unde se obține eroarea unghiului de înclinare provocată de eroarea raportului de transmitere:

$$\Delta\beta = \frac{\frac{m_n \cdot k_s}{C_F}}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_n \cdot k_s \cdot i_F}{C_F}\right)^2}} \cdot \Delta i \tag{20}$$

sau, avînd în vedere relația (17),

$$\Delta\beta = \frac{m_n \cdot k_s}{C_F \cdot \cos \beta} \cdot \Delta i \text{ [radiani]}, \tag{21}$$

din care rezultă că această eroare este cu atît mai mică, cu cît

— constanta C_F este mai mare;

— numărul de începuturi ale sculei k_s mai mic ($k_s = 1$);

— modulul danturii piesei și unghiul ei de înclinare sînt mai mici.

Pentru aceeași valoare $\Delta i = 10^{-3}$, în secunde de arc, eroarea unghiului de înclinare al elicei este

$$\Delta\beta = 206 \frac{m_n \cdot k_s}{C_F \cdot \cos \beta} \text{ [secunde de arc]}.$$

Astfel, de exemplu, pentru mașina de frezat FD-320 (Cugir), la care $C_F = 6$, se obține relația

$$\Delta\beta = 34{,}3 \cdot \frac{m_n \cdot k_s}{\cos \beta}.$$

Pentru o freză melc-modul cu un început ($k_s = 1$) se obține relația

$$\Delta\beta = 34{,}3 \frac{m_n}{\cos \beta} \text{ [secunde de arc]}.$$

Pentru o piesă avînd

$$m_n = 6,$$

$$\beta = 30°,$$

se obţine o eroare a unghiului de înclinare al elicei :

$$\Delta\beta = 34{,}3 \times \frac{6}{\cos 30°} = 285 \text{ [secunde de arc]}.$$

Ca să putem aprecia această eroare, să observăm că ea provoacă o eroare a direcţiei dintelui pe cercul de bază :

$$\Delta d_b[\text{mm}] = L[\text{mm}] \cdot \Delta\beta \text{ [radiani]}$$

sau

$$\Delta d_b[\mu\text{m}] = 1000 \cdot L \text{ [mm]} \cdot \Delta\beta \text{ [secunde de arc]} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{3\,600},$$

în care L este lăţimea roţii.

Pentru acelaşi exemplu numeric, se obţine o eroare a direcţiei dintelui :

$$\Delta d_b = 60 \times 285 \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1\,000}{3\,600} = 55 \text{ [}\mu\text{m]},$$

care este mare, conform STAS 6273-60, chiar şi pentru roţile dinţate din clasa 11 de precizie (tab. 4).

Tabelul nr. 4

Eroarea admisibilă a direcţiei dintelui, pentru clasa 11 de precizie (STAS 6273-60) [μm]

Lăţime roată	sub 55	55—110	110—160	160—220	220—230
Eroare admisă	42	48	52	58	70

În concluzie, din cele de mai sus, rezultă că tabelele de rapoarte de transmitere, deşi utile în numeroase cazuri, sînt inutilizabile atunci cînd rapoartele de transmitere impun erori deosebit de mici, cerute de condiţiile prelucrării roţilor dinţate de precizie.

★

Metoda fracţiilor reduse permite utilizarea uneia din numeroasele fracţii reduse ale unui număr zecimal dat, sau a uneia din şi mai numeroase fracţii conjugate, ceea ce conduce la obţinerea unei precizii de calcul a raportului de transmitere mult mai ridicate.

Să exemplificăm pentru raportul de transmitere

$$i = 0{,}131560 = \frac{13\,156}{10^5},$$

care, în tabele [2] este situat între rapoartele

$$i_k = 0{,}131500,$$

$$i_{k+1} = 0{,}131626.$$

Determinînd cîturile parţiale (tab. 5) şi apoi fracţiile reduse (tab. 6), se observă că la utilizarea redusei,

$$i_7 = \frac{183}{1\,391} = \frac{3 \times 61}{13 \times 107} = \frac{61}{21} \cdot \frac{21}{107},$$

se obţine o eroare a raportului de transmitere:

$$\Delta i_7 = \frac{D_7}{B_7} \cdot \frac{1}{B_8} = \frac{1}{1\,391} \cdot \frac{1}{25\,000} = 3 \times 10^{-8},$$

Tabelul nr. 5

Cîturile parţiale ale raportului de transmitere i = 0,131560

Numărător	Numitor	Cît
25 000	3 289	7
3 289	1 977	1
1 977	1 312	1
1 312	665	1
665	647	1
647	18	35
18	17	1
17	1	17
	0	Stop

Tabelul nr. 6

Fracţiile reduse ale raportului de transmitere i = 0,131560

		7	1	1	1	1	25	1	17	C_K
1	0	1	1	2	3	5	178	183	3 289	A_K
0	1	7	8	15	23	38	1 353	1 391	25 000	B_K
						18	−17	1	0	D_K

față de eroarea care s-ar obține din tabele utilizînd raportul de transmitere cel mai apropiat :

$$\Delta i_t = 0{,}131560 - 0{,}131500 = 6 \times 10^{-5}.$$

Precizia obținută pentru raportul de transmitere este, credem, concludentă în privința performanțelor metodei fracțiilor reduse, precizie care se va răsfrînge proporțional, în precizia elementelor geometrice corespunzătoare ale piesei prelucrate.

Dificultatea metodei constă, după cum am mai spus, în aceea că atunci cînd raportul de transmitere se exprimă cu multe zecimale, calculul devine lung și obositor.

Din această cauză, metoda fracțiilor reduse s-a programat pe un calculator electronic, folosind organigrama din figura 4.

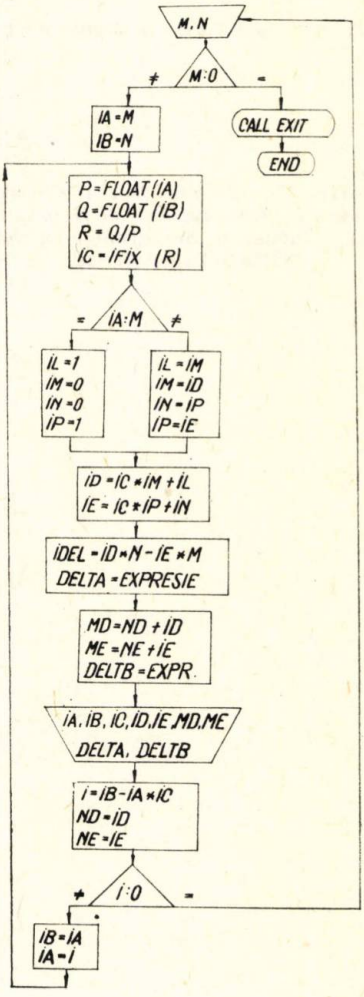


Fig. 4. Organigrama de calcul : *M,N* – numărătorul, respectiv numitorul raportului de transmitere dat: *IL, IM, IN, IP*, – numărătorii și numitorii reduselor de rang $(K-2)$, respectiv $(K-1)$; *ID, IE* – numărătorul, respectiv numitorul redusei de rang K; *MD, ME* – numărătorul, respectiv numitorul fracției conjugate. *DELTA, DELTB* – erorile fracției reduse, respectiv ale fracției conjugate.

Rămîne de rezolvat o singură chestiune : eroarea admisă a raportului de transmitere.

Aceasta se poate deduce din relaţia (7) :

$$i = \frac{\Delta z_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial i}}, \tag{22}$$

din care rezultă că dacă se cunosc toleranţele standardizate ale elementelor geometrice corespunzătoare şi se impune ca din cîmpul de toleranţă, o porţiune (funcţie şi de alte surse de erori) să fie rezervată erorii Δz_i provocate de eroarea de calcul a raportului de transmitere, se poate determina eroarea admisibilă a raportului de transmitere, cu ajutorul căreia se vor selecta fracţiile reduse şi conjugate convenabile.

Primită la redacţie la 5 mai 1973

BIBLIOGRAFIE

1. E. Botez, *Maşini-unelte*, Vol. I. *Cinematica*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1969.
2. V. Klepal, 40 000 *rapoarte de transmitere*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.
3. Hütte, Hilfstafeln zur Ermittlung von Räderübersetzungen, 8 Aufl, Berlin—München, Wilhelm Ernst Verlag.

CONTRIBUȚII PRIVIND DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A FORȚELOR DE AȘCHIERE LA STRUNJIRE

de ȘTEFĂNUȚĂ ENACHE, EUGEN STRĂJESCU, SEBASTIAN STĂNESCU
Institutul politehnic București

Se prezintă construcția unui dinamometru pentru măsurarea forțelor de așchiere la strunjire pe trei direcții principale. Dinamometrul proiectat și verificat de autori înlătură o serie de dezavantaje existente la alte construcții de dinamometre, avînd în același timp o precizie de măsurare ridicată. Se prezintă totodată calculele privind construcția mecanică și partea electrică. Probele efectuate pentru determinarea forțelor la strunjirea oțelului marca OL50 au dat valori foarte apropiate de cele existente în literatura de specialitate, fapt ce dovedește justețea principiilor ce au stat la baza proiectării dinamometrului.

Este îndeobște cunoscut faptul că, determinarea forțelor care apar în procesul de așchiere prezintă o importanță deosebită deoarece aceasta este necesară pentru : calculul solicitărilor diferitelor organe ale mașinii, a sculei și a piesei de prelucrat ; calculul puterii necesare a electromotorului ; stabilirea temperaturii de așchiere și, respectiv, a uzurii sculei așchietoare.

În lumina celor arătate trebuie menționat că dezvoltarea impetuoasă a construcției de mașini-unelte și scule în țara noastră impune necesitatea perfecționării metodelor și mijloacelor de determinare a forțelor de așchiere, fapt care va permite proiectarea judicioasă a mașinilor-unelte, a sculelor așchietoare, precum și a proceselor tehnologice. Totodată, forța medie de așchiere poate fi considerată o constantă pentru un anumit caz și prezintă importanță în calculele tehnologice, în timp ce pentru proiectarea mașinilor-unelte și a sculelor este necesară cunoașterea valorii maxime a forțelor de așchiere, fapt care poate fi realizat prin determinări directe cu ajutorul dinamometrelor. Formulele date în literatura de specialitate [1], [2] pentru calculul forțelor dau numai valoarea medie a acestora, astfel încît ele nu pot fi utilizate în mod rațional la proiectarea mașinilor-unelte și a sculelor așchietoare.

Totodată, datorită forțelor, în timpul așchierii apar o serie de vibrații a căror cunoaștere este necesară în alegerea soluției constructive pentru mașina-unealtă și scula așchietoare, mai ales la sculele armate cu plăcuțe din carburi metalice.

În literatura de specialitate [1], [5], [6], [7] se prezintă o serie de construcții de dinamometre pentru cele mai variate tipuri de mașini-unelte, dinamometre capabile să dea indicații asupra forței medii sau asu-

pra variației forțelor în timpul așchierii. Dintre acestea, probleme deosebite pun cele pentru strunjire, la care influențarea reciprocă pe cele trei direcții se manifestă în mod pregnant.

O problemă insuficient tratată este problema rigidității acestor dinamometre, precum și măsurarea dinamică cu ajutorul lor.

În lucrarea de față, autorii își propun să prezinte construcția unui dinamometru pentru măsurarea componentelor forțelor pe trei direcții la strunjire, conceput în așa fel încît să elimine în mare parte aspectele negative arătate mai înainte.

Construcția aparatului a fost stabilită astfel încît să asigure următoarele : eliminarea la maximum a interacțiunilor dintre cele trei componente ale forței de așchiere ; asigurarea unui domeniu cît mai mare de forțe de așchiere, acoperind necesitățile uzuale ; asigurarea unei rigidități corespunzătoare a suportului, eliminînd astfel aproape total influențele acesteia asupra preciziei de măsurare ; realizarea unei construcții simple și ușor de exploatat.

Aparatura se compune din următoarele trei subansamble principale : corpul dinamometric cu elementele elastice ; traductorii, (elemente sesizoare și transformatoare a deformațiilor în variații de tensiune) ; puntea tensometrică.

În figura 1, se prezintă o secțiune transversală prin corpul dinamometric. Corpul cuțitului *1* este fixat într-un port-cuțit *2* și strîns cu ajutorul a două șuruburi *3*, realizînd o fixare rigidă. Sub acțiunea forțelor de așchiere, cuțitul se deplasează și deformează elementele elastice *4*. Astfel de elemente elastice sînt în număr de trei, fiind plasate pe direc-

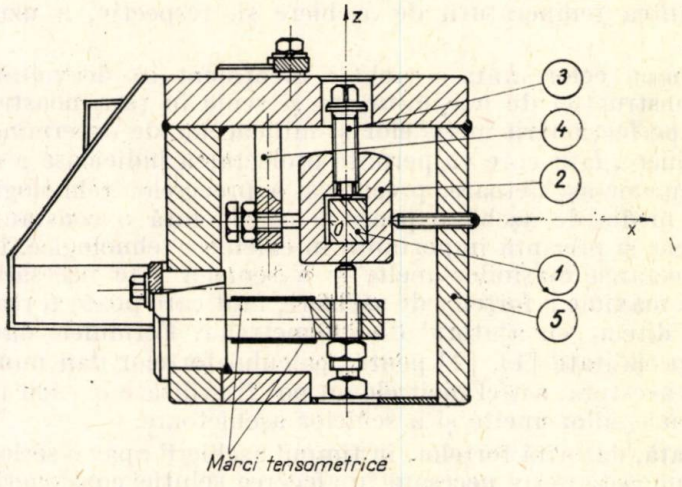


Fig. 1

țiile *Ox*, *Oy*, *Oz*, adică pe direcțiile de lucru ale mașinii-unelte, și sînt fixate rigid în corpul dinamometric. Prin proiectare, rigiditatea port-cuțitului și a corpului dinamometrului este suficient de mare pentru ca deformația elementelor elastice să poată fi considerată ca fiind produsă în întregime de forța de așchiere pe direcția respectivă. Menținerea port-cu-

țitului în poziția inițială a fost făcută cu ajutorul unei membrane circulare de oțel 1 (fig. 2), cu rol de sprijin în partea din spate a port-cuțitului 2. Membrana are rigiditate mare în planul său (respectiv în plan vertical), și rigiditate mică pe direcție axială.

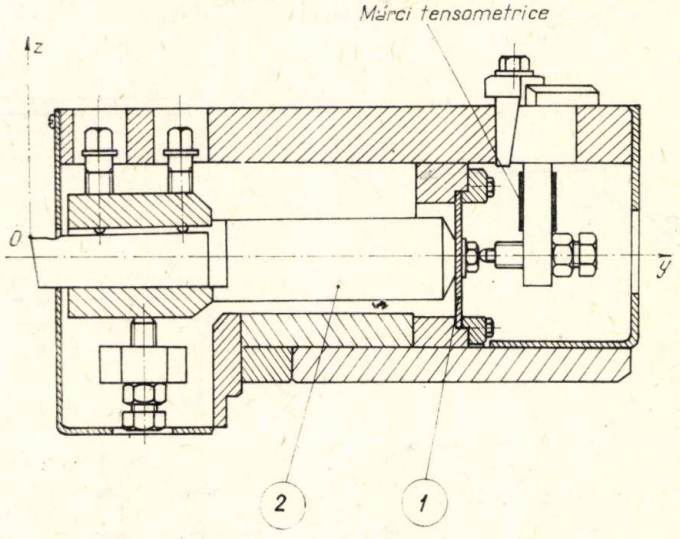


Fig. 2

Trebuie menționat însă că un procent de 10 % din forța aplicată pe această direcție, Oy, rămîne pentru deformarea elastică a membranei.

În timp ce pe direcția Oy, forța P_y se transmite în întregime elementului elastic, pe direcțiile Ox și Oz s-a asigurat o amplificare a deformației cu coeficientul $K = \frac{m}{n} = 1{,}38$. Elementele elastice au fost dimensionate pentru valoarea maximă a forțelor de așchiere de 800 dN, valorile pînă la care deformațiile sînt elastice.

Traductorii folosiți sînt mărci tensometrice legate în punte completă (Wheatstone) conform figurii 3, în scopul de a mări sensibilitatea aparatului.

Mărcile tensometrice au fost lipite pe elementele elastice în așa fel încît două să fie solicitate la tracțiune, iar celelalte două la compresiune, ca în figura 4.

În cele ce urmează se vor prezenta unele calcule privind justificarea schemei de legare a mărcilor [3]. Pe baza figurii 3 rezultă că tensiunea la ieșirea din punte va fi dată de relația:

$$U_0 = \frac{ER_4}{R_3 + R_4} - \frac{ER_1}{R_1 + R_2} = \frac{E(R_1R_3 - R_2R_4)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} =$$

$$= \frac{E(R_2R_4 - R_1R_3)}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}. \qquad (1)$$

Din această relație se constată că prin deformarea elastică a elementelor dinamometrului variază rezistența mărcilor tensometrice, iar tensiunea la ieșire a punții variază cu valoarea :

$$dU_0 = \frac{\partial U_0}{R_4} dR_4 + \frac{\partial U_0}{R_1} dR_1 + \frac{\partial U_0}{R_2} dR_2 + \frac{\partial U_0}{K_3} dR_3. \qquad (2)$$

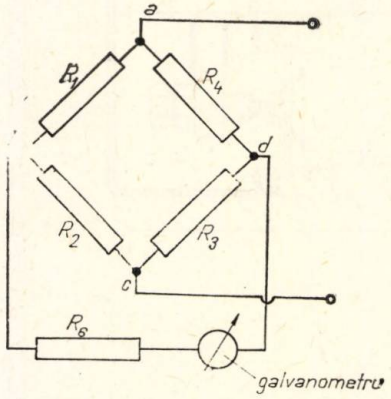


Fig. 3

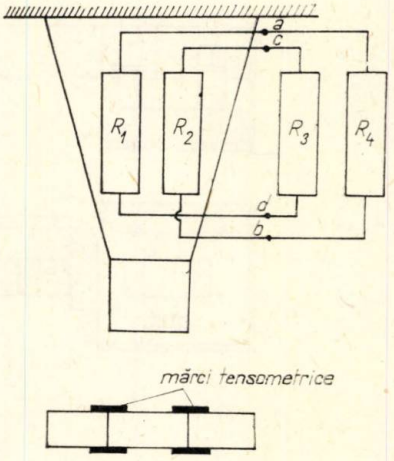


Fig. 4

Trecînd la creșteri finite, și ținînd cont că puntea este inițial echilibrată ($R_1R_3 = R_2R_4$) și de asemenea, neglijînd coeficientul de neliniaritate (foarte aproape ca valoare de 1), se obține, în final:

$$U_0 = \frac{2E}{R} \Delta R. \qquad (3)$$

Din relația 3 se constată că sensibilitatea este de patru ori mai mare decît în cazul folosirii unei singure mărci active, caz în care variația de tensiune la borne este

$$U_0 = \frac{E}{2R} \Delta R. \qquad (4)$$

Un alt avantaj al acestui mod de a lega mărcile este că se realizează în același timp și compensarea de temperatură.

Caracteristicile mărcilor (Philips) folosite sînt următoarele : $K = 1{,}92 \pm 1{,}5\%$; $R = 296 \pm 0{,}5\%$; $I_{max} = 25$ A ; $T_{max} = 70°C$.

Variația de tensiune obținută a fost comparată cu tensiunea dată de o punte etalon conectată în serie cu puntea de măsură, ca în figura 5:

Alimentarea punții se face cu curent continuu, prezentînd avantajul unei echilibrări ușoare și posibilitatea măsurărilor dinamice folosind amplificatori de curent alternativ obișnuiți.

Dinamometrul este folosit pentru măsurările dinamice specifice proceselor de așchiere, semnalul obținut la ieșirea din amplificator aplicîndu-se la bornele unui osciloscop. Folosind un dispozitiv de filmare cu viteză constantă după ecranul osciloscopului, a cărui bază de timp este deconec-

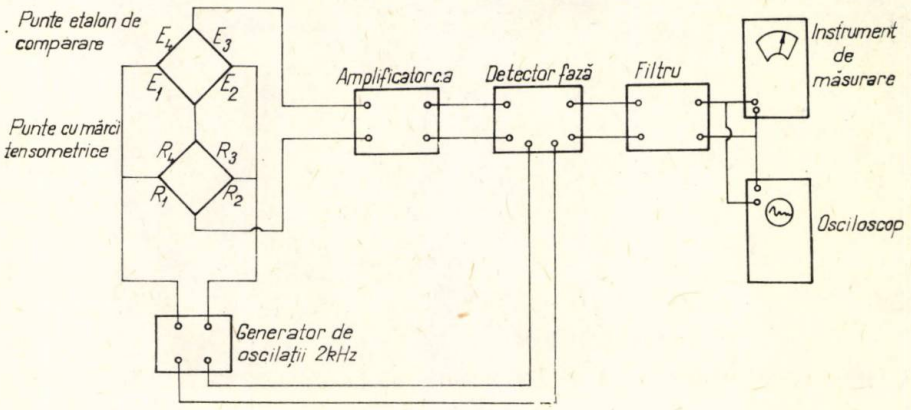


Fig. 5

tată, se pot trage o seamă de concluzii asupra amplitudinii oscilațiilor forțelor de așchiere, cît și asupra frecvenței acestora.

În încheierea prezentării părții electrice a dinamometrului, se va menționa că domeniul de măsurare a forțelor de așchiere a fost astfel stabilit, încît mărcile să nu fie solicitate la oboseală, adică, [3] $\varepsilon_{max} = 5.10^3$.

Etalonarea aparatului s-a făcut cu puntea tensometrică tip ORION RZ—007. Etalonarea s-a făcut în două moduri : primul a constat în încărcarea dinamometrului de așchiere cu ajutorul unei mașini universale de încercare a materialelor la tracțiune și compresiune (fig. 6). S-au construit dispozitive de prindere adecvate, astfel încît s-au putut etalona corespunzător deformațiile pe direcțiile Ox, Oy, și Oz.

Al doilea mod de etalonare a avut drept scop o verificare riguroasă. Aceasta s-a făcut direct pe strung, cu ajutorul unui dinamometru etalon de tip inel, de producție sovietică, tip DS-2 (fig. 7).

Curbele de etalonare sînt prezentate în diagramele din figurile 8, 9 și 10. După un număr mai mare de verificări, s-a calculat că eroarea dată de împrăștierea rezultatelor este de 1,6 %.

În urma operațiunilor de etalonare, s-a constatat că influențele reciproce între cele trei direcții de măsurare sînt de ordinul a doi la sută din forța aplicată.

Pentru forța P_z, aplicată asupra direcției Oy, forța Py își schimbă valoarea cu maximum 5 %, ceea ce practic este neglijabil, reprezentînd un procent mic față de realizările prezentate în literatura de specialitate [5], [7].

Asupra dinamometrului construit s-a efectuat un studiu privind comportarea sa dinamică. Cu ajutorul unui montaj format din dinamometru, puntea tensometrică și un oscilograf cu bucle de producție sovietică, s-a putut înregistra forma semnalului la ieșire pentru o lovitură

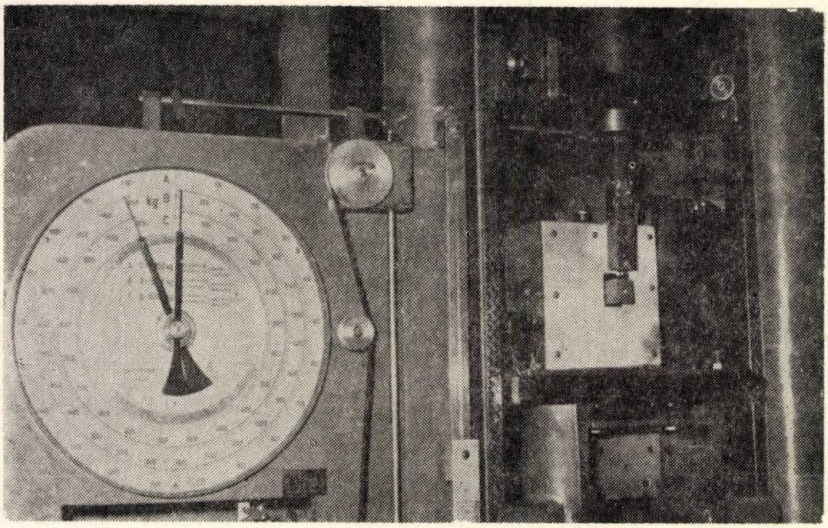


Fig. 6

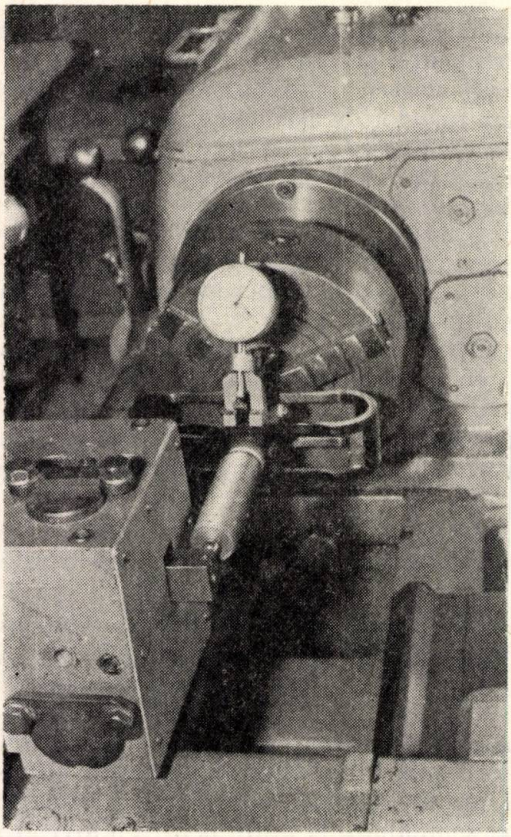


Fig. 7

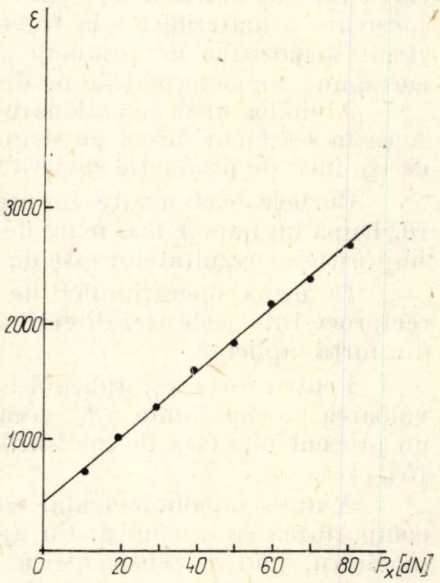


Fig. 8

aplicată pe fiecare direcție de măsurare a aparatului. Înterpretînd rezultatele, s-a calculat frecvența proprie care este de ordinul 1000—1200 Hz., cu mult mai mare decît frecvența obișnuită a operațiunilor de strunjire (de ordinul 100—300 Hz.)

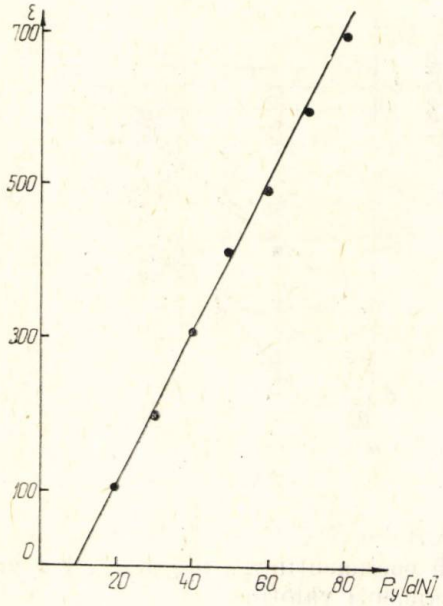


Fig. 9

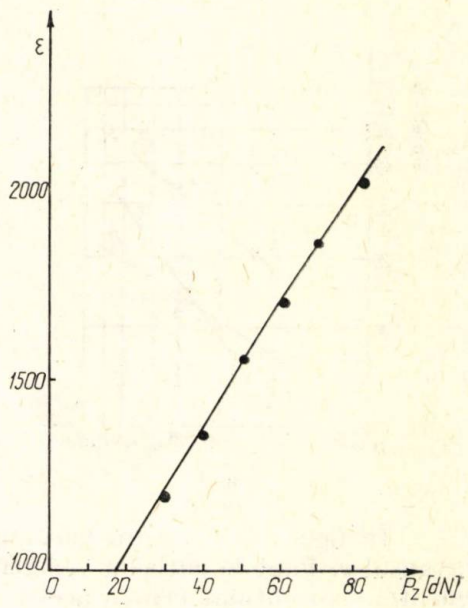


Fig. 10

O altă concluzie importantă rezultată din experiență constă în aceea că rigiditatea este foarte bună, amortizarea fiind mare.

Pentru verificarea practică a construcției aparatului din punctul de vedere al preciziei de măsurare, al sensibilității și al constanței în privința reproducerii rezultatelor s-au efectuat o serie de cercetări experimentale și anume:

S-au determinat pe rînd funcțiile $P_x = f_1(s)$; $P_x = f_2(t)$; $P_y = f_3(s)$; $P_y = f_4(t)$; $P_z = f_5(s)$; $P_z = f_6(t)$, stabilindu-se pe baza graficelor experimentale valorile exponenților x_p, y_p și a coeficientului C_p, după care s-au comparat aceste valori cu cele rezultate din calculul teoretic al forțelor cu ajutorul formulelor din literatură [2].

$$P_x = C_{px} \cdot t^{x_{px}} \cdot s^{y_{px}}, \tag{5}$$

$$P_y = C_{py} \cdot t^{x_{py}} \cdot s^{y_{py}}, \tag{6}$$

$$P_z = C_{pz} \cdot t^{x_{pz}} \cdot s^{y_{pz}}. \tag{7}$$

O serie de încercări ne-au permis să găsim pentru coeficienții C_{px}, C_{py} și C_{pz} valori apropiate de cele date în literatura de specialitate și anume

$$C_{px} = 108, \qquad C_{py} = 199, \qquad C_{pz} = 216.$$

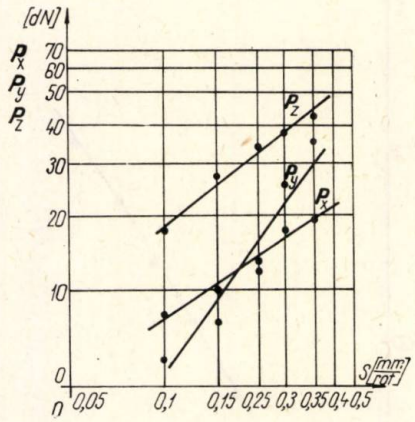


Fig. 11

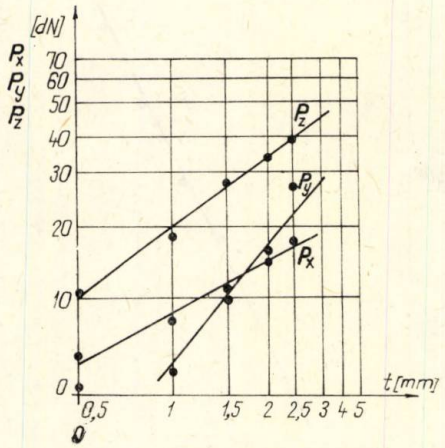


Fig. 12

În figura 11 se arată variația forțelor P_x, P_y și P_z în funcție de avansul s. Pantele curbelor reprezintă coeficienții y_{px}, y_{py} și y_{pz}. Experimental s-au obținut pentru acești coeficienți valorile:

$$y_{px} = 0{,}78, \qquad y_{py} = 0{,}98, \qquad y_{pz} = 0{,}92,$$

de asemenea, apropiate de cele din literatură [2], pentru materialul supus prelucrării. Variația forțelor P_x, P_y și P_z în funcție de adîncimea de așchiere este reprezentată în figura 12. Valorile experimentale obținute în acest caz pentru coeficienții x_{px}, x_{py} și x_{pz} sînt următoarele:

$$x_{px} = 0{,}7, \qquad x_{py} = 0{,}9, \qquad x_{pz} = 0{,}9,$$

de asemenea, apropiate de cele din literatura de specialitate [2].

Încercările s-au efectuat pe un strung SN 400 cu un cuțit armat cu plăcuță din carbură metalică (tip 21000055 P3C) avînd următoarele caracteristici (parametri geometrici): $\gamma = 0°$; $\alpha = \alpha_1 = 10°$; $\varkappa = \varkappa_1 = 45°$; $\lambda = 0°$; $r = 0$ mm. Așchierea s-a efectuat fără răcire pe bare de oțel marca OL 50, avînd diametrul de 37 mm, ca în figura 13.

Montajul și dinamometrul prezentat au o serie de avantaje dintre care cele mai importante sînt următoarele: posibilitatea de a măsura atît forța maximă necesară în calculele de dimensionare a mașinii unelte cît și variația forței de așchiere; posibilitatea de a măsura valori ale forțelor în limite foarte largi prin înlocuirea corespunzătoare a elementelor

elastice; precizia ridicată obținută prin determinările cu aparatul respectiv, precum și sensibilitatea lui, avantaje care fac ca el să poată fi utilizat cu succes la operațiuni de finisare, care în prezent au cea mai largă răspîndire.

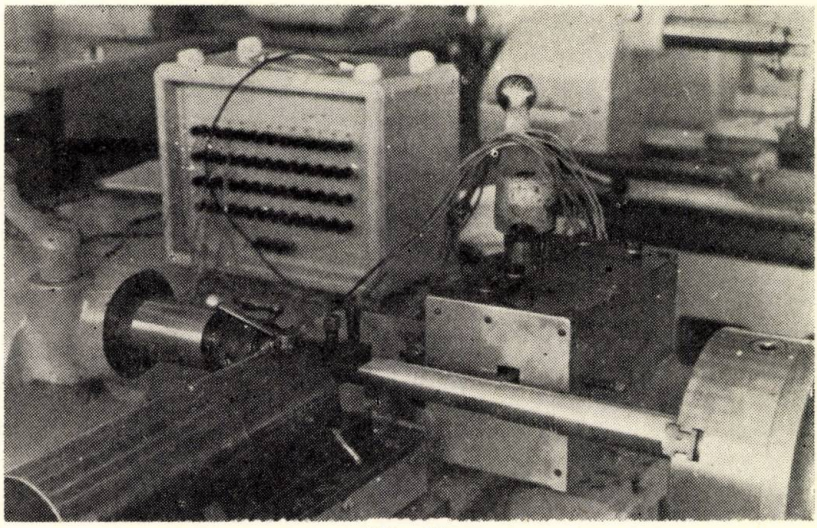
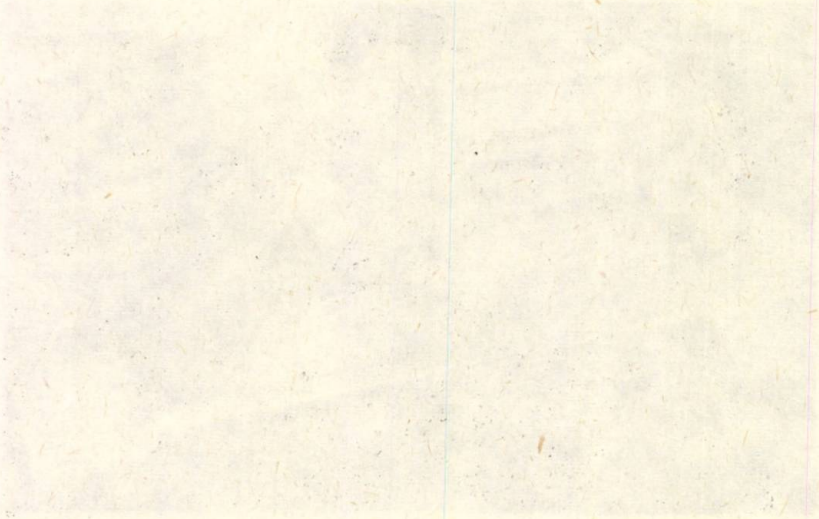


Fig. 13

Primită la redacție la 3 octombrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Enache, M. Aelenei, *Așchiere și scule așchietoare*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1967.
2. Z. Duca, *Bazele teoretice ale prelucrării pe mașini-unelte*, Edit. didactică și pedagogică, 1968.
3. Gh. Buzdugan, *Tensometrie electrică rezistivă*, Edit. tehnică, București, 1966.
4. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, Edit. tehnică, București, 1970.
5. Gh. Zgură, C. Ispas, *Cercetări privind construcția unui dinamometru pentru studierea celor trei componente ale forței de așchiere*, St. cerc. mec. apl., **30**, *1* (1970).
6. Susumu Shiozaki, *Dynamics and Design of Dynamometer*, London C.I.R.P., **18**, *4*, (1970).
7. Yoshinobu Tanata, Naoya Ikawa, *Accelerometer Applications to Tool Dynamometers with Improved Dynamic Response*, London C.I.R.P., **18**, *4* (1971).
8. A. Harris, ș.a. *Șocuri și vibrații*, Edit. tehnică, București, 1968.



CARACTERISTICILE GEOMETRICE ALE PROFILELOR

de GH. ZIDARU
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se determină aria, poziţia centrului de greutate şi momentul de inerţie în raport cu axa Ox paralelă cu coarda, pentru profilele obţinute prin transformarea conformă a cercului.
Metoda este verificată pentru elipsă şi apoi este aplicată la profilele Jukovski, Carafoli şi Kármán-Trefftz.
Rezultatele pot fi utilizate la calculul de rezistenţă al palelor de turbomaşini.

1. INTRODUCERE

Palele turbomaşinilor axiale sînt obţinute prin racordarea unor profile hidrodinamice alese din catalog astfel încît interacţiunea lor cu fluidul să se producă cu pierderi minime de energie.

După proiectarea hidrodinamică a palei, urmează calculul de rezistenţă la încovoiere şi la întindere sub acţiunea fluidului şi a forţelor centrifuge în cazul palei rotorice.

Determinarea ariei profilului ales, a poziţiei centrului de greutate şi a momentului său de inerţie în raport cu paralela la coardă ce trece prin centrul de greutate se face grafic, ceea ce conduce la un volum mare de muncă şi la o imprecizie inevitabilă.

În prezenta lucrare se expune o metodă de determinare a acestor mărimi pentru profile hidrodinamice obţinute printr-o transformare conformă a cercului. Verificarea formulelor obţinute se face pentru elipsă, iar ca aplicaţie se determină caracteristicile geometrice ale profilelor Jukovski, Carafoli şi Kármán-Trefftz.

Se arată apoi cum se pot utiliza rezultatele obţinute în aceste cazuri la calculul parametrilor geometrici ai profilelor practice.

2. EXPUNEREA METODEI GENERALE

Principul metodei constă în exprimarea mărimilor geometrice determinate prin integrale curbilinii pe conturul profilului şi trecerea la variabilele complexe z şi $\bar{z}$ ale planului fizic. În continuare, cu ajutorul funcţiei

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 2, 1975, P. 273–283

de transformare conformă $z\ (\zeta)$, aceste integrale curbilinii se efectuează pe cercul corespunzător din planul auxiliar ζ. Expresiile de integrat nu sînt funcţii olomorfe, deoarece conţin atît variabila ζ, cît şi conjugata sa $\overline{\zeta}$. Însă, pe cercul C, $\overline{\zeta}$ se poate exprima în funcţie de ζ.

Astfel, integranzii devin funcţii olomorfe de ζ, care se integrează obişnuit cu ajutorul teoremei reziduurilor. Fie un contur simplu închis oarecare K în planul z (fig. 1). Aria domeniului mărginit de curbă este

$$S = \frac{1}{2}\int_K (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_K \bar{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_C \overline{z(\zeta)}\ \mathrm{d}z\ (\zeta). \qquad (1)$$

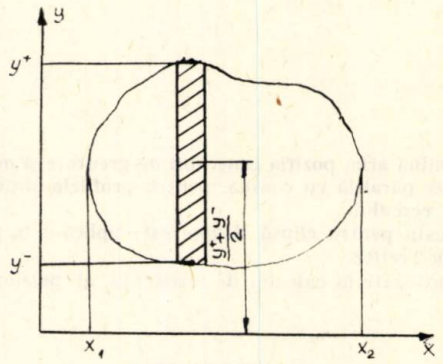


Fig. 1

Coordonatele (x_G, y_G) ale centrului de greutate se determină astfel:

$$x_G S = \int_S x\mathrm{d}S = \int_{x_1}^{x_2} x(y^+ - y^-)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} xy^+\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} xy^-\,\mathrm{d}x,$$

unde y^+ este ordonata părţii superioare a conturului K atunci cînd x variază între valorile sale extreme, iar y^- este ordonata părţii inferioare a acestui contur; deci

$$x_G = -\frac{1}{S}\int_K xy\mathrm{d}x = -\frac{1}{S}\int_K \frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{d}z+\mathrm{d}\bar{z}}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{8S}\left(\int_K z^2\mathrm{d}z - \int_K \bar{z}^2\mathrm{d}\bar{z}\right) + \frac{\mathrm{i}}{8S}\int_K (z^2\mathrm{d}\bar{z} - \bar{z}^2\mathrm{d}z).$$

Evident că

$$\int_K z^2\mathrm{d}z = 0\,;\ \int_K \bar{z}^2\mathrm{d}\bar{z} = \overline{\int_K z^2\mathrm{d}z} = 0$$

şi se obţine

$$x_G = -\frac{1}{4S}\,\mathrm{Im}\left[\int_C z^2(\zeta)\ \overline{\mathrm{d}z(\zeta)}\right]. \qquad (2)$$

Analog,

$$y_G S = \int_S y\,\mathrm{d}S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^+ + y^-}{2}(y^+ - y^-)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(y^+)^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(y^-)^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_K y^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2S}\int_K \left(\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}}{2},$$

$$y_G = -\frac{1}{8S}\,\mathrm{Re}\left\{\int_C [z^2(\zeta) - 2z(\zeta)\,\overline{z(\zeta)}]\,\mathrm{d}\overline{z(\zeta)}\right\}. \tag{3}$$

Momentul de inerţie al ariei S în raport cu axa x se determină astfel :
— pentru fişia elementară de lăţime $\mathrm{d}x$, se aplică teorema lui Steiner

$$\mathrm{d}I_x = \frac{(y^+ - y^-)^3\,\mathrm{d}x}{12} + (y^+ - y^-)\left(\frac{y^+ + y^-}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{(y^+)^3 - (y^-)^3}{3}\,\mathrm{d}x,$$

— pentru întreaga arie S

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2}(y^+)^3\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2}(y^-)^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int_K y^3\,\mathrm{d}x,$$

$$I_x = -\frac{1}{3}\int_K \left(\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)^3 \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}}{2}.$$

Deoarece

$$\int_K z^3\,\mathrm{d}z = 0\,; \quad \int_K \bar{z}^3\,\mathrm{d}\bar{z} = \overline{\int_K z^3\,\mathrm{d}z} = 0,$$

expresia momentului de inerţie devine

$$I_x = -\frac{1}{24}\,\mathrm{Im}\left\{\int_C [\overline{z^3(\zeta)} + 3z^2(\zeta)\overline{z(\zeta)} - 3z(\zeta)\overline{z^2(\zeta)}]\,\mathrm{d}z(\zeta)\right\}. \tag{4}$$

În integralele (1)—(4) conturul C al cercului din planul auxiliar ζ este parcurs în sens trigonometric.

Verificare

Pentru verificarea formulelor obţinute, se consideră în planul z elipsa

$$K : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Funcţia de reprezentare conformă a elipsei pe cercul $C: |\zeta| = 1$ este

$$z(\zeta) = \frac{a+b}{2}\zeta + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\zeta}.$$

Ţinînd seama $\zeta\overline{\zeta}\big|_C = 1$, rezultă

$$\overline{z(\zeta)}\Big|_C = \left(\frac{a+b}{2}\overline{\zeta} + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\Big|_C = \left(\frac{a+b}{2}\frac{1}{\zeta} + \frac{a-b}{2}\zeta\right)\Big|_C$$

şi

$$\overline{\mathrm{d}z(\zeta)}\Big|_C = \left(-\frac{a+b}{2}\frac{1}{\zeta^2} + \frac{a-b}{2}\right)\mathrm{d}\zeta\Big|_C.$$

Se introduc aceste expresii în formulele (1)—(4), se utilizează teorema reziduurilor

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^n \mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = -1, \\ 0 & n \neq -1 \ (n \text{ întreg}) \end{cases}$$

şi se găsesc valorile cunoscute:

$$S = \pi ab\,;\ x_G = y_G = 0\,;\ I_x = \frac{\pi ab^3}{4}.$$

3. PROFILE JUKOVSKI

Funcţia lui Jukovski de reprezentare a profilului pe cercul C de ecuaţie $|\zeta - \mu| = r_0$ ($\mu = -me^{-i\delta}$, fig. 2) este [1]

$$z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta}. \tag{5}$$

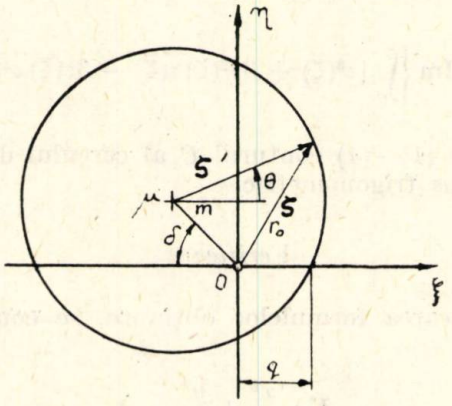


Fig. 2

Înlocuind în expresia (1), se obține

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_C \left(\overline{\zeta} + \frac{q^2}{\overline{\zeta}}\right)\left(1 - \frac{q^2}{\zeta^2}\right) d\zeta .$$

Cu substituția

$$\zeta = \mu + \zeta', \tag{6}$$

cercul se raportează la sistemul de axe (ξ', η') paralele cu axele (ξ, η) și cu originea în centrul cercului; rezultă:

$$\frac{1}{\overline{\zeta}} = \frac{1}{\overline{\zeta'}}\left(1 + \frac{\overline{\mu}}{\overline{\zeta'}}\right)^{-1} = \frac{1}{\overline{\zeta'}} - \frac{\overline{\mu}}{\overline{\zeta'^2}} + \frac{\overline{\mu}^2}{\overline{\zeta'^3}} - \frac{\overline{\mu}^3}{\overline{\zeta'^4}} + \frac{\overline{\mu}^4}{\overline{\zeta'^5}} - \dots$$

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{\zeta'^2}\left(1 + \frac{\mu}{\zeta'}\right)^{-2} = \frac{1}{\zeta'^2} - \frac{2\mu}{\zeta'^3} + \frac{3\mu^2}{\zeta'^4} - \frac{4\mu^3}{\zeta'^5} + \frac{5\mu^4}{\zeta'^6} - \dots$$

Pentru profile Jukovski cu curbură și grosime uzuale,

$$\sup_{\zeta' \in C}\left|\frac{\overline{\mu}}{\overline{\zeta'}}\right| = \sup_{\zeta' \in C}\left|\frac{\mu}{\zeta'}\right| = \frac{m}{\inf\limits_{\zeta' \in C}|\zeta'|} < 1$$

și aceste serii sînt absolut și uniform convergente. Pe cerc, $\overline{\zeta'}\ \zeta'|_C = r_0^2$, sau

$$\overline{\zeta'}\Big|_C = \frac{r_0^2}{\zeta'}\Big|_C . \tag{7}$$

Deci

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_C \left[\overline{\mu} + \frac{r_0^2}{\zeta'} + q^2\left(\frac{\zeta'}{r_0^2} - \frac{\overline{\mu}\zeta'^2}{r_0^4} + \frac{\overline{\mu}^2}{r_0^6}\zeta'^3 - \frac{\overline{\mu}^3}{r_0^8}\zeta'^4 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\overline{\mu}^4}{r_0^{10}}\zeta'^5 - \dots\right)\right]\left[1 - q^2\left(\frac{1}{\zeta'^2} - \frac{2\mu}{\zeta'^3} + \frac{3\mu^2}{\zeta'^4} - \frac{4\mu^3}{\zeta'^5} + \frac{5\mu^4}{\zeta'^6} - \dots\right)\right] d\zeta' =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{2\pi i\left[r_0^2 - \frac{q^4}{r_0^2}\left(1 + \frac{2m^2}{r_0^2} + \frac{3m^4}{r_0^4} + \frac{4m^6}{r_0^6} + \dots\right)\right]\right\}$$

deoarece $\mu\bar{\mu} = m^2$. Notînd provizoriu $u = \dfrac{m^2}{r_0^2} < 1$, rezultă

$$1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 + \ldots (u + u^2 + u^3 + \ldots)' = \left(\frac{u}{1-u}\right)' = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

Această restrîngere este posibilă pentru că progresia geometrică cu raţia subunitară este o serie absolut şi uniform convergentă şi deci se poate deriva termen cu termen. Prin urmare, aria profilului se exprimă cu formula exactă

$$S = \pi r_0^2 \left[1 - \left(\frac{q^2}{r_0^2 - m^2}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Pentru profilul Jukovski, formula (2) devine:

$$x_G = -\frac{1}{4S} \operatorname{Im} \left\{ \int_C \left[\left(\zeta^2 + \frac{q^2}{\zeta^2} + 2q\right) \left(1 - \frac{q^2}{\overline{\zeta}^2}\right) \right] d\overline{\zeta} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4S} \operatorname{Im} \left\{ \int_C \left[\zeta'^2 + 2\mu\zeta' + \mu^2 + q^2 \left(\frac{1}{\zeta'^2} - \frac{2\mu}{\zeta'^3} + \frac{3\mu^2}{\zeta'^4} - \frac{4\mu^3}{\zeta'^5} + \frac{5\mu^4}{\zeta'^6} + \ldots \right) + 2q \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - q^2 \left(\frac{1}{\overline{\zeta}'^2} - \frac{2\overline{\mu}}{\overline{\zeta}'^3} + \frac{3\overline{\mu}^2}{\overline{\zeta}'^4} - \frac{4\overline{\mu}^3}{\overline{\zeta}'^5} + \frac{5\overline{\mu}^4}{\overline{\zeta}'^6} + \ldots \right) \right] d\overline{\zeta}' \right\}.$$

Se ţine seama de relaţia (7) şi de cea obţinută prin diferenţiere

$$d\overline{\zeta}' \Big|_C = -\frac{r_0^2}{\zeta'^2} d\zeta' \Big|_C.$$

În plus, $\mu + \overline{\mu} = -2m \cos \delta$. De asemenea, se fac notaţiile:

$$\bar{q} = \frac{q}{r_0}; \quad \overline{m} = \frac{m}{r_0}$$

şi rezultă

$$x_G = -\frac{m \cos\delta}{1 - \left(\dfrac{\bar{q}^2}{1 - \overline{m}^2}\right)^2} \left(1 + \bar{q}^6 + 3\bar{q}^6\overline{m}^2 + 6\bar{q}^6\overline{m}^4\right). \tag{9}$$

Spre deosebire de (8), acest rezultat împreună cu cele ce urmează nu sînt exacte. Însă, gradul de exactitate pentru profile cu curbură şi grosime uzuale este satisfăcător, putînd fi mărit oricît dacă se reţin mai mulţi termeni din dezvoltările în serii.

Prin calcule laborioase, dar perfect analoage, se determină y_G și I_x:

$$y_G = \frac{m \sin\delta}{1-\left(\frac{\bar{q}^2}{1-\bar{m}^2}\right)^2}\left(1-\bar{q}^6-3\bar{q}^6\bar{m}^2-6\bar{q}^6\bar{m}^4-10\bar{q}^6\bar{m}^6-\frac{5}{2}\bar{q}^4\bar{m}^8\right), \tag{10}$$

$$I_x = \frac{1}{2}\pi r_0^4\left[\frac{1}{2}+\bar{m}^2-\bar{q}^2+\bar{q}^6-\frac{1}{2}\bar{q}^8+2\bar{q}^6\bar{m}^2+3\bar{q}^6\bar{m}^4-3\bar{q}^8\bar{m}^2+4\bar{q}^6\bar{m}^6-9\bar{q}^8\bar{m}^4+\right.$$

$$+\frac{15}{2}\bar{q}^6\bar{m}^8-20\bar{q}^8\bar{m}^6+\bar{m}^2\left(-1+\bar{q}^8+4\bar{q}^8\bar{m}^2-3\bar{q}^4\bar{m}^6+10\bar{q}^6\bar{m}^6+\right.$$

$$\left.\left.+10\bar{q}^8\bar{m}^4+\frac{5}{2}\bar{q}^4\bar{m}^8\right)\cos 2\delta.\right]. \tag{11}$$

4. PROFILE CARAFOLI [1,5]

Funcția de reprezentare conformă a celor mai utilizate profile Carafoli pe cercul $|\zeta-\mu| = r_0$ din figura 2 este

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_3}{\zeta^3}, \tag{12}$$

în care q are aceeași semnificație ca la profilele Jukovski, iar $q_3 = ne^{i\varepsilon}$ este un coeficient complex.

În acest caz, expresia (1) a ariei profilului se poate scrie astfel:

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_C\left(\overline{\zeta}+\frac{q^2}{\overline{\zeta}}\right)\left(1-\frac{q^2}{\zeta^2}\right)d\zeta\right]+\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\int_C\left[\frac{\bar{q}_3}{\overline{\zeta}^3}\left(1-\frac{q^2}{\zeta^2}-\frac{3q_3}{\zeta^4}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3q_3}{\zeta^4}\left(\overline{\zeta}+\frac{q^2}{\overline{\zeta}}\right)\right]d\zeta\right\}.$$

Primul termen al sumei este tocmai aria profilului Jukovski. Această observație ușurează calculul ariei. Ținînd seama de dezvoltarea în serie

$$\frac{1}{\zeta^4} = \frac{1}{\zeta'^4}-\frac{4\mu}{\zeta'^5}+\frac{10\mu^2}{\zeta'^6}-\ldots,$$

se obține

$$S = \pi r_0^2\left[1-\left(\frac{\bar{q}^2}{1-\bar{m}^2}\right)^2 - 3\bar{n}^2(1+12\bar{m}^2+60\bar{m}^4) - 3\bar{q}^2\bar{m}^2\bar{n}(1+8\bar{m}^2+20\bar{m}^4)\times\right.$$

$$\left.\times\cos(2\delta+\varepsilon)\right], \tag{13}$$

cu $\bar{n} = \dfrac{n}{r_0^4}$.

Introducînd funcția de transformare (12) în formula (2), calculele se pot simplifica într-o anumită măsură dacă se grupează expresiile specifice profilului Jukovski

$$Sx_G = (Sx_G)_J - \frac{1}{4}\operatorname{Im}\left[\int_C \frac{q_3^2}{\zeta^6}\left(1-\frac{q^2}{\zeta^2}-\frac{3q_3}{\zeta^4}\right)d\zeta\right] - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_C \frac{q_3}{\zeta^3}\left(\zeta+\frac{q^2}{\zeta}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{q^2}{\zeta^2}-\frac{3\bar{q}_3}{\zeta^4}\right)d\zeta\right] + \frac{1}{4}\operatorname{Im}\left[\int_C \frac{3\bar{q}_3}{\zeta^4}\left(\zeta+\frac{q^2}{\zeta}\right)^2 d\zeta\right],$$

unde $(Sx_G)_J$ este expresia corespunzătoare profilului Jukovski. Rezultă abscisa centrului de greutate al profilului Carafoli

$$x_G = -\frac{\pi r_0^3}{S}\left\{\left[\bar{m}(1+\bar{q}^6+3\bar{q}^6\bar{m}^2+6q^6\bar{m}^4)+6\bar{m}\bar{n}^2(1+2\bar{q}^2+6\bar{m}^2+20\bar{m}^4+\right.\right.$$

$$\left.+20\bar{q}^2\bar{m}^2)\right]\cos\delta + 2\bar{q}^2\bar{m}\bar{n}(1+3\bar{m}^2+6\bar{m}^4+10\bar{m}^6)\cos(\delta+\varepsilon) + 4\bar{q}^4\bar{m}^3\bar{n}\times$$

$$\left.\times\cos(3\delta+\varepsilon) + 3\bar{q}^2\bar{m}\bar{n}\,(\bar{q}^2+6\bar{q}^2\bar{m}^2+20\bar{m}^4)\right\}. \tag{14}$$

Ordonata centrului de greutate se determină înlocuind funcția (12) în expresia (3):

$$y_G S = (y_G S)_J + \frac{3}{8}\operatorname{Re}\left\{\int_C \frac{\bar{q}_3}{\bar{\zeta}^4}\left[\left(\zeta+\frac{q^2}{\zeta}\right)^2 - 2\left(\zeta+\frac{q^2}{\zeta}\right)\left(\bar{\zeta}+\frac{q^2}{\bar{\zeta}}\right)\right]d\zeta\right\} -$$

$$-\frac{1}{8}\operatorname{Re}\left\{\int_C\left[\frac{2q_3}{\zeta^3}\left(\zeta+\frac{q^2}{\zeta}\right)+\frac{q_3^2}{\zeta^6}-\frac{2q_3}{\zeta^3}\left(\bar{\zeta}+\frac{q^2}{\bar{\zeta}}+\frac{\bar{q}_3}{\bar{\zeta}^3}\right)-\frac{2q_3}{\zeta^3}\left(\zeta+\frac{q^2}{\zeta}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{q^2}{\bar{\zeta}^2}-\frac{3\bar{q}_3}{\bar{\zeta}^4}\right)d\zeta\right\},$$

$(y_G S)_J$ este momentul static în raport cu axa Ox, al profilului Jukovski corespunzător cercului C. Rezultă:

$$y_G = \frac{\pi r_0^3}{2S}\bar{m}\left\{2\left(1-\bar{q}^6-3\bar{q}^6\bar{m}^2-6\bar{q}^6\bar{m}^4-10\bar{q}^6\bar{m}^6-\frac{5}{2}\bar{q}^4\bar{m}^8\right)\sin\delta+3\bar{q}^2\bar{n}\times\right.$$

$$\times[(1-\bar{q}^2+3\bar{m}^2-6\bar{q}^2\bar{m}^2+6\bar{m}^4-10\bar{m}^6)\sin(\delta+\varepsilon)+\bar{q}^2\bar{m}^2\times$$

$$\times(1+5\bar{m}^2)\sin(3\delta+\varepsilon)]+\bar{n}[12\bar{n}(-1-6\bar{m}^2+2\bar{q}^2+10\bar{m}^4+20\bar{q}^2\bar{m}^2)\sin\delta+$$

$$+\bar{q}^2(1+3\bar{m}^2-6\bar{q}^2+6\bar{m}^4-18\bar{q}^2\bar{m}^2+10\bar{m}^6-60\bar{q}^2\bar{m}^4)\sin(\delta+\varepsilon)+\bar{q}^2\bar{m}^2\times$$

$$\left.\times(5\bar{q}^2+36\bar{m}^4+25\bar{q}^2\bar{m}^2)\sin(3\delta+\varepsilon)]\right\}. \qquad (15)$$

De asemenea,

$$I_x = \frac{\pi r_0^4}{4}[1+2\bar{m}^2-4\bar{n}^2-\bar{q}^8-27\bar{q}^8\bar{m}^4-8\bar{q}^4\bar{n}^2-24\bar{m}^2\bar{n}^2-6\bar{q}^8\bar{m}^2-52\bar{q}^8\bar{m}^6-$$

$$-120\bar{q}^2\bar{m}^4\bar{n}^2-160\bar{q}^4\bar{m}^2\bar{n}^2+\bar{m}^2(\bar{q}^2+30\bar{n}^2-8\bar{m}^2\bar{n}^2-3\bar{q}^6+5\bar{q}^4\bar{m}^4+5\bar{q}^6\bar{m}^2-$$

$$-4\bar{q}^4\bar{m}^6+15\bar{q}^6\bar{m}^4+12\bar{q}^2\bar{n}^2-10\bar{q}^8\bar{m}^4-30\bar{q}^4\bar{n}^2-160\bar{q}^2\bar{m}^2\bar{n}^2)\cos2\delta-2\bar{q}^2\bar{n}^2\times$$

$$\times(2\bar{q}^2-15\bar{m}^4+12\bar{q}^2\bar{m}^2-3\bar{q}^4\bar{m}^2+9\bar{q}^2\bar{m}^4+3\bar{q}^6\bar{m}^2+30\bar{q}^4\bar{m}^4+52\bar{q}^2\bar{m}^6)\times$$

$$\times\cos\varepsilon-2\bar{m}^2\bar{n}(3\bar{q}^2-6\bar{q}^2\bar{m}^2+15\bar{q}^6-15\bar{q}^2\bar{m}^4+10\bar{q}^4\bar{m}^4+18\bar{n}^2+92\bar{q}^6\bar{m}^2)\times$$

$$\times\cos(2\delta+\varepsilon)+\bar{q}^2\bar{m}^4\bar{n}(5-12\bar{m}^2+2\bar{q}^2-5\bar{q}^4)\cos(4\delta+\varepsilon)-6\bar{q}^2\bar{m}^4\bar{n}^2\times$$

$$\times\cos(4\delta+2\varepsilon)]. \qquad (16)$$

5. PROFILE KÁRMÁN-TREFFTZ

Aceste profile se obţin prin transformarea conformă

$$\frac{z-kq}{z+kq}=\left(\frac{\zeta-q}{\zeta+q}\right)^k \qquad (1<k\leqslant 2), \qquad (17)$$

aplicată cercului din figura 2. Pentru $k=2$ această transformare degenerează în funcţia lui Jukovski (5).
Prin dezvoltare în serie, relaţia (17) devine

$$z=\zeta+\frac{q_1}{\zeta}+\frac{q_3}{\zeta^3}+\frac{q_5}{\zeta^5}+\ldots \qquad (17')$$

cu coeficienţii :

$$q_1 = \frac{k^2-1}{3} q^2; \quad q_3 = \frac{(k^2-1)\,(4-k^2)}{45} q^4, \tag{18}$$

$$q_5 = \frac{(k-1)\,(k-2)}{720}(5k^4 - 18k^3 + 55k^2 - 114k + 48)\, q^6.$$

Trasarea analitică a profilului Kármán-Trefftz se face analog cu aceea a profilului Jukovski. Se consideră un punct oarecare pe cercul din planul iniţial

$$\zeta \equiv \mathrm{Re}^{i\gamma} = -me^{-i\delta} + r_0 e^{i\theta},$$

de unde

$$R = \sqrt{m^2+r_0^2 - 2mr_0\cos(\delta+\theta)}; \quad \gamma = \mathrm{arc\ tg}\ \frac{m\sin\delta + r_0\sin\theta}{-m\cos\delta + r_0\cos\theta}. \tag{19}$$

Ţinînd seama de aceste expresii, din relaţia (17′) rezultă coordonatele punctelor de pe profil :

$$x = \left(R + \frac{q_1}{R}\right)\cos\gamma + \frac{q_3}{R^3}\cos 3\gamma + \frac{q_5}{R^5}\cos 5\gamma + \ldots,$$

$$y = \left(R - \frac{q_1}{R}\right)\sin\gamma - \frac{q_3}{R^3}\sin 3\gamma - \frac{q_5}{R^5}\sin 5\gamma - \ldots. \tag{20}$$

Se dau valori $\theta \in [0;\ 2\pi]$ şi, utilizînd succesiv relaţiile (18), (19) şi (20), se determină punctele corespunzătoare de pe profil.

Formulele (13)—(16) sînt aplicabile şi pentru acest profil observînd că q_5 este neglijabil în raport cu q_1 şi q_3, înlocuind $\bar{q}$ cu

$$\bar{q}_1 = \bar{q}\sqrt{\frac{k^2-1}{3}} \tag{21}$$

şi punînd

$$\bar{n} = \frac{(k^2-1)\,(4-k^2)}{45}; \qquad \varepsilon = 0. \tag{21′}$$

6. UTILIZAREA REZULTATELOR

La proiectele de turbomașini sînt utilizate profile practice (Göttingen, NACA, Clark etc.), care nu sînt obținute prin transformări conforme. Folosind formulele stabilite pentru profilele teoretice, se poate alcătui un album de astfel de profile cu coarda $l = 100$ și cu grosimi și curburi diferite, iar alături se notează valorile corespunzătoare pentru S, x_G, y_G și I_x. Pentru profilul practic adoptat se caută în album profilul teoretic cu forma cea mai apropiată, adoptînd direct constantele geometrice ale acestuia. În felul acesta, calculul de rezistență al unei pale este foarte expeditiv și precis.

Programarea pentru calculator a formulelor stabilite în vederea alcătuirii albumului este simplă.

Autorul își propune să finalizeze prezenta lucrare în acest mod pentru a o pune la dispoziția proiectanților de pompe, ventilatoare, compresoare și turbine.

Remarcă. De mai mult timp, Catedra de mașini hidraulice a Institutului Politehnic Timișoara a întreprins o serie de cercetări asupra utilzării „profilelor Carafoli", cu bordul de fugă rotunjit, la proiectarea turbomașinilor, dată fiind buna comportare a acestor profile la deformații și vibrații. Dacă acestea se deduc pe cale teoretică cu ajutorul unor funcții simple de transformare, atunci se pot aplica aceleași formule de la aliniatele 3 și 4.

Primită la redacție la 8 februarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*, vol. II, București, Edit. Academiei R.P.R., 1952.
2. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Paris, Gauthier-Vil., 1959.
3. C. Pfleiderer, *Die Kreiselpumpen für Flüssigkeiten und Gase*, 4. Auflage, Berlin, Springer Verlag, 1955.
4. D. Pavel, *Mașini hidraulice*, vol. I, II. București, E. E.S., 1955.
5. Carafoli, *Aerodinamica*, București, Edit. Tehnică, 1954.
6. „ , *Tragflügdtheorie*, Verlag Technik, Berlin, 1954.
7. „ , *Aerodinamica krtla samoleta*, Izdstvo Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1956.

SOLUȚII ALE ECUAȚIEI ENERGIEI TOTALE ÎN CAZUL SCURGERII PE PLACA PLANĂ INCLUZÎND ALUNECAREA LA PERETE

de ȘTEFAN I. MAKSAY
Institutul de subingineri, Hunedoara

**Se studiază repartiția temperaturii în stratul-limită în cazul scurgerii cu fenomene de alunecare a unui fluid vîscos incompresibil pe o placă plană.
Presupunînd cunoscută repartiția vitezei dată în [1], se determină două relații ale ecuației energiei totale și se stabilește valoarea fuxului termic pe suprafața plăcii.**

Problema dinamică a scurgerii în stratul-limită incluzînd alunecarea pe suprafața plăcii plane atacată de un curent uniform de fluid vîscos incompresibil, este studiată în lucrarea [1]. În nota de față se studiază unele probleme termice care se pun în legătură cu acest tip de scurgere.

NOTAȚII

x și y — coordonatele stratului-limită; x se măsoară pe placă în direcția curentului din bordul de atac iar y se măsoară pe normala la placă,
u și v — proiecțiile vitezei particulei fluide pe axele de coordonate Ox, respectiv Oy,
μ, ν, ρ — coeficienții de viscozitate dinamică și cinematică, densitatea ($\nu = \mu/\rho$),
λ — coeficientul de conductibilitate termică,
T și c — temperatura absolută în fluid și căldura specifică,
$\sigma = \mu c/\lambda$ — numărul lui Prandtl.

Determinarea scurgerii în stratul-limită staționar revine la integrarea următorului sistem de ecuații [2]:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\nu}{\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{3}$$

în care (1) reprezintă ecuaţia dinamică a mişcării, (2) — ecuaţia continuităţii, iar (3) — ecuaţia energiei, sistem căruia îi ataşăm următoarele condiţii la limită [3]:

$$u = L\frac{\partial u}{\partial y},\quad v = 0 \qquad \text{pentru } y = 0, \tag{4}$$

$$u \to U_\infty \qquad \text{pentru } x = 0 \text{ şi } y \to \infty, \tag{5}$$

$$T = T_w + H\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{pentru } y = 0, \tag{6}$$

$$T \to T_\infty \qquad \text{pentru } x = 0 \text{ şi } y \to \infty, \tag{7}$$

unde L şi H sînt constante proporţionale cu liberul parcurs mijlociu, H fiind totodată invers proporţional cu numărul lui Prandtl.

Soluţia ecuaţiei dinamice a mişcării cu condiţiile la limită corespunzătoare este dată în [1]. Pentru a determina cîmpul temperaturilor înmulţim ecuaţia (1) cu u/c şi prin adunare la ecuaţia (3) obţinem ecuaţia energiei totale în forma [4]:

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left(T + \frac{u^2}{2c}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(T + \frac{u^2}{2c}\right) = \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(T + \frac{u^2}{2c}\right) + \nu\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{8}$$

În ipoteza că numărul lui Prandtl este egal cu unitatea, ecuaţia energiei totale admite soluţia

$$T + \frac{u^2}{2c} = a \quad \text{(const.)}. \tag{9}$$

Să vedem în ce condiţii această soluţie verifică şi condiţiile la limită. Derivînd relaţia (9) în raport cu y, rezultă pe suprafaţa fluidului în contact cu placa:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = -\frac{L}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w^2, \tag{10}$$

iar condiţia (6) se va scrie

$$T = T_w - \frac{HL}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad \text{pentru } y = 0. \tag{11}$$

Aplicînd relaţia (9) o dată pe frontiera exterioară a stratului-limită şi o dată pe fluidul care alunecă pe placă, obţinem

$$T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c} = T_w + \frac{L}{c}\left(\frac{1}{2}L - H\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w^2 \equiv a, \tag{12}$$

caz realizabil deoarece $(\partial u/\partial y)_w$ este funcţie de x, numai dacă $H = L/2$. Condiţia (11) va avea forma

$$T = T_w - \frac{L^2}{2c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad \text{pentru } y = 0$$

sau

$$T = T_w - \frac{1}{2c} u^2 \qquad \text{pentru } y = 0, \tag{13}$$

iar condiția (12) devine

$$T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c} = T_w \equiv a. \tag{14}$$

Deci, dacă în cazul scurgerii peste o placă plană incluzînd alunecarea la perete sînt îndeplinite condițiile (13) și (14), condiția (13) înlocuind condiția la limită (6), între cîmpul temperaturilor și cîmpul vitezelor avem relația dată (9) cu a determinat de (14).

Remarcăm faptul că în ipoteza $L = 0$, ceea ce revine la a neglija fenomenul de alunecare pe suprafața plăcii, adică $u = 0$ pentru $y = 0$, obținem integrala cunoscută a lui Busemann din teoria stratului-limită clasic.

Din compararea rezultatelor obținute cu cazul integralei lui Busemann rezultă că deși valoarea constantei a este aceeași în ambele cazuri, distribuția temperaturilor în stratul-limită dată de (9) diferă datorită faptului că însăși distribuția vitezelor diferă. În funcție de distribuția vitezelor dată în [1] distribuția temperaturilor rezultă imediat.

Spre deosebire de cazul stratului-limită clasic, observăm că în cazul scurgerii cu fenomene de alunecare are loc un transfer de căldură de la placă spre fluid dat de relația (10). Conform aproximației lui Hasimoto din [1], avem

$$q_w(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{\lambda}{cL}(1 - 0{,}56\xi + 0{,}15\xi^2)^2, \tag{15}$$

$q_w(x)$ fiind cantitatea de căldură care se scurge în unitatea de timp prin unitatea de suprafață a plăcii, de la placă spre fluid, iar $\xi = 2\sqrt{\nu x}/L$.

Revenind la ecuația (8) observăm că pentru numărul lui Prandtl egal cu unitatea, ea admite și soluția

$$T + \frac{u^2}{2c} = au + b, \tag{16}$$

unde constantele a și b se determină aplicînd relația (16) o dată pe frontiera exterioară a stratului-limită și o dată pe placă. Obținem valorile:

$$a = \frac{T_\infty - T_w - H\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w}{U_\infty - L\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w} + \frac{1}{2c}\left[U_\infty + L\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w\right], \tag{17}$$

$$b = T_\infty + \frac{1}{2c} U_\infty^2 - aU_\infty, \tag{18}$$

caz realizabil numai dacă

$$T_w + H\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = T_\infty + \frac{1}{2c}\left[U_\infty^2 - L^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w^2\right] - k\left[U_\infty - L\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w\right], \quad (19)$$

k fiind o constantă arbitrară.

Pentru transferul de căldură avem

$$q_w(x) = E(x)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w, \quad (20)$$

unde

$$E(x) = -\lambda\left[a - \frac{1}{c}(1 - 0{,}56\,\xi + 0{,}15\,\xi^2)\right].$$

Considerînd că pe placă nu are loc desprinderea stratului limită, sensul transferului de căldură este dat de semnul lui $E(x)$ şi anume în punctele în care $E(x) < 0$ căldura se scurge de la fluid spre placă, iar în punctele în care $E(x) > 0$ căldura se scurge de la placă spre fluid.

Observăm fenomenul de alunecare pe placă, ceea ce revine la a considera $L = H = 0$, obţinem integrala cunoscută a lui Crocco din teoria stratului-limită clasic.

Primită la redacţie la 1 februarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. H. Hasimoto, *Boundary – layer slip solutions for a flat plate*, Journal of the Aeronautical Sciences, **25**, *1*, 68 – 69 (1958).
2. Caius Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Gauthier – Villars, Paris şi Editura Academiei, Bucureşti, 1959.
3. S.A. Schaaf, *Skin friction in slip flow*, J. Aeronaut, Sci., **21**, *2*, 85 – 90, 144 (1953).
4. Petre Brădeanu, *Mecanica fluidelor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1973.

STUDIUL ŞOCULUI HIDRAULIC ÎNTR-O CONDUCTĂ SUB PRESIUNE PROTEJATĂ CU REZERVOARE DE AER ŞI CASTELE DE ECHILIBRU, FOLOSIND UN CALCULATOR NUMERIC. I

de ŞT. ZAREA, I. JELEV
Institutul politehnic Bucureşti
Institutul de studii şi cercetări pentru îmbunătăţiri funciare, Bucureşti

Prima parte a lucrării cuprinde relaţiile pentru calculul variaţiei debitului şi presiunii în cazul şocului hidraulic precum şi condiţiile iniţiale şi la limită în diferite secţiuni caracteristice ale conductei studiate. Folosind programul de calcul s-au studiat numeroase variante de protecţie a conductei variindu-se legea de închidere a clapetei şi numărul, poziţia şi caracteristicile geometrice ale sistemelor de protecţie a conductei, iar rezultatele s-au comparat între ele, precum şi cu cazul în care conducta nu este protejată.

1. OBIECTUL LUCRĂRII

Numărul mare de staţii de pompare în funcţiune sau care se proiectează şi apariţia şocului hidraulic (loviturii de berbec) în conductele de refulare ale acestora în cazul unor manevre bruşte sau în caz de avarii, a generat elaborarea a diferite procedee de protecţie a conductelor de refulare faţă de suprapresiunile care apar în aceste regimuri tranzitorii precum şi a numeroase metode de calcul a variaţiei presiunilor în timp în diverse secţiuni ale conductei respective [1] — [9]*). În ultimii ani, se acordă prioritate rezolvării acestei probleme cu ajutorul calculatoarelor numerice, folosindu-se algoritme care asigură precizie sporită şi timp de lucru redus [10] — [22], dar, cu puţine excepţii, nu s-au publicat programe complete care să poată fi utilizate direct pentru rezolvarea unor cazuri concrete.

Obiectul lucrării constă în a prezenta un program pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale ale şocului hidraulic pentru cazul unei conducte de refulare, avînd o clapetă de închidere rapidă sau vană cu manevră după program, dintr-o staţie de pompare, considerîndu-se că protecţia se realizează cu unul sau mai multe rezervoare de aer sau castele de echilibru. Datorită volumului mare al lucrării, aceasta a fost divizată în două părţi, programul fiind prezentat în ultima parte.

În prima parte a lucrării s-a studiat influenţa numărului şi poziţiei rezervoarelor şi castelelor de echilibru precum şi a legii de închidere a clapetei şi a rezistenţei hidraulice asupra evoluţiei undelor de presiune şi de

*) Bibliografia se referă la ambele părţi ale lucrării.

debit într-o conductă, constînd dintr-o succesiune de tronsoane avînd diametre şi grosimi diferite, legate în serie, şi avînd un număr oarecare de ramificaţii prin care se scurg sau intră debite precizate.

În cazurile concrete studiate s-a verificat că durata necesară pentru calculul variaţiei de presiune şi de debit este de ordinul a cinci minute, chiar şi în cazurile în care s-a considerat un număr mare de rezervoare de aer şi de castele de echilibru. Sperăm că programul elaborat, poate fi util atît în cercetarea cantitativă a influenţei diferiţilor parametri geometrici şi hidrodinamici asupra suprapresiunii maxime, în diferite secţiuni caracteristice ale conductei, cît şi pentru optimizarea sistemelor de protecţie ale unei conducte faţă de şocul hidraulic, permiţînd cercetătorilor şi proiectanţilor soluţionarea rapidă a unor cazuri concrete de interes practic.

2. IPOTEZE ŞI NOTAŢII

Pentru exprimarea analitică şi pentru integrarea numerică, în cuprinsul lucrării s-au utilizat următoarele ipoteze:

a) — fluidul este considerat compresibil, iar conducta elastică şi alcătuită din tronsoane avînd diametre şi grosimi diferite;

b) — presiunea în secţiunea de racord a conductei de refulare la rezervorul de refulare este constantă;

c) — pierderile de sarcină longitudinale vor fi înlocuite cu nişte pierderi de sarcină locale echivalente, concentrate în secţiunile de calcul de pe conductă, cu excepţia celor în care sînt racordate rezervoare de aer sau castele;

d) — se neglijează caracteristicile geometrice şi elastice ale conductelor racordate la conducta principală, prezenţa lor avîndu-se în vedere numai la aplicarea ecuaţiei de continuitate în nodurile respective;

e) — convenţional debitul pompat se consideră negativ.

Pentru mărimile care intervin în lucrare s-au utilizat notaţiile:

v_0 — viteza apei în conductă la momentul iniţial, m/s;

v — viteza apei în conductă într-un moment oarecare, m/s;

g — acceleraţia gravitaţiei, m/s^2;

$\varkappa$ — constantă adiabatică sau politropică;

γ; ρ — greutatea specifică, respectiv densitatea apei, kgf/m^3 şi $kgf\ s^2/m^4$;

s — spaţiul, măsurat în lungul conductei, m;

D; δ — diametrul, respectiv grosimea peretelui conductei, m;

t — timpul, în secunde;

t' — timpul de începere a închiderii clapetei, s;

t'' — timpul cînd clapeta s-a închis complet, s;

A — aria secţiunii transversale a conductei, constantă pe tronsoane, m^2;

p_a; p — presiunea atmosferică, respectiv presiunea în conductă, într-un punct şi la un moment oarecare, kgf/m^2;

$p_{i,j}$ — presiunea în secţiunea i la momentul j, kgf/m²;

p_0 — presiunea la momentul iniţial, kgf/m²;

Z_i — cota conductei în secţiunea i faţă de nivelul aval, m;

$H_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{\gamma} + Z_i$ — sarcina în nodul i la momentul j faţă de nivelul aval, m;

$H'_{i,j}$; $H''_{i,j}$ — sarcina în imediata vecinătate la stînga; respectiv la dreapta secţiunii i, la momentul j; m;

H_g — înălţimea geodezică, m;

H_r — pierderea de sarcină liniară pe conducta de refulare, m;

$H = f(Q)$ — caracteristica sarcină funcţie de debit a pompei;

$F(s - at)$ — funcţie arbitrară cu caracter de undă directă;

$f(s + at)$ — funcţie arbitrară cu caracter de undă inversă;

Δt, τ — timpul de parcurgere de către undă a celui mai scurt tronson, s;

l_i; l; L — lungimea unui tronson curent i, respectiv a celui mai scurt tronson şi lungimea totală a conductei de refulare, m;

$z_{i,j}$ — cota apei în castelul de echilibru sau rezervorul de aer faţă de axa conductei, m;

$Q_{i,j}$ — debitul în secţiunea i la momentul j, m³/s;

$Q'_{i,j}$; $Q''_{i,j}$ — debitul în imediata vecinătate la stînga; respectiv la dreapta secţiunii i la momentul j, m³/s;

$H_{-l,j}$, $Q_{-l,j}$, $H_{+l,j}$, $Q_{+l,j}$ — sarcina, respectiv debitul într-un punct aflat la distanţa l înainte; respectiv după nodul i, la momentul j;

$Q_{i,\ \text{aport}}$ — debit suplimentar afluent sau prelevat din nodul i, m³/s;

$P_{i,j}$ — presiunea aerului din rezervorul i la momentul j, kgf/m²;

V_i — volumul total al rezervorului de aer din secţiunea i, m³;

$V_{i,j}$ — volumul pernei de aer din rezervorul i la momentul j, m³;

$Q_{i,\ j,\ \text{schimb}}$ — debitul schimbat de rezervorul i la momentul j cu conducta de refulare, m³/s;

M_i; M'_i — modulul de rezistenţă hidraulică al conductei de legătură a rezervorului de aer, respectiv a castelului de echilibru în secţiunea i a conductei, s²/m⁵;

F_i — aria secţiunii castelului de echilibru din nodul i, m²;

ζ_i — modulul de rezistență hidraulică al tronsonului i al conductei, s^2/m^5;

$M(t)$ — modulul de rezistență hidraulică locală a clapetei sau vanei, variabil în timp după o lege dată, s^2/m^2;

n — turația pompei la un moment oarecare, rot/min;

n_0 — turația pompei în situația de regim permanent, rot/min;

ω_0; ω — viteza unghiulară a pompei în regim permanent, respectiv la un moment oarecare, 1/s;

J — momentul de inerție al ansamblului rotor motor electric — rotor pompă, inclusiv apa aflată în acesta, kgf ms^2;

G — greutatea ansamblului rotor motor electric — rotor pompă inclusiv apa aflată în acesta, kgf;

M_m; M_r — cuplul motor respectiv rezistent la arborele pompei, kgf m;

N_0 — puterea absorbită de pompă la regimul nominal, kgf m/s;

η_0; η — randamentul pompei la regimul nominal respectiv pentru un debit oarecare;

ε; E — coeficientul de elasticitate cubică al apei, respectiv al materialului conductei de refulare, kgf/m^2;

K — constantă ce caracterizează materialul conductei;

$a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon D}{E \delta}}}$ — expresia celerității, m/s;

$m = \frac{a}{gA}$ — panta dreptei care reprezintă unda de supra-presiune, s/m^2;

$T_r = \frac{2L}{a}$ — timpul de reflexie al undei de presiune, s;

N — numărul maxim de secțiuni de calcul în care a fost împărțită conducta;

λ — coeficient de similitudine geometrică a două pompe (pentru aceeași pompă $\lambda = 1$).

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE. RELAȚIILE PENTRU CALCULUL PRESIUNII ȘI DEBITULUI

Calculul regimului tranzitoriu într-o conductă sub presiune în ipoteza fluidului compresibil și nevîscos se face prin rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale cunoscut [1]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \tag{1}$$

care admite soluţiile clasice :

$$p - p_0 = F(s - at) + f(s + at)\,; \quad v - v_0 = -\frac{g}{a\gamma}[F(s - at) - f(s + at)]. \tag{2}$$

Într-un punct curent i de pe conducta de refulare la un moment j, înlocuind presiunea cu sarcina $H_{i,j}$ şi viteza cu debitul $Q_{i,j}$ relaţiile (2) devin :

$$H_{i,j} - H_{i+1,\,j-1} = -\left(\frac{a}{gA}\right)_i (Q_{i,j} - Q_{i+1,j-1}), \tag{3}$$

$$H_{i,j} - H_{i-1,\,j-1} = \left(\frac{a}{gA}\right)_{i-1} (Q_{i,j} - Q_{i-1,\,j-1}), \tag{4}$$

unde debitul pompat este considerat negativ.

Avînd în vedere ipotezele c) şi d), între sarcinile $H_{i,j}$ şi debitele $Q_{i,j}$ înainte şi după o secţiune considerată există relaţiile :

$$H'_{i,j} = H''_{i,j} - \zeta_i Q'_{i,j}\,|Q'_{i,j}|, \tag{5}$$

$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} + Q_{i,\text{aport}} \tag{6}$$

Ţinînd seama de lungimea variabilă a tronsoanelor, calculul valorii debitelor şi presiunilor într-un punct i, la momentul j, se face determinîndu-se prin interpolare [5], valoarea debitelor şi presiunilor în punctele situate la distanţa l înainte şi după nodul i, la momentul $j - 1$

$$H_{+l,j-1} = H''_{i,j-1} \mp \frac{l}{l_i}(H''_{i,j-1} - H'_{i+1,j-1}), \tag{7}$$

$$Q_{+l,j-1} = Q''_{i,j-1} \mp \frac{l}{l_i}(Q''_{i,j-1} - Q'_{i+1,j-1}), \tag{8}$$

$$H_{-l,j-1} = H'_{i,j-1} - \frac{l}{l_{i-1}}(H'_{i,j-1} - H''_{i-1,j-1}), \tag{9}$$

$$Q_{-l,j-1} = Q'_{i,j-1} - \frac{l}{l_{i-1}}(Q'_{i,j-1} - Q''_{i-1,j-1}). \tag{10}$$

Introducînd expresiile (7) ... (10) în ecuaţiile (3) şi (4) rezultă :

$$H''_{i,j} + m_i Q''_{i,j} = H''_{i,j-1} + m_i Q''_{i,j-1} - \frac{l}{l_i}[H''_{i,j-1} + m_i Q''_{i,j-1} - (H'_{i+1,j-1} + m_i Q'_{i+1,j-1})], \tag{11}$$

$$H'_{i,j} - m_{i-1} Q'_{i,j} = H'_{i,j-1} - m_{i-1} Q'_{i,j-1} - \frac{l}{l_{i-1}}[H'_{i,j-1} - m_{i-1} Q'_{i,j-1} - (H''_{i-1,j-1} - m_{i-1} Q''_{i-1,j-1})], \tag{12}$$

unde partea dreaptă a celor două ecuaţii reprezintă constante cunoscute. Expresia (11) poate fi asociată unei unde de calcul care se propagă dinspre secţiunea $i+1$, iar expresia (12) unei unde de calcul ce se propagă dinspre secţiunea $i-1$.

Ecuaţiile (5), (6), (11) şi (12) permit determinarea debitului şi presiunii în orice secţiune curentă i a conductei.

În cazul în care $\zeta_i = 0$ şi $Q_{i,\text{aport}} = 0$, pentru calculul celor două necunoscute $H_{i,j}$ şi $Q_{i,j}$ sînt suficiente ecuaţiile (11) şi (12).

4. CONDIŢIILE INIŢIALE ŞI LA LIMITĂ. LEGEA DE ÎNCHIDERE A CLAPETEI SAU VANEI

Pentru determinarea valorilor presiunii şi debitului în regim nepermanent trebuie precizate condiţiile iniţiale şi la limită, care sînt concretizate prin prezenţa unor organe la extremităţile conductei (clapetă, rezervor de refulare) şi prin rezervoare de aer sau castele de echilibru, racordate la conducta respectivă în diferite secţiuni. În cele ce urmează se prezintă cinci cazuri de condiţii la limită diferite:

a) Rezervor de capăt cu nivel constant pentru care relaţiile (11) şi (12) devin:

$$H'_{N,j} = \text{const.}, \tag{13}$$

$$H'_{N,j} - m_{N-1} Q'_{N,j} = H'_{N,j-1} - m_{N-1} Q_{N,j-1} - \frac{l}{l_{N-1}} [H'_{N,j-1} -$$

$$- m_{N-1} Q'_{N,j-1} - (H''_{N-1,j-1} - m_{N-1} Q''_{N-1,j-1})]. \tag{14}$$

b) Pompe prevăzute cu clapete de închidere rapidă sau cu vane cu închidere programată, pentru care relaţiile de calcul sînt:

$$H''_{1,j} + m_1 Q''_{1,j} = H''_{1,j-1} + m_1 Q''_{1,j-1} - \frac{l}{l_1} [H''_{1,j-1} +$$

$$+ m_1 Q''_{1,j-1} - (H''_{2,j-1} + m_1 Q'_{2,j-1})], \tag{15}$$

$$H''_{1,j} = H'_{1,j} + M(t)\, Q'_{1,j} \,|Q'_{1,j}|, \tag{16}$$

$$Q'_{1,j} = Q''_{1,j}, \tag{17}$$

$$H'_{1,j} = f(Q'_{1,j}). \tag{18}$$

c) Rezervor de aer racordat într-o secţiune oarecare a conductei, considerînd o evoluţie adiabatică a aerului

$$P_{i,j} V^x_{i,j} = P_{i,0} V^x_{i,0} \tag{19}$$

La ecuațiile (11) și (12) se adaugă ecuația de continuitate

$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} + Q_{i,\text{aport}} + Q_{i,j\text{schimb}} \tag{20}$$

și ipoteza

$$H'_{i,j} = H''_{i,j} = H_{i,j}. \tag{21}$$

Presiunea aerului din rezervor, $p_{i,j}$, are expresia

$$\frac{p_{i,j}}{\gamma} = H_{i,j} - z_{i,j} + M_i \cdot Q_{i,j\text{schimb}} \mid Q_{i,j\text{schimb}} \mid + \frac{p_a}{\gamma} - Z_i. \tag{22}$$

d) Castel de echilibru racordat într-o secțiune oarecare a conductei. La ecuațiile (11), (12) se adaugă ecuația de continuitate

$$Q''_{i,j} = Q'_{i,j} + Q_{i,\text{aport}} + Q_{i,j\text{ schimb}} \tag{23}$$

și ipoteza (22).

e) Clapetă sau vană care se închide programat, legea de închidere fiind exprimată analitic, grafic sau tabelar.

5. VARIANTE STUDIATE

În figura 1 se prezintă schematic o stație de pompare și profilul în lung al conductei de refulare studiate. Stația de pompare respectivă este echipată cu patru pompe, refulînd un debit total de 5 m³/s într-o conductă cu diametrul de 1,6 m și lungimea de 1350 m. Înălțimea geodezică H_g este de 53 m.

S-a studiat variația undelor de debit și de presiune în această conductă atît în cazul fără sisteme de protecție, cît și în cazul în care s-au prevăzut unul sau mai multe rezervoare de aer sau castele de echilibru. O astfel de schemă de protecție s-a ales cu intenția ca programul pentru calculator să fie cît mai cuprinzător și să permită efectuarea unor studii

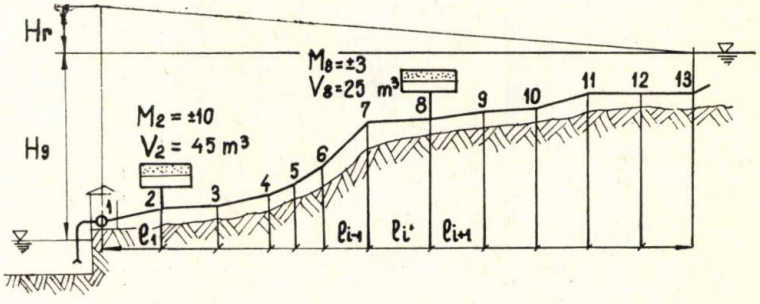


Fig. 1

comparative a curbelor $p = p(t)$, în vederea precizării influenței tipului de sistem de protecție, a numărului, poziției și dimensiunilor rezervoarelor respectiv castelelor de echilibru. În mod uzual sistemul de protecție realizat

pentru conductele de refulare constă în utilizarea unuia sau a două rezervoare de aer, sau castele de echilibru, rareori mai multe. Programul pentru calculator are un caracter general și poate fi utilizat atît pentru conducte de refulare, cît și pentru conductele forțate ale uzinelor hidroelectrice.

5.1. CONDUCTĂ FĂRĂ PROTECȚIE CONTRA ȘOCULUI HIDRAULIC

S-au studiat două ipoteze de închidere a clapetei :

— închiderea lentă a clapetei după o lege liniară, curba *1* din figura 2, în timp de două secunde, începînd de la o valoare a debitului în conductă egală cu 0,1 $Q_{nominal}$, valoare aleasă convențional ;

— o închidere rapidă, după curba *4* din figura 2, declanșată în momentul începerii curgerii inverse.

În figura 3 este schițată o vană.

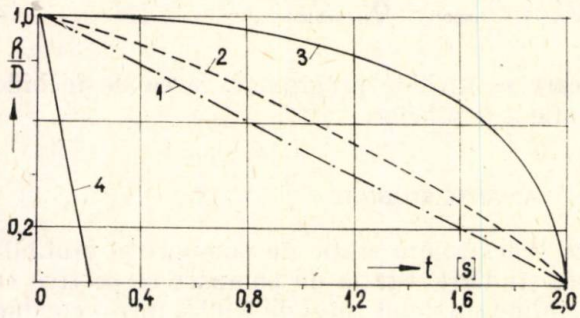


Fig. 2

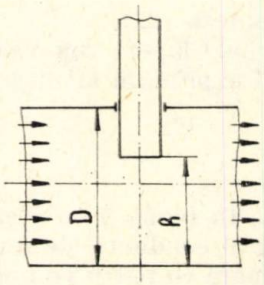


Fig. 3

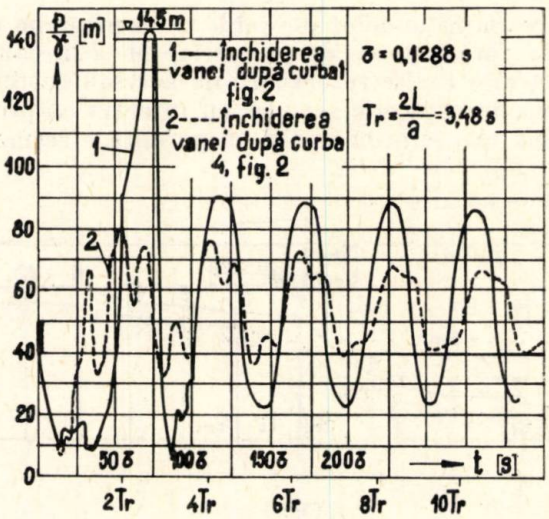


Fig. 4

Variația sarcinii datorită șocului hidraulic într-o conductă fără protecție, în secțiunea clapetei (fig. 4), pune în evidență amortizarea foarte lentă a oscilațiilor de presiune, amplitudinea și frecvența lor mare,

precum și efectul redus al pierderilor de sarcină longitudinale datorită debitelor mici. În varianta corespunzătoare începerii închiderii clapetei în momentul anulării debitului în conductă, valoarea suprapresiunii este mult mai mică decît în cazul închiderii clapetei înainte de apariția curgerii inverse, ipoteză adoptată mai frecvent în practică.

5.2. CONDUCTĂ PROTEJATĂ CU REZERVOARE DE AER

S-au studiat mai multe cazuri, considerîndu-se că în nodurile 2 și 8 este racordat cîte un rezervor de aer avînd volumul total de 45 m^3 și respectiv 25 m^3. S-au adoptat diverse legi de închidere a clapetei și cîteva valori diferite pentru modulele de rezistență hidraulică M_i ale conductelor de legătură dintre rezervoarele de aer și conducta de refulare.

Curbele *a* ... *e* din figura 5 corespund următoarelor ipoteze de calcul :

a — închidere după curba *4*(fig. 2), $V_2 = 45$ m^3, $M_2 = \pm 10$; $V_8 = 25$ m^3 ; $M_8 = \pm 3$;

b — închidere după curba *3* (fig. 2), $V_2 = 45$ m^3 ; $M_2 = \pm 10$; $V_8 = 25$ m^3 ; $M_8 = \pm 3$;

c — închidere după curba *2* (fig. 2), $V_2 = V_3 = \ldots V_{12} = 50$ m^3 ; $M_2 = M_3 = \ldots M_{12} = \pm 1$;

d — închidere după curba *2*(fig. 2), $V_2 = V_8 = 60$ m ; $M_2 = \pm 10$; $M_8 = \pm 3$;

e — variația presiunii minime în condițiile adoptate pentru curba *d*. Pentru acest ultim caz s-a reprezentat și variația turației pompei începînd din momentul scăderii bruște a sarcinii, curba *n*, (fig. 6), precum și variația debitului în secțiunea clapetei și în secțiunea 8 (fig. 6).

Pentru varianta din figura 7, la care închiderea clapetei s-a efectuat după curba *1* din figura 2, valoarea suprapresiunii în secțiunile *1*, *2*, *5*, *8*, și *12* cît și a presiunii minime sînt sensibil mai mari decît în cazul precedent. Acest fenomen se explică prin aceea că în condițiile unui volum dat al celor două rezervoare de aer, deși o rezistență hidraulică mică între rezervoare și conductă are un efect favorabil, împiedicînd transmiterea suprapresiunilor în conducta care trebuie protejată, în intervalul imediat după apariția perturbației datorită umplerii rapide a rezervoarelor de aer cu apă, ulterior rolul de protecție al acestora scade foarte mult, și în conductă se propagă suprapresiuni relativ mari.

În figura 8 s-au trasat curbele de variație a debitului în secțiunile *2* și *8* pentru ipotezele adoptate cazurilor reprezentate în figurile 5 și 7 (curbele *1* și *2* corespund condițiilor curbei a din figura 5, iar curbele *3*, *4* curbei *b*, fig. 5 și curbele *5*, *6* condițiilor din fig. 7).

În figura 9 se prezintă variația în timp a debitului schimbat de cele unsprezece rezervoare de aer cu conducta de refulare, rezervoare care intră pe rînd în funcțiune, defazat, unele fiind chiar în opoziție de fază.

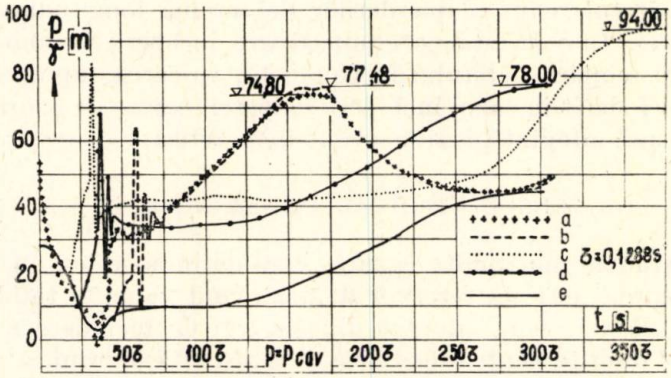


Fig. 5

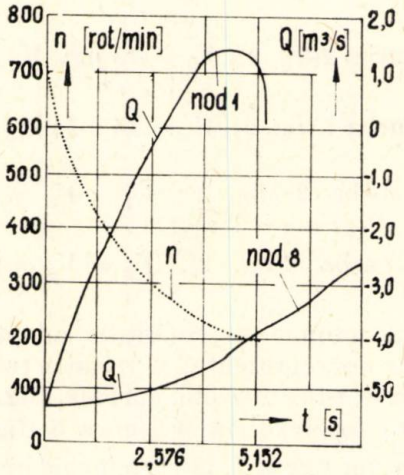


Fig. 6

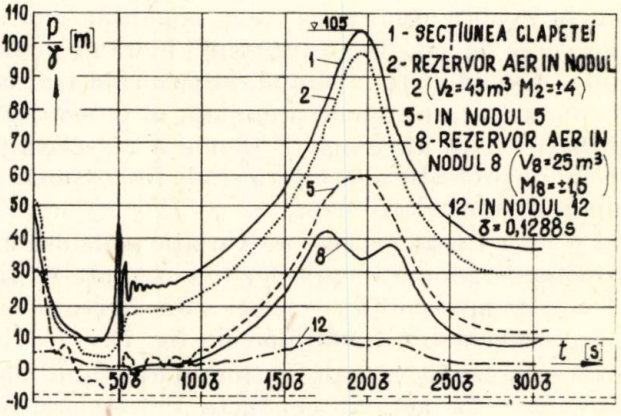

p/γ [m]
105
1 - SECȚIUNEA CLAPETEI
2 - REZERVOR AER IN NODUL 2 (V2=45m³ M2=±4)
5 - IN NODUL 5
8 - REZERVOR AER IN NODUL 8 (V8=25m³ M8=±1,5)
12 - IN NODUL 12
θ=0,1288s
t [s]

Fig. 7

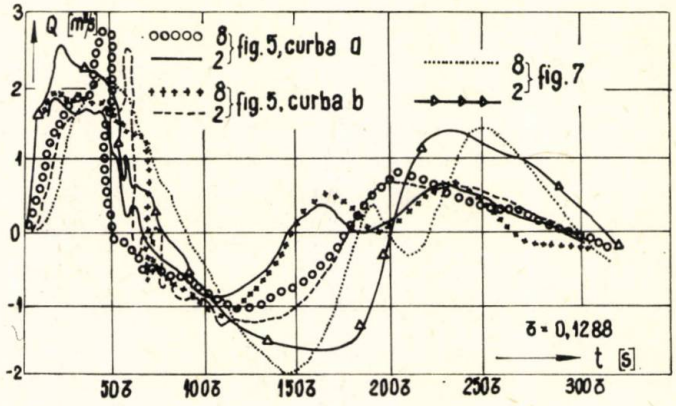


Fig. 8

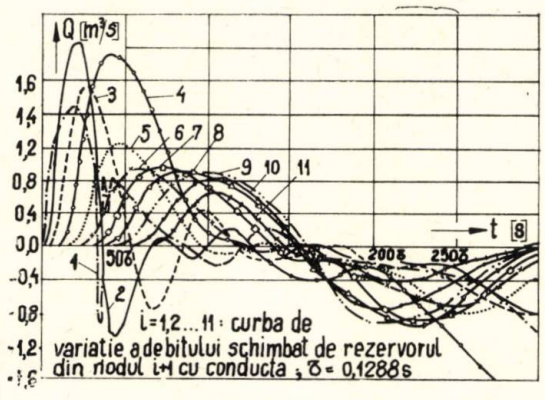


Fig. 9

5.3. CONDUCTĂ PROTEJATĂ CU CASTELE DE ECHILIBRU

Pentru toate cazurile studiate avînd ca mijloc de protecţie castelul de echilibru s-a menţinut aceeaşi lege de închidere a clapetei reprezentată de curba 2 din figura 2 ca şi în ipoteza utilizării rezervoarelor de aer.

Considerînd că în nodul 2 este amplasat un castel de echilibru cu diametrul de 7 m, variaţia presiunii în lungul conductei studiate este reprezentată în figura 10. Se observă atenuarea accentuată a oscilaţiilor de presiune, cu excepţia zonei cuprinsă între clapetă şi castel, unde variaţia presiunii este relativ mare. Intensitatea undei de presiune transmisă în conductă, după castel, este sub 15 % din valoarea maximă, ceea ce coincide cu rezultatele altor cercetători [9]. În cazul amplasării în secţiunea *2* a unui castel cu diametrul de 4 m, amplitudinea oscilaţiilor de presiune (fig. 11) şi de nivel al apei în castel (fig. 12) este mai mare decît în ipoteza precedentă, iar debitul schimbat de castel cu conducta (fig. 12) este aproximativ egal cu cel din varianta anterioară. Pentru a analiza influenţa şi interacţiunea castelelor, s-a considerat cazul conductei prevăzute cu unsprezece castele de echilibru, amplasate în secţiunile *2* ... *12*, negli-

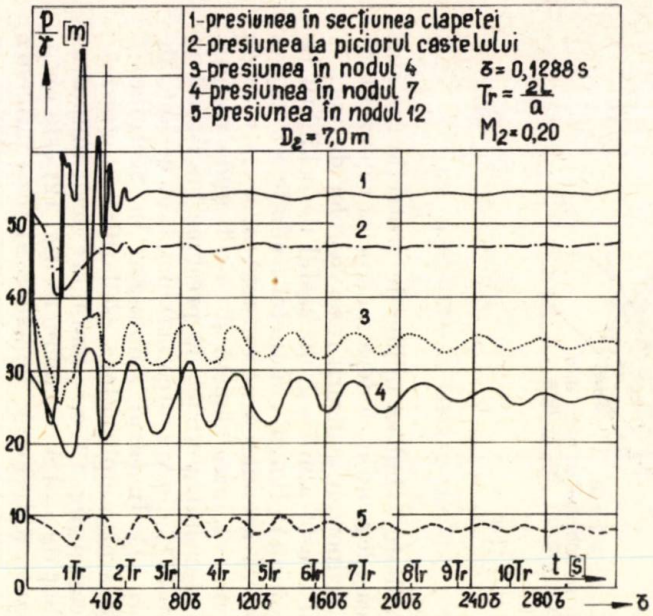


Fig. 10

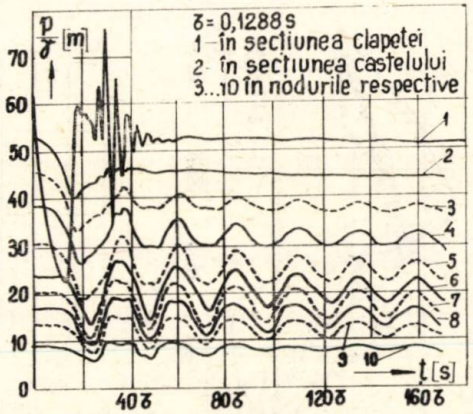


Fig. 11

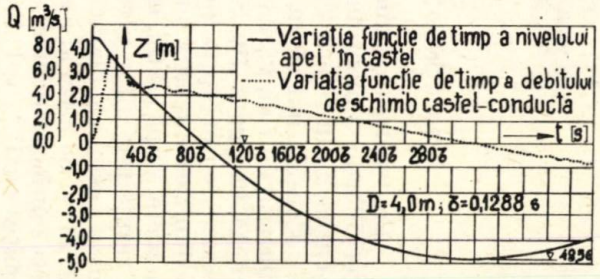

Q [m³/s]
Z [m]
—Variația funcție de timp a nivelului apei în castel
.....Variația funcție de timp a debitului de schimb castel-conductă
t [s]
40ϑ 80ϑ 120ϑ 160ϑ 200ϑ 240ϑ 280ϑ
D = 4,0 m ; ϑ = 0,1288 s

Fig. 12

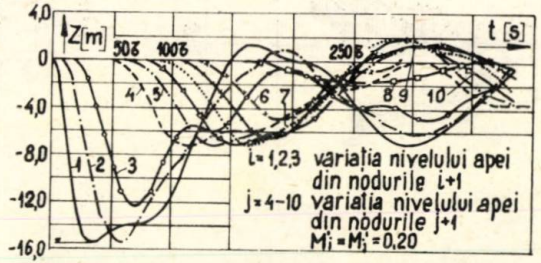

Z [m]
t [s]
50ϑ 100ϑ 250ϑ
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
i = 1,2,3 variația nivelului apei din nodurile i+1
j = 4-10 variația nivelului apei din nodurile j+1
M_i = M_j = 0,20

Fig. 13

jîndu-se pierderile de sarcină, iar rezultatele sînt prezentate în figurile 13 şi 14, care se deosebesc prin faptul că la prima din variante castelul cu diametru mare ($D = 4$) este aşezat departe de clapeta de închidere (fig. 13), iar în a doua variantă castelul principal este aşezat imediat după clapetă (fig. 14). În ambele cazuri, rezistenţa hidraulică a conductei de legătură

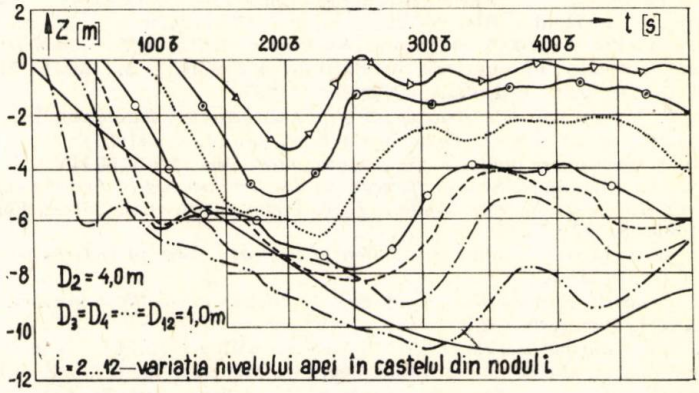


Fig. 14

dintre castele şi conducta de refulare s-a considerat constantă, $M_i' = 0{,}2$. În varianta din figura 14, după cum era de aşteptat, variaţia maximă a nivelului apei este mai mică decît în varianta din figura 13, iar nivelele minime în castele sînt atinse după o perioadă de timp mult mai îndelungată. Aceste fenomene se explică prin influenţa puternică a castelului principal, care intrînd primul în funcţiune preia o mare parte din oscilaţiile în masă. În timpul funcţionării, interacţiunea castelelor cu diametru mic este mare, iar influenţa lor asupra variaţiei nivelului apei din castelul principal este neglijabilă, atît pentru cazul din figura 13 cît şi pentru cel din figura 14.

Primită la redacţie la 18 martie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. L. Allievi, *Théorie du coup de bélier*, Paris, 1921.
2. N.E. Jukovski, *O ghidravliceskom udare v vodoprovodnih trubah*, Trudî IV Russkovo vodoprovodnovo sezda, 1899.
3. L. Bergeron, *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité*, Dunod, Paris, 1950.
4. G. Evangelisti, *Teoria generale del colpo d'ariete col metoda delle caratteristiche*, L'Energia Elettrica *2*, *3*, 65—90; 145—162 (1965).
5. V.L. Streeter, E.B. Wylie, *Hydraulic transients*, Mc. Graw-Hil Book Company, 1964.
6. D. Cioc, *Contribuţii la calculul mişcărilor nepermanente în conducte şi la teoria sonicităţii cu aplicare la pompajul sonic*, Teză de doctorat, Bucureşti, 1968.
7. M.D. Cazacu, *Mouvements unidimensionnels et nonpermanents des fluides compressibles, dans le cas des petites variations de pression avec des applications au coup de bélier*, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, **XX**, *3* (1958).
8. Şt. Zarea, N. Vasiliu, *L'analyse de l'efficacité de la cheminée d'équilibre par la méthode des ondes associées de debit et de pression*, Comptes rendus des Sciences de l'Académie française, **32**, april, 1079—1083 (1973).

9. L. ESCANDE, *Méthodes nouvelles pour le calcul des cheminées d'équilibre*, Dunod, Paris, 1950.
10. P.D. LAX, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. on Pure and Appl. Math., **VII** *1*, S. 159—193 (1954).
11. V.L. STREETER, *Computer solution of surge problems*, Symposium on Surge in Pipelines. Institute of Mech. Eng. Proc. 180 (1965/66) Part 3 E.
12. I. BATTA, *Calculation of waterhammer phenomena by automatic sequence controlled digital computers*, Acta Technica **56** *1/2*, s. 43—54 (1966).
13. R. CHAPPEY, *Le calcul des coups de bélier et des phénomènes transitoires par calculateurs électroniques*, La Houille Blanche **22**, *2*, s. 193—194 (1967).
14. M. LISTER, *Die numerische Integration hyperbolischer partieller Differentialgleichungen durch die Charakteristikenmethode*, in Ralston, A., Wilf, H.S.: Math. Methoden für Digitalrechner, Oldenburg, München, 1967.
15. W. KORTE, H. VIELHABER, *Ein Beitrag zur elektronischen Berechnung von Wasserversorgungsnetzen das Gas und Wasserfach* **108**, *8*, *14*, *24*, *28*, (1967).
16. D.J. WOOD, *Waterhammer analysis by analog computers*, Proc. ASCE **93** HY *1*, S.1—11 (1967).
17. M. MARCHAL, G. FLESCH, P. SUTER, *Berechnung des Druckstosses in Speicherpumpenanlagen mit Hilfe elektronischer Digitalrechner*, Techn. Rundschau Sulzer, Forschungsheft 1968, S. 67—75.
18. R.A. BALTZER, C. LAI, *Computer simulation of unsteady flows in waterways*, Proc. ASCE 94 (1968) HY4.
19. M. POPESCU, *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, Studii de Hidraulică, **XXIII**, Bucureşti, 1970.
20. M. de HES, *Waterhammer in a closed circuit*, Analysis with a Hybrid Computer. Sixth International Analogue Computation Meetings, München 1970, s. 488—495.
21. W. BECHTELER, *Die Berechnung in stationärer Fliessvorgänge in Druckrohrleitungen mittels analoger und digitaler Rechenanlagen*, Mitteilungen, Heft 7, Institut für Hydraulik, Technische Universität München, 1971.
22. C.S. MARTIN, H.C. JACKSON, *Combined surge tank and waterhammer analysis by digital computer*, Water Power, **24**, *4*, 123—129 (1972),.

CONSIDERAȚII ASUPRA POSIBILITĂȚILOR DE LIMITARE A EMISIILOR POLUANTE GENERATE DE AERONAVELE MODERNE; IMPLICAȚIILE CONSTRUCTIVE. II. POLUAREA SONORĂ

de ȘT. ISPAS și AL. NICA
G.A.B. I.M.F.C.A.

Pe lîngă emisiile de substanțe poluante și nocive, funcționarea aeronavelor determină efecte sonore care prezintă o gravă problemă de ordin ecologic și constructiv. În lucrare se prezintă aceste aspecte în lumina celor mai noi rezultate și soluțiile care se întrevăd pentru viitor.

În prima parte a lucrării s-au analizat efectele provenind din termodinamica arderii în grupurile propulsoare pentru aeronave asupra poluării atmosferice, consecințele care rezultă și mijloacele constructive în vederea reducerii lor la nivele acceptabile; acesta nu este însă singurul aspect legat de efectele poluante ale aeronavelor: funcționarea lor determină efecte sonore, care, datorită intensității, prezintă o gravă problemă atît de ordin ecologic, cît și de ordin constructiv, prin pericolul pe care îl constituie oboseala sonică pentru integritatea structurii avioanelor.

Nivelul de zgomot a ajuns să fie unul din parametrii de bază care se iau în considerație încă de la proiectarea aeronavei, recunoscîndu-se pe plan mondial insuficiența măsurilor ulterioare realizării construcției, practică obișnuită pînă în jurul anului 1950 cînd, odată cu apariția avioanelor de transport turboreactoare, limitarea poluării sonore cu toate consecințele ce le antrenează, a devenit o necesitate indiscutabilă.

S-au dezvoltat în consecință cercetări teoretice și experimentale deosebit de vaste în vederea analizării fenomenului, a cunoașterii succesiunii de cauze și efecte, pentru a se putea trece la construcții eficiente din punctul de vedere al limitării zgomotului, fără să fie sacrificate performanțele și economicitatea aeronavei, [1]—[6].

1. ENERGIA ACUSTICĂ ȘI INTENSITATEA SUNETULUI

Noțiunea de „sunet" include două înțelesuri: o formă de energie care poate fi detectată, analizată și estimată de aparatura acustică, special construită în acest scop, sau un fenomen care poate fi detectat de aparatul auditiv uman, supus deci la interpretări fiziologice și psihologice. Noțiunea

de „zgomot" este în general asociată cu acest al doilea înţeles şi înseamnă, de obicei, sunet nedorit, respectiv supărător sau chiar dăunător.

Sunetele sînt produse de fluctuaţiile presiunii statice ale aerului; dacă aceste fluctuaţii în funcţie de timp se notează prin $\Delta p\ (t)$, presiunea statică la un moment dat se poate scrie:

$$p(t) = p_a + \Delta p(t), \tag{1}$$

p_a fiind presiunea atmosferică în aerul perfect calm.

În cazul fluctuaţiilor $\Delta p\ (t)$ periodice, rezultă sunete muzicale; în cazul cînd $\Delta p(t)$ este o funcţie oarecare, rezultatul este zgomotul, mai mult sau mai puţin intens, după mărimea energiei acustice implicate.

Intensitatea zgomotului I, se defineşte cu ajutorul presiunii eficace a sunetului p_{ef}, [1], [2]:

$$I = \frac{p_{ef}^2}{\rho a}, \tag{2}$$

unde ρ este densitatea aerului, iar a viteza sunetului în aer; presiunea eficace p_{ef} este analogul intensităţii eficace utilizată în electricitate şi se calculează pentru un anumit interval de timp cu ajutorul relaţiei

$$p_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} [\Delta p\ (t)]^2\ \mathrm{d}t}\ . \tag{3}$$

Nivelul de intensitate se defineşte ca:

$$NI = \log \frac{I}{I_r} \quad \text{(Bel)}, \tag{4}$$

adică logaritmul raportului dintre intensitatea sunetului definită prin relaţia (2) şi o intensitate de referinţă $I_r = 10^{-16}$ w/cm^2 (corespunzînd minimului necesar pentru ca sunetul să fie perceptibil), rezultatul fiind unitatea de măsură pentru zgomot (Belul); se utilizează de obicei decibelul, mai bine adaptat intensităţilor obişnuite de zgomot:

$$NI = 10 \log \frac{I}{I_r} \quad \text{(dB)}. \tag{5}$$

O altă noţiune de uz curent în tehnica acustică, aplicată în aeronautică, este nivelul de presiune al sunetului (NPS):

$$NPS = 20 \log \frac{p_{ef}}{p_r} \quad \text{(dB)}, \tag{6}$$

p_r fiind o presiune sonoră de referință, egală cu 0,002 dine/cm^2 sau $2 \times 10^{-10} \times$bar.

În fine, nivelul puterii sunetului (NWS) se definește ca:

$$NWS = 10 \log \frac{W}{W_r} \quad \text{(dB)}, \tag{7}$$

în care W este puterea sunetului în wați, iar W_r o putere de referință, egală cu 10^{-13} wați.

Este util de amintit pentru o mai bună apreciere a nivelelor acustice rezultînd din funcționarea aeronavelor, care se vor analiza în continuare, că urechea umană este capabilă să perceapă sunete într-o zonă extrem de largă de intensități, adică de la pragul inferior deja amintit de 10^{-16} w/cm^2, pînă la 10^{-2} w/cm^2 care reprezintă pragul perceperii dureroase, după care urmează efecte dăunătoare; aceasta înseamnă posibilitatea de adaptare la o gamă energetică extinsă pe 10^{14} ordine de mărime, performanță greu de atins chiar de cele mai perfecționate instrumente de măsură. Pe de altă parte, gama de puteri acustice produse în mediul ambiant, cu care urechea poate fi confruntată este, de asemenea, deosebit de vastă, variind de la 1×10^{-9} wați, care corespunde vorbirii în șoaptă, pînă la cei 2×10^8 wați ai rachetei Saturn V; este de remarcat că această putere enormă manifestată sub formă acustică reprezintă de abia cîteva procente din puterea mecanică totală produsă de sursa energetică de la care emană.

Din punctul de vedere al celeilalte proprietăți de bază a sunetelor, frecvența, este de notat că se ia în considerație gama de frecvențe perfect audibile, adică între 75 și 10.000 Hz., deși urechea poate distinge chiar între 20 și 20.000 Hz; sunetele între 1 000 și 4 000 Hz afectează cel mai puternic urechea (de trei ori mai mult decît acelea plasate mai sus sau mai jos față de aceste limite), iar între 5.000 și 10.000 Hz sunetele tind să fie direcționate, adică percepute sub forma unui fascicul de unde emanînd de la o sursă după o direcție precisă. Acest ultim amănunt va permite reducerea nivelului sonor prin direcționarea corespunzătoare a surselor, după cum se va vedea la paragraful destinat mijloacelor constructive de reducere a nivelului de zgomot generat de aeronave.

Analiza unui zgomot (respectiv a cauzelor care îl produc) presupune cunoașterea spectrului său, adică repartiția energiei sale în funcție de frecvență; aceasta se realizează cu ajutorul aparatelor de măsură care filtrează zgomotul în benzi de frecvență cu lățimea Δf (variabilă) măsurîndu-se apoi energia corespunzătoare fiecărei benzi de frecvență. Teoreme matematice permit să se afirme că suma energiilor măsurate în fiecare bandă este egală cu energia globală a semnalului:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}(f)\mathrm{d}f = \frac{1}{\rho a} p_{ef}^2. \tag{8}$$

În mod practic, pentru a se obține o precizie suficientă a măsurătorilor, fără a fi necesară o aparatură excesiv de scumpă, sau inutil de dificilă în manevrare, se alege $T = 0{,}5$ s pentru calculul lui p_{ef} din relația (3), iar

lăţimile de bandă Δf sînt de aproximativ 50 Hz pentru analizele foarte fine legate de cercetările privind amortizarea zgomotului.

Consideraţiile privind măsurarea energiei sonore nu reflectă însă şi răspunsul urechii, respectiv a organismului uman la zgomot; pentru acest motiv, Kryter a propus după apariţia primelor avioane cu reacţie, o nouă scară, cunoscută sub numele de PNdB (perceived noise decibel) realizată în urma a numeroase teste care au luat în consideraţie nivelul de jenă produs de un sunet de presiune acustică cunoscută, ambele avînd o frecvenţă de 1.000 Hz, [1]. Metoda de calcul pentru PNdB este destul de complicată, constînd din trei faze principale, [2]:

a) Se analizează semnalul sonor în treimi de octavă pentru 24 benzi de frecvenţă între 50 şi 1000 Hz, măsurîndu-se energia acustică corespunzătoare fiecăruia dintre ele; se determină apoi numerele (în Noys) corespunzătoare energiei E_k măsurate în banda de frecvenţă centrală f_k, cu ajutorul tabelelor definite prin reglementări internaţionale.

b) Se calculează parametrul N cu ajutorul relaţiei

$$N = 0{,}85\ n_k + 0{,}15 \sum_{k=1}^{k=24} n_k, \tag{9}$$

n_k fiind cea mai mare valoare a numerelor n_k găsite anterior.

c) Se determină PNdB cu ajutorul relaţiei

$$\mathrm{PNdB} = 40{,}0 + 33{,}3\ \log\ N. \tag{10}$$

Ca ilustrare se dă următorul exemplu: două avioane de pasageri, unul echipat cu motoare cu piston, iar celălalt cu motoare turboreactoare, dau acelaşi nivel de zgomot la sonometru: 104 dB; al doilea este considerat totuşi mai supărător, din cauza zgomotelor mai puternice la frecvenţe înalte, rezultînd în urma calculelor după metoda de mai sus 116 PNdB, în timp ce pentru primul rezultă doar 102 PNdB.

Unităţile dB definite prin relaţia de bază (5) şi considerate drept „liniare" dB(l) au fost supuse şi la alte interpretări, în funcţie de nivelul de zgomot şi condiţiile de percepere. Astfel, pentru nivele mai scăzute (pînă la 60 dB) se utilizează scara dB (A), pentru nivele medii (pînă la 80 dB) scara dB (B), pentru determinările cu ajutorul sonometrelor scara dB(D), corelarea lor cu PNdB fiind (aproximativ) următoarea:

$$\begin{aligned} \mathrm{dB(A)} &= \mathrm{PNdB} - 13;\ (\pm 4);\\ \mathrm{dB(D)} &= \mathrm{PN\ dB} - 7;\ (\pm 2),\\ \mathrm{dB(l)} &= \mathrm{PNdB} - 9;\ (\pm 4). \end{aligned} \tag{11}$$

Spectrul zgomotelor produse de aeronave conţin adesea frecvenţe discrete, de exemplu cele corespunzătoare rotaţiei suflantei, care constituie o jenă suplimentară pentru ureche; reguli internaţionale (ISO, OACI)

corijează valoarea lui PNdB în funcție de acestea, obținîndu-se TPNdB (tone corrected perceived noise dB):

$$\text{TPNdB} = \text{PNdB} + \text{corecția pt. frecvență discretă.} \tag{12}$$

O altă corecție ia în considerație durata zgomotului, aceasta fiind de asemenea, un parametru esențial al fenomenului, alături de intensitate, frecvență etc. Se obține astfel EPNdB (effective perceived noise dB), în urma determinării corecției de timp ΔN cu ajutorul relației, [2]:

$$\Delta N = 10 \log \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_2} 10^{N/10} \, dT - N_{max}, \tag{13}$$

unde $T_0 = 10$ s, sau, mai simplu,

$$\Delta N \cong 10 \log \frac{t_2 - t_1}{T_1}, \tag{14}$$

cu $T_1 = 20$ s, t_1 și t_2 determinîndu-se din fig. 1.

În fine, o ultimă corecție este dată de un alt parametru esențial în aprecierea nivelului de jenă produs de sursa de zgomot, și anume distanța față de aceasta; în figura 2 se prezintă această corecție (asimilată cu aceea de durată) în urma considerării mediilor statistice stabilite plecîndu-se de la măsurătorile efectuate asupra aeronavelor actuale, [2].

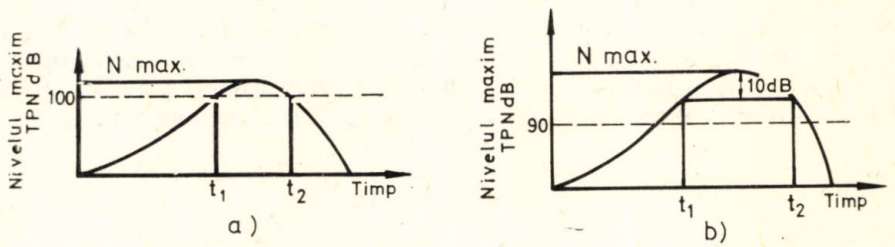


Fig. 1. — Schema determinării parametrilor care intervin în calculul lui TPNdB: a) TPNdB > 100; b) 100 > TPNdB > 90.

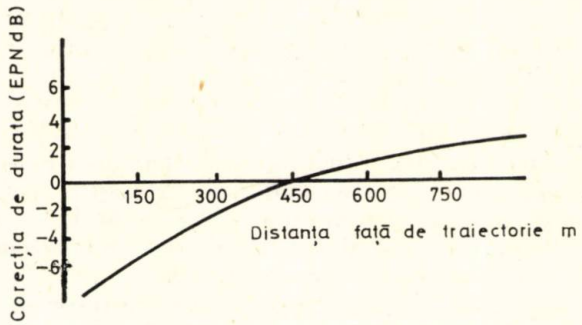


Fig. 2. — Corecția reprezentată de distanță (curba statistică corelată cu corecția de durată).

2. MECANISMUL DE PRODUCERE A ZGOMOTULUI DE CĂTRE GRUPURILE PROPULSOARE ALE AERONAVELOR ȘI MIJLOACELE CONSTRUCTIVE DE LIMITARE

În cazul aeronavelor, se disting trei surse principale de zgomot : grupul motopropulsor, zgomotele aerodinamice și cele datorate diverselor aparate și instalații anexe.

Zgomotele produse de motoare au două surse principale (analiza care urmează se referă la grupurile turboreactoare, deoarece acestea pun cele mai acute probleme, atît prin nivelul emisiilor sonore, cît și prin răspîndirea lor care nu face decît să se accentueze cu trecerea timpului) :

I) *Jetul de gaze* evacuate în atmosferă, care prin amestecul turbulent cu aerul înconjurător constituie sursa principală de zgomot, mai ales la viteze reduse ale aeronavei și putere ridicată a motoarelor (decolare). Lighthill a demonstrat că procesul de amestec turbulent constituie o sursă de zgomot cvadripol, diverși parametri funcționali intervenind cu următoarele ponderi asupra intensității nivelului de zgomot I, [3] :

$$I = f\left[\left(\frac{p_j}{p_0}\right)\left(\frac{v_j}{a}\right)^m (m_j v_j^2)\right];\ m = 5 \div 7, \tag{15}$$

p_j fiind presiunea jetului de gaze, p_0 presiunea mediului ambiant, v_j viteza jetului de gaze și m_j masa lor ; se poate constata cu ușurință că viteza jetului de gaze este factorul determinant în stabilirea nivelului de zgomot.

II) *Compresorul și turbina motorului.* Interacțiunea paletajelor cu fluxul de aer sau gaze în curgere turbulentă și cu siajul provocat de mișcarea lor, constituie o sursă permanentă de zgomot, care, datorită existenței pereților solizi, este un dipol. Și în acest caz viteza este parametrul esențial, dar ponderea cu care intervine este funcție de construcția și puterea motorului, diferind față de aceea întîlnită în cazul jetului reactiv, intensitatea nivelului de zgomot avînd în acest caz forma generală :

$$I = f\left(\frac{p_t}{a^3}\, v_r^6\right), \tag{16}$$

în care p_t este presiunea pe o treaptă, iar v_r viteza relativă a venei de fluid.

În figura 3 se prezintă principalele surse de zgomot ale motorului turboreactor cu dublu flux, precum și curbele caracteristice reprezentînd nivelul și orientarea efectelor sonore, [3].

Se constată că principalele surse de emisii sonore se prezintă sub forma unor arce de cerc, cu o înclinare de 30—40° față de axa motorului pentru jetul de gaze evacuate, și înclinări mai mari pentru turbină și aerul de diluție (by-pass) ; toate acestea sînt orientate spre spatele motorului datorită direcției de curgere a fluxului de aer și gaze. La rapoarte mari de diluție, emisia sonoră datorită aerului suplimentar este comparativ mai mare, apropiindu-se de aceea datorată turbinei.

Zgomotul produs de intrarea aerului în compresor se transmite sub forma unui arc de cerc îndreptat spre partea anterioară a motorului, sub un unghi de 50—60° față de axa acestuia. În fine, pentru completarea

tabloului este de semnalat și radiația sonoră datorită carcasei motorului, care este redusă ca intensitate în comparație cu acelea amintite anterior, și perpendiculară pe axa motorului.

La puteri scăzute ale motorului se constată două vîrfuri de maximum, corespunzînd turbinei și zgomotului compresorului îndreptat spre partea

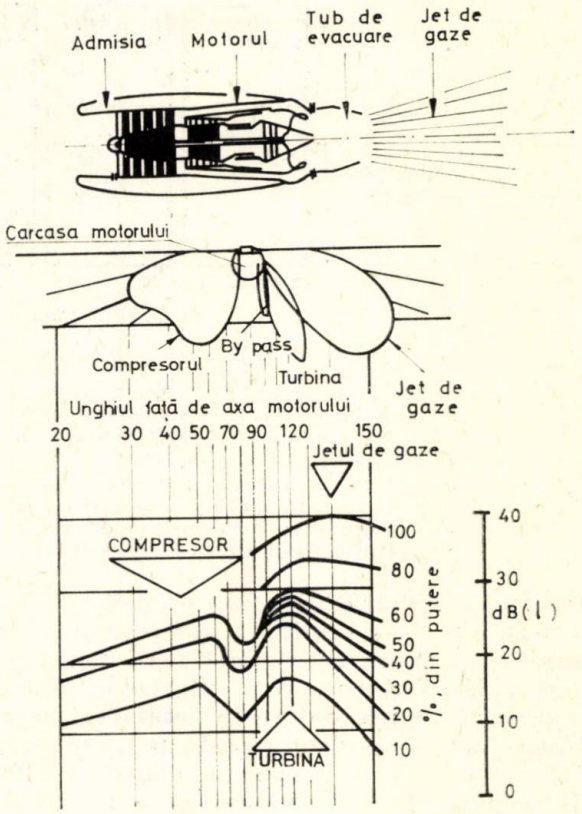


Fig. 3. — Spectrul emisiilor sonore pentru un motor turboreactor și mărimile lor relative în funcție de procentajul de putere (raport de diluție 1 ; 7.500 Kgf tracțiune).

anterioară a motorului ; acestea se identifică prin analiza spectrală a sunetului divizat în benzi înguste de frecvență și prin compararea frecvențelor tonurilor discrete cu numărul de palete corespunzătoare diverselor trepte ale compresorului turbinei. Pe măsură ce puterea motorului crește, emisiile sonore corespunzătoare compresorului turbinei se intensifică în conformitate cu legea de variație redată prin relația (16), iar aceea corespunzătoare jetului reactiv crește, de asemenea, în conformitate cu relația (15), deci cu viteza la puteri mai mari, devenind astfel predominantă, după cum se poate remarca și din figura 3.

Este de reținut că valoarea maximă a nivelului sonor se găsește întotdeauna în partea din spate a motorului ; la puteri mari predomină efectul jetului reactiv, iar la puteri scăzute zgomotul turbinei este mai puternic decît acela al compresorului ; totuși, în cazul utilizării unor suflante mari, cota parte de zgomot transmis de acestea în partea anterioară, crește considerabil.

Evoluția concepției constructive pentru turboreactoare a condus la schimbarea proporțiilor între emisiile diverselor surse, motorul reprezentat în figura 3 aducînd deja unele progrese față de motorul turboreactor cu simplu flux. În figura 4 se redau comparativ nivelele sonore ale diverselor tipuri de motoare turboreactoare cu dublu flux, putîndu-se

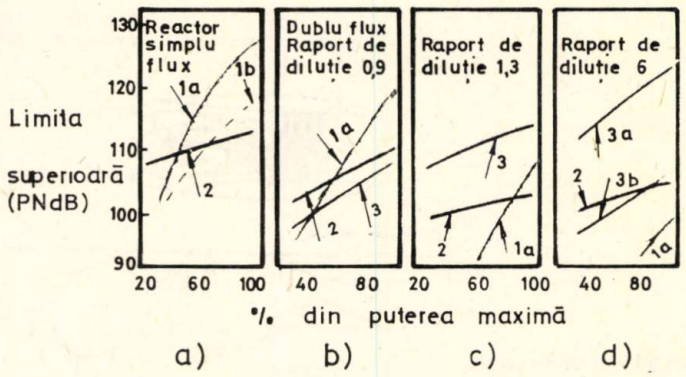


Fig. 4. — Comparație între nivelul emisiilor sonore ale turboreactoarelor : *a*) Turboreactor cu simplu flux ; *b*) Turboreactor cu dublu flux (raport de diluție scăzut) ; *c*) Turboreactor cu raport de diluție mediu ; *d*) Turboreactor cu raport de diluție ridicat ; 1a : nivelul sonor al jetului reactiv fără atenuator ; 1b : jetul reactiv cu atenuator ; 2 : turbina ;3 : suflantă mică sau mijlocie ; 3a : suflantă pentru debite ridicate în două trepte și cu ajutaje de ghidare la intrare ; 3b : suflantă pentru debite ridicate, cu o singură treaptă și fără ajutaje la intrare.

remarca o îmbunătățire față de motorul reactor cu simplu flux (fig. 4*a*) ca rezultat a doi factori : a) creșterea raportului de diluție, ceea ce înseamnă antrenarea unor mase tot mai mari de aer repartizate pe o suprafață mai vastă, deci obținerea unui nivel energetic al motorului cel puțin egal, însă cu viteze mai reduse ale jetului reactiv, rezultînd în conformitate cu relația (15) un nivel considerabil redus pentru emisiile sonore fără utilizarea vreunui atenuator de zgomot, soluție care antrenează întotdeauna pierderi de randament pentru motor ; acest proces de ameliorare este însă limitat de creșterea considerabilă a nivelului de zgomot datorat suflantei (fig. 4*c* și 4*d*) mase tot mai mari de aer însemnînd o viteză tot mai mare a fluxului de aer prin aceasta, cu rezultatul indicat de relația (16) ; pentru un raport de diluție egal cu 6, rezultatul numai este o ameliorare, ci o înrăutățire. În această situație intervine factorul b) : suprimarea ajutajelor de ghidare la intrarea în suflantă și utilizarea pentru aceasta a unei singure trepte (ceea ce este posibil pentru rapoarte de diluție de $3 \div 4$). Acest efect se explică prin suprimarea interacțiunii dintre paletele ventilatorului și ajutajele de intrare, sursă de emisii sonore de frecvență înaltă, deci extrem de supărătoare. Rezultatul general este o scădere a nivelului de zgomot atît de pronunțată, încît turboreactoarele cu dublu flux construite după concepția expusă mai sus sînt mai silențioase decît oricare alt tip de motor, fără utilizarea vreunui gen de atenuator, deci fără a se micșora în vreun fel eficiența motorului.

Soluțiile luate în considerare pentru reducerea nivelului sonor al turboreactorului cu dublu flux și raport mare de diluție, care, datorită

avantajelor funcționale pe care le prezintă, se află în centrul atenției constructorilor de aeronave, nu se limitează doar la cele expuse mai sus. Astfel, SNECMA a propus și experimentează trei configurații diferite pentru tuburile de evacuare, reprezentate schematic în figura 5 și suscepti-

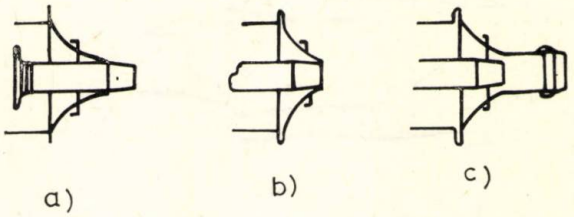


Fig. 5. — Configurații pentru sistemul de evacuare ale turboreactoarelor cu dublu flux și raport mare de diluție : *a*) fluxuri separate, cu tubul primar prelungit ; *b*) fluxuri separate cu tuburi de evacuare coplanare ; *c*) fluxuri combinate, cu conducta primară scurtată.

bile de a conduce la o reducere a nivelului sonor cu 4÷5 dB, prin reducerea turbulenței în zona de amestec, [7].

Încercările realizate de NASA prin utilizarea a trei carcase cilindrice concentrice în zona de admisie a suflantei (după cum s-a văzut, regiune critică pentru emisiile poluante sonore în cazul rapoartelor de diluție ridicate) și a materialelor insonorizante pe pereții interiori ai acestora și ai tubului de ejecție, lasă să se întrevadă posibilitatea de a nu se depăși 90 EPNdb pentru avioanele subsonice, ceea ce ar justifica reechiparea a circa 3000 de avioane de transport cu noul tip de grup motopropulsor, [7].

O construcție ultrasilențioasă a fost anunțată de Rolls-Royce, și constă dintr-un motor turboreactor cu trei arbori concentrici, suflanta fiind prevăzută cu pas variabil, iar turbina cu patru trepte, [3], [8]. Cea de-a patra treaptă a turbinei va determina o reducere sensibilă a vitezei de ejecție a gazelor, deci a intensității sonore a jetului, în conformitate cu relația (15), iar pasul variabil al suflantei antrenate cu viteză mică de rotație va determina o scădere a nivelului sonor atît anterior cît și posterior, în condițiile unui raport de diluție ridicat.

3. ZGOMOTUL AERODINAMIC ȘI OBOSEALA SONORĂ

Zgomotul aerodinamic ia naștere în stratul-limită de pe învelișul avionului, ca urmare a turbulenței care apare în urma scurgerii rapide a aerului și care produce fluctuații de presiune materializate în micro-oscilații ale elementelor constituind învelișul aeronavei ; aceste micro-oscilații produc unde sonore acoperind o vastă gamă de frecvențe, și cu un nivel de intensitate care poate atinge 170 dB, în funcție de viteza de deplasare și condițiile meteorologice în care are loc zborul. Aceste efecte sonore produc nu numai jenă pentru pasageri, dar afectează (alături de cele produse de grupurile motopropulsoare) însăși structura avionului, mai ales cînd coincid cu frecvențele proprii ale diverselor părți componente, stimulîndu-le oscilațiile ; se ajunge astfel la „oboseala sonică", care nu odată a condus la ruperi ale învelișului sau părților componente principale ale aeronavei, deși mai puțin de 1 % din lucrul mecanic al jetului de gaze este transformat în energie acustică.

Răspunsul aeronavei faţă de oscilaţiile acustice nu a fost pînă în prezent suficient clarificat, dată fiind gama lor largă de frecvenţe şi complexitatea generală a fenomenului; se recurge în consecinţă la intense verificări experimentale ale diverselor părţi componente şi ale întregii

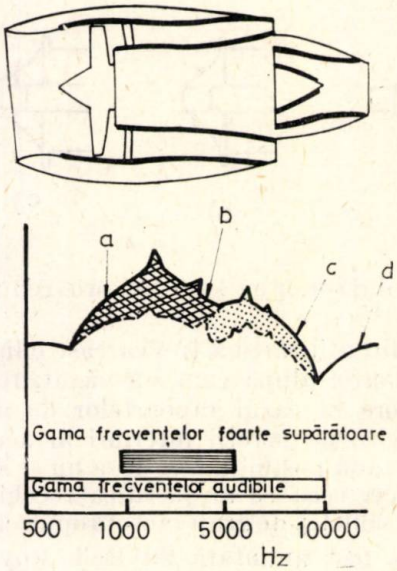


Fig. 6. — Reducerea nivelului de emisii sonore la motorul RB 211, prin utilizarea materialelor fonoabsorbante; *a*) zgomotul suflantei; *b*) zgomotul unor subansamble principale; *c*) zgomotul produs de turbină; *d*) zgomotul produs de jetul reactiv.

structuri (încercările în zbor rămînînd criteriul cel mai sigur) urmînd rigidizarea construcţiei în părţile găsite mai expuse la oboseala sonică. Utilizarea materialelor fonoabsorbante, pe lîngă soluţiile constructive care conduc la diminuarea nivelului de emisii sonore, constituie o soluţie indicată pentru mărirea rezistenţei la oboseala acustică. În figura 6 se prezintă efectul obţinut prin aplicarea acestei soluţii la motorul Rolls-Royce RB 211.

4. EFECTUL CONSTRUCŢIILOR SPECIALE ASUPRA NIVELULUI DE EMISII SONORE

Tipurile de aeronave, care prin construcţia şi performanţele lor deosebite conduc la aspecte noi (şi în sensuri opuse) în legătură cu nivelul emisiilor sonore pe care le provoacă, sînt: avioanele supersonice de transport (SST) şi avioanele cu decolare şi aterizare scurtă sau verticală (STOL şi VTOL).

Dat fiind că motoarele avioanelor supersonice sînt mai puternice, construcţia în sine are o greutate mai mare, iar viteza de deplasare este mult sporită, rezultă de la sine o agravare a problemelor legate de poluarea sonoră. În figura 7 se prezintă o comparaţie între spectrul emisiilor sonore la decolare pentru un avion de transport supersonic, şi un avion de transport subsonic, [1].

În vederea reducerii nivelului de emisii sonore în cazul avioanelor SST, s-a recurs la diverse soluţii dintre care cele mai eficiente sînt: a) utilizarea unor motoare cu surplus de putere, ceea ce permite: decolarea fără

a se utiliza întotdeauna puterea maximă, viteza gazelor fiind astfel micșorată și odată cu ea intensitatea zgomotului, cîștigarea rapidă de înălțime deci îndepărtarea de zonele locuite și atingerea unei viteze de deplasare mari în timp scurt, ceea ce reduce viteza relativă a gazelor față de mediul

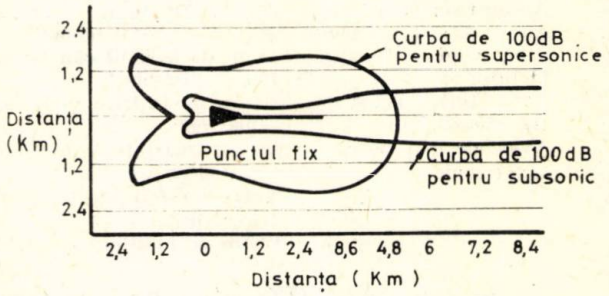


Fig. 7. — Spectrele sonore la decolare pentru două avioane de transport: supersonic și subsonic.

înconjurător deci gradul de turbulență al amestecului și a zgomotului; b) soluții constructive specifice acestui tip de aeronave: dotarea motoarelor cu prize de aer cu geometrie variabilă și de lungime foarte mare (circa 7 m la proiectul SST Lockheed) ceea ce conduce la o reducere a intensității zgomotului cu 10 ... 15 dB.

Aeronavele cu decolare și aterizare scurtă și verticală au raportul tracțiune/greutate considerabil mai mare dect al avioanelor cu decolare și aterizare convențională (CTOL) rapoarte de diluție mari și viteze reduse la vîrful paletelor compresorului (< 30 m/s) și de evacuare (< 275 m/s) ceea ce le face mult mai silențioase (cu 20 ... 25 PNdB) în comparație cu avioanele CTOL, [9], [10]. În figura 8 se prezintă comparativ nivelul de zgomot al avioanelor CTOL, STOL și VTOL, putîndu-se observa avantajul cert pe care îl prezintă acestea din urmă.

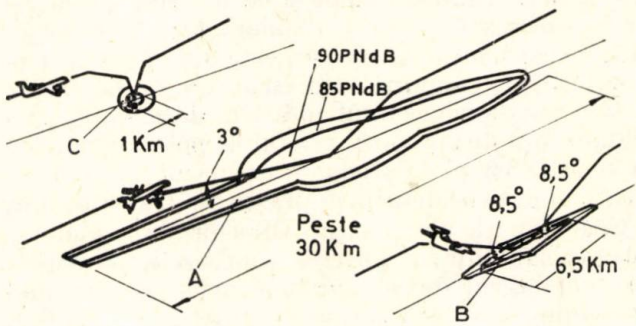


Fig. 8. — Zonele cuprinse în interiorul curbei de 90 PNdB corespunzătoare diverselor tipuri de aeronave: *a*) CTOL: 77 km²; *b*) STOL: 5 km²; *c*) VTOL: 0,6 km².

5. CONSIDERAȚII ASUPRA LIMITĂRII POLUĂRII SONORE PRODUSE DE AERONAVE

Limitarea nivelului emisiilor sonore ale aeronavelor a constituit și constituie obiectul unor reglementări tot mai bine conturate, rezultat al cercetărilor multilaterale întreprinse în acest scop, acustice, mecanice, fiziologice, psihologice și economice. În tebela de mai jos se redau cîteva exemple de nivele acceptate pentru emisiile sonore ale aeronavelor (reglementări FAA), în comparație cu nivelele admise pentru alte surse de poluare sonoră.

Sursă sonoră	Condiţiile de estimare	nivelul acceptat
Motoretă (50÷125 cm³)	7,5 m distanţă, 75% putere	76 ENdB
Autoturism (4 viteze)	7,5 m, 75% putere, viteza II	83 ENdB
Autocamion (> 3 tone)	idem	90 ENdB
Tren rapid	15 m de la axul căii ferate	96 ENdB
Helicopter	150 m distanţă	87 ENdB
Avion turboreactor cu simplu flux	300 m de la traiectorie la tracţiune maximă	109 ENdB
Avion de transport supersonic	La aterizare, 1600 m de la marginea pistei	109 ENdB
	Rulaj la sol şi decolare, 500 m de la axul pistei	116 ENdB
	Luare de înălţime, 5 km de la punctul fix	105 ENdB

Indicele de zgomot (IZ) este o noţiune care ia în consideraţie factorii susceptibili de a determina gradul de jenă pe care îl produc emisiile sonore asupra organismului uman; într-adevăr, cercetările complexe întreprinse în această direcţie au scos în evidenţă că nu numai intensitatea propriu-zisă a zgomotului determină gradul de poluare, ci şi frecvenţa cu care se repetă zgomotul. Analiza statistică a corelaţiilor dintre jena produsă de zgomot şi intensitatea acestuia, precum şi frecvenţa cu care se repetă, a condus la definirea indicelui de zgomot cu ajutorul următoarei relaţii, [4]:

$$IZ = \text{Media zgomotului de vîrf (PNdB)} + 15 \log N - 80, \quad (17)$$

N fiind numărul de zboruri ale aeronavelor.

Indicele de zgomot astfel definit este utilizat ca unitate de măsură pentru aprecierea gradului admisibil de poluare sonoră în apropierea aeroporturilor şi pentru aprecierea situaţiei în viitor.

Energia sonoră totală completează parametrul propus pentru aprecierea gradului de afectare a organismului uman şi se bazează pe corespondenţa directă dintre jena încercată şi energia sonoră totală recepţionată de subiect; se acceptă, de asemenea, că aceasta este direct proporţională cu puterea motoarelor şi invers proporţională cu viteza de deplasare a aeronavei. Se poate astfel completa acceptul indicelui de zgomot, precizîndu-se că la o distanţă dată faţă de aeroport, gradul de poluare va avea o variaţie liniară cu: a) densitatea populaţiei; b) numărul zborurilor; c) factorul de traiectorie care ia în consideraţie împrăştierea traiectoriilor, înălţimea, disiparea acustică (funcţie de poziţia surselor de zgomot şi condiţiile atmosferice); d) raportul dintre puterea motoarelor şi viteza de deplasare a aeronavei; e) factorul de conversiune acustică, corelînd energia acustică radiată în timpul luării de înălţime cu puterea motoarelor.

Indicele de poluare sonică (IPS) se poate defini astfel în final ca fiind efectul global al principalilor parametri implicaţi:

$$IPS = C + 10 \log (\text{densitate populaţie}) + 10 \log (\text{putere totală desfăşurată zilnic}) + 10 \log (\text{factor conversiune acustică}) + 10 \log (\text{raportul putere/viteză}) + 10 \log (\text{factorul de traiectorie}). \quad (18)$$

Constanta C variază în funcţie de condiţiile locale; s-a utilizat forma logaritmică deoarece corespunde definiţiei unităţii de măsură — decibelul — adică de zece ori logaritmul nivelului energetic. Fiecare dintre parametrii compunînd relaţia (18) se poate studia în mod separat, orice modificare

putîndu-se exprima în decibeli ; astfel, dacă se dublează puterea dezvoltată zilnic, ceilalți parametrii rămînînd constanți, indicele de poluare sonoră în regiunea considerată crește cu : 10 log 2 = 3 PNdB.

CONCLUZII

Cercetările teoretice și experimentale deosebit de vaste inițiate în ultimul timp cu privire la cunoașterea mecanismului de producere a efectelor și mijloacelor de limitare a emisiilor poluante produse de aeronave, au reliefat lipsa unor modele matematice bine definite privind stabilirea nivelului exact de emisii în funcție de factorii implicați, ceea ce face dificilă utlizarea modelelor (mai ales în studiul poluării sonore). Rezultă necesitatea imperioasă a continuării cecetărilor în această direcție, dublate de estimări experimentale atît în vederea controlării rezultatelor, cît și pentru perfecționarea tehnicii măsurătorilor în acest domeniu, care este de asemenea susceptibilă de îmbunătățiri.

În țara noastră, activitatea în acest domeniu inițiată în cadrul IMFCA, INCREST și altor instituții departamentale, a condus la obținerea unor rezultate utile, [11], [12], [13] ; dezvoltarea cercetărilor pe multiple planuri în continuare, va permite realizarea unor construcții aerospațiale competitive pe plan internațional și din punctul de vedere al unor efecte poluante reduse, factor de o actualitate tot mai acută.

Primită la redacție la 6 iulie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. N. Shapiro, Sh. Edwars, *Noise and the SST*, Aircraft Engineering, *2* (1967).
2. Y. Couillard, *Unités de mesure dans l'acoustique aéronautique*, L'Astronautique et l'Aéronautique, *8*(1971).
3. F.B. Greatex, R. Bridge, *The Evolution of the Engine Noise Problem*, Aircraft Engineering, *2* (1967).
4. E.Y. Richards, *Aircraft Noise — Mitigating the Nuisance*, Aircraft Engineering, *2* (1967).
5. V.L. Blumenthal, Y.M. Streckenbach, R.B. Tate *Aspecte legate de avioane și mediu*, Journal of Aircraft, *10* (1973).
6. L.L. Beranak *Noise and Vibration Control*, McGraw-Hill Book Co. New York, 1971.
7. Air et Cosmos, *464* (1973).
8. Air et Cosmos, *472* (1973).
9. Interavia, *9* (1969).
10. Aircraft Engineering *11*, (1971).
11. C. Teodorescu — Țintea, *Efecte acustice datorite jeturilor de gaze*, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată tom **30**, nr. *1*, 1971.
12. Al. Nica ,Ioana Pîrvulescu — Gheța, P. Jivan, *Cercetări asupra emisiilor poluante ale turbomotoarelor de aviație*, Lucrare internă, I.M.F.C.A., București, 1974.
13. Șt. Ispas, C. Țurcanu, Al. Nica, P. Jivan, *Considerații asupra posibilităților de limitare a emisiilor poluante generate de aeronavele moderne*, Comunicare la Sesiunea Științifică a Academiei Militare, București. 1974.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA REALIZĂRII UNUI JET CU GRADIENT TRANSVERSAL CONSTANT AL VITEZEI MEDII

de V. TOMA, CAMELIA CRISTEA şi ŞT. N. SĂVULESCU
I.M.F.C.A.

Autorii prezintă rezultate experimentale privind realizarea unui jet de scară mare (secţiune 0,12 m²) cu gradient transversal constant al vitezei medii $\frac{dU}{dy} = 24s^{-1}$. Metoda utilizată se referă la efectele combinate ale unei baterii de ventilatoare axiale şi ale unei grile cu permeabilitate neuniformă adaptată scopului. De asemenea, sînt date consideraţii asupra structurii curgerii turbulente relative la omogenitatea şi izotropia locală în prezenţa unui gradient de viteză impus.

1. INTRODUCERE

Problema realizării unei curgeri cu gradient transversal al vitezei constant a devenit importantă în ultimii ani [1]; [2]; [3] atît pentru teoreticieni, cît şi pentru experimentatorii din mecanica fluidelor.

Teoretic, gradientul transversal constant asigură o turbulenţă omogenă şi eventual local izotropă, ceea ce reprezintă un pas faţă de cazul cel mai simplu al turbulenţei omogene şi izotrope fără frecare. Practic, realizarea unui profil de viteze $U(y) \approx \left(\frac{dU}{dy}\right) \cdot y$ controlabil permite studiul difuziei turbulente, simularea stratului-limită atmosferic precum şi cercetarea efectelor gradientului transversal asupra diverselor sonde de măsură.

Obligînd un curent de aer, care în mod natural la scară mare are $U = \text{const.}$, să aibă în mod artificial gradientul $\frac{dU}{dy}$ ne izbim fără îndoială de mari dificultăţi practice. Cele mai evidente sînt legate de

— valoarea şi acurateţea gradientului $\left(\frac{dU}{dy}\right)(y)$ într-o secţiune a curgerii;

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

— dimensiunea curgerii în care avem $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)(x, z) = \text{const.}$,

— structura curgerii artificiale realizată astfel ca să fie cît mai apropiată de cea naturală.

Dacă primele două aspecte au fost tratate mai pe larg în lucrările citate, care conţin diverse soluţii tehnice pentru îndeplinirea lor, în schimb similaritatea de structură n-a fost după opinia noastră atacată în profunzime. Problema care se ridică se poate formula astfel : ce fel de modalitate practică de realizare a primelor două condiţii permite o optimă similaritate de structură?

În lucrarea de faţă se prezintă atît o metodă de realizare a curgerii cu gradient transversal într-un jet de scară mare, cît şi consideraţii asupra structurii curgerilor cu gradient transversal constant. În stadiul actual al cercetării noastre accentul cade, în special, pe realizarea curgerii libere cu gradient transversal constant.

2. INSTALAŢIA EXPERIMENTALĂ ŞI METODA DE REALIZARE A UNEI CURGERI LIBERE CU GRADIENT TRANSVERSAL CONSTANT

Instalaţia experimentală utiliztă a fost descrisă într-o altă lucrare [1]. Este vorba în esenţă de o suflerie acţionată de patru ventilatoare care furnizează în convergentul final prin secţiunea de ieşire de 0,3 m × × 0,45 m un curent de aer pe care l-am denumit jet de ieşire. O schemă a instalaţiei este arătată în figura 1.

Asupra acestui jet de ieşire s-au concentrat eforturile de a realiza un gradient transversal al vitezei contrabil. Este limpede că funcţionarea numai a unor ventilatoare va produce un jet de ieşire cu distribuţie neuniformă a vitezei. Acest lucru este reprezentat în figura 2, care redă profile de viteză în secţiune de ieşire obţinute atunci cînd funcţionează numai cele două ventilatoare de sus.

Cu toate că s-a obţinut un gradient transversal important calitatea curgerii lasă mult de dorit prin neuniformitatea repartiţiei vitezelor. De aceea a fost necesară introducerea unui al doilea mijloc de influenţare a curgerii printr-un perturbator-grilă, plasat la începutul convergentului. Numeroase încercări experimentale au condus la realizarea unei permeabilităţi variabile în secţiunea perturbatorului, aşa după cum se vede în figura 3. Pe aceeaşi figură sînt redate şi distribuţiile de viteză obţinute în acest caz şi se remarcă o ameliorare sensibilă a acestora. Deci, efectul combinat al bateriei de ventilatoare cu funcţionare parţială şi al perturbatorului cu permeabilitate variabilă constituie o metodă de realizare a unei curgeri libere cu gradient transversal controlabil. Pentru a avea o idee despre valoarea gradientului transversal constant obţinut, prezentăm în tabelul de mai jos realizările experimentale cunoscute la sfîrşitul anului 1973.

Există şi alte proiecte de realizare a curgerilor cu gradient transversal mare $\left(\frac{dU}{dy} = 45 \text{ s}/^{-1}\right)$ /3/ utilizînd metoda interacţiunii unor jeturi plane de intensităţi diferite sau perturbatoare spaţiale cu permeabilităţi controlate local. Omogenitatea structurii turbulente rămîne însă o pro-

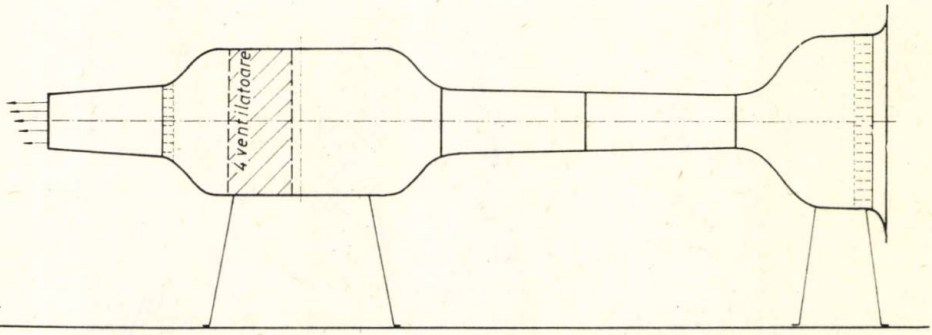


Fig. 1

blemă deschisă, deoarece prezenţa gradientului transversal produce un transport convectiv al impulsului prin fluctuaţii turbulente, astfel că structura locală a curgerii este în principiu nestabilizată.

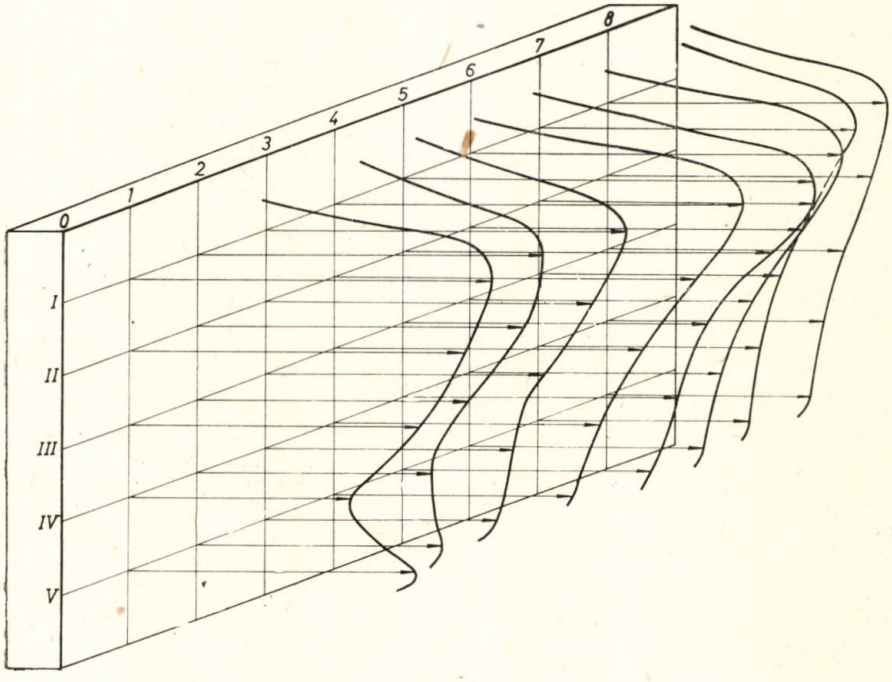


Fig. 2

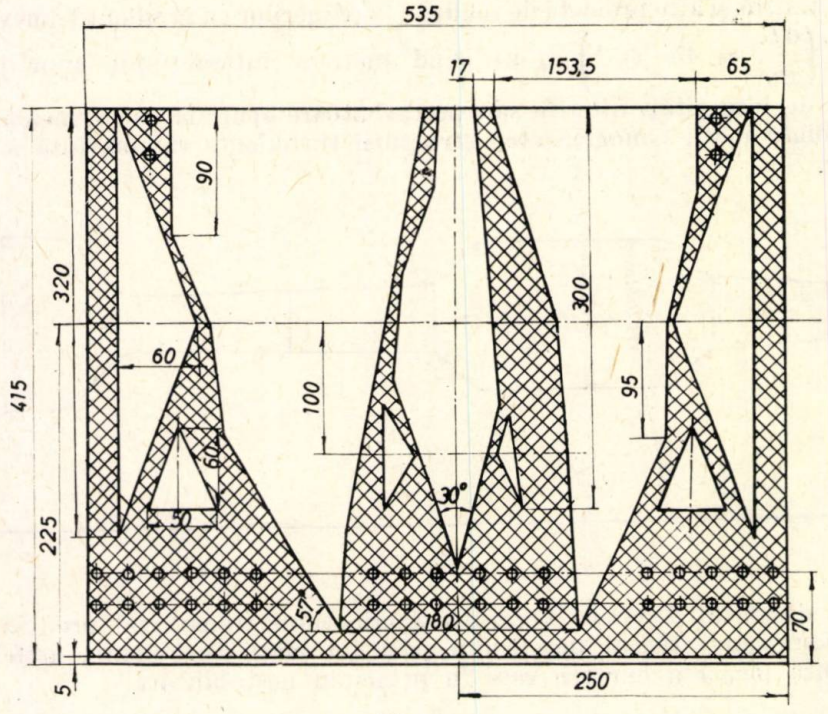

535
17
153,5
65
90
320
300
60
100
95
415
60
30
30°
225
57°
180
70
5
250

Fig. 3 *a*

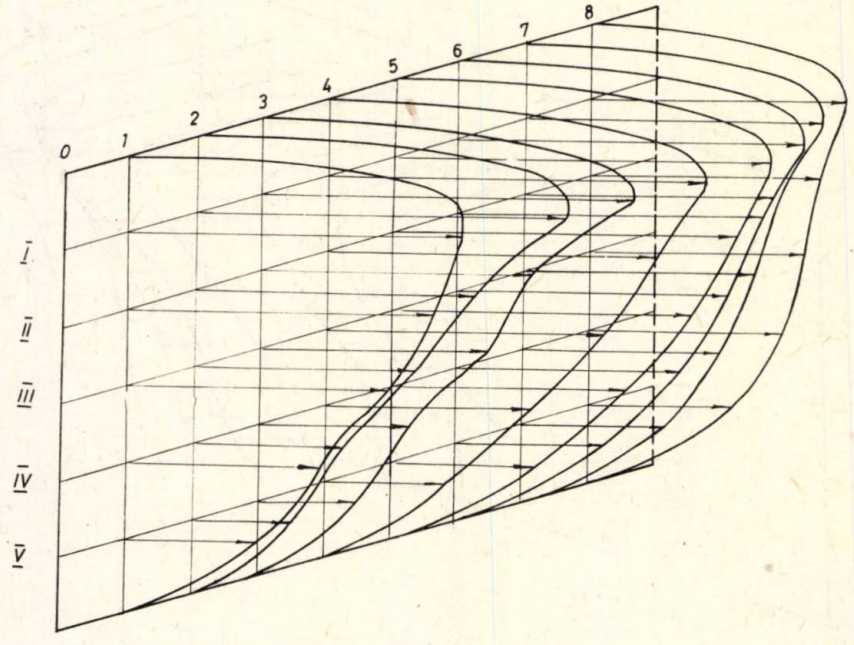

0
1
2
3
4
5
6
7
8
I
II
III
IV
V

Fig. 3 *b*

Configurația curgerii	Valoarea gradientului transversal $\left(\frac{dU}{dy}\right)$ s^{-1}	Zona utilă mm	Bibliografie
Canal cu perturbator format din opt plăci suprapuse între care aerul curge întîmpinînd rezistențe diferite în fiecare din cele șapte canale formate între plăci.	12,9	$300 \times 300 \times 100$	[2]
Canal cu perturbator format din grile cu bare rotunde neuniform distanțate între ele	13,6	$300 \times 300 \times 100$	[2], [3]
Jet de ieșire dintr-un convergent cu perturbator avînd permeabilitate adecvată.	24	$400 \times 300 \times 100$	[1]

3. CONSIDERAȚII ASUPRA STRUCTURII CURGERILOR CU GRADIENT TRANSVERSAL CONSTANT AL VITEZEI MEDII

În acest paragraf vom analiza compatibilitatea dintre proprietățile de omogenitate și izotropie locală ale fluctuațiilor turbulente și existența unui gradient de viteză medie constant al curgerii examinate. După cum s-a arătat într-o serie de lucrări ale ultimului autor, de exemplu [4], straturile cu frecare caracterizate printr-un gradient transversal al vitezei au proprietatea de a întreține fluctuații la numere Reynolds mari. O măsură a cîmpului de fluctuații corespunzător unui strat de frecare cu viteza $U(y)$ și grosimea δ este dată de banda cuprinsă între distribuția de energie medie $U^2(\eta_0)$ și distribuția transformată $(U^2)^*(\eta_2)$, unde $\eta_0 = y/\delta$ și $\eta_2 = \int_0^y U^2 dy \Big/ \int_0^\delta U^2 dy$. Se știe că un strat de frecare natural (strat-limită, jet, dîră, curgere dezvoltată prin conducte sau canale) prezintă gradienți transversali al vitezei $\frac{\partial U}{\partial y} = f(y)$, care nu sînt în general constanți în secțiune datorită efectelor combinate ale presiunii longidutinale, aderenței la perete și forțelor inerțiale. Or, din formularea integro-diferențială a ecuațiilor Navier-Stokes pentru astfel de straturi s-a dedus formula:

$$\widetilde{u_i' u_j'} = K_{ij}(x, z) \cdot (E^* - E)^{\alpha_{ij}} \cdot (\eta_0 - \eta_2)^{\beta_{ij}} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^{\gamma_{ij}}, \qquad (3.1)$$

unde

$E(\eta_0) = \frac{\rho}{2} U^2$ reprezintă energia cinetică medie,

E^* — este transformata lui E în funcție de η_2,

α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} — sînt parametri constanți,

K_{ij} — un coeficient care caracterizează local dezvoltarea stratului cu frecare.

Această formulă arată clar [4] puternica neomogenitate și anizotropie a curgerilor cu frecare naturală. Prima problemă care se ridică acum este aceea a valabilității acestui criteriu de caracterizare a curgerilor naturale aplicat curgerilor cu gradient transversal constant realizate artificial. Acest criteriu permite a aprecia comportarea turbulentă naturală a curgerilor cu gradient transversal prin considerarea legăturii dintre viteza medie și fluctuațiile corespunzătoare date de formula de mai sus [4]. Vom aplica relația (3.1) curgerii cu gradient de viteză constant $\frac{dU}{dy} = 12{,}5\ s^{-1}$ din lucrarea [2].

În figura 4 redăm rezultatele experimentale în comparație cu cele teoretice.

Cu excepția punctelor de la $y/h = 0{,}8$ pentru $X/h = 8{,}5$ și $y/h = 0{,}17$ pentru $X/h = 10$ nu se poate trage concluzia unei complete absențe a efectelor de structură naturală în prezența gradientului de viteze creeat artificial. Totuși, se poate remarca tendința spre omogenitate între secțiunile $X/h = 8{,}5$ și $X/h = 10$. Deci, efectul gradientului de viteză transversal începe să se piardă treptat, făcînd loc unei structuri turbulente omogene dar numai pentru o anumită zonă începînd de la secțiunea terminală a perturbatorului unde s-a luat originea $X/h = 0$ (a se vedea fig. 4).

Examinînd mai îndeaproape această figură se observă asemănarea dintre distribuția de viteze artificială și un profil foarte „plin" natural, la care maximum fluctuațiilor longitudinale apare lîngă perete [4], adică exact regiunea care în cazul de față nu a fost cercetată experimental, nefiind importantă. Pentru a avea însă fluctuații mari în regiunea centrală la canalului este necesară mărirea gradientului transversal. Aceasta este în fond rațiunea pentru care s-a realizat în cazul nostru într-un jet de ieșire un gradient transversal aproximativ dublu față de cel din lucrarea [2] arătat în figura 4.

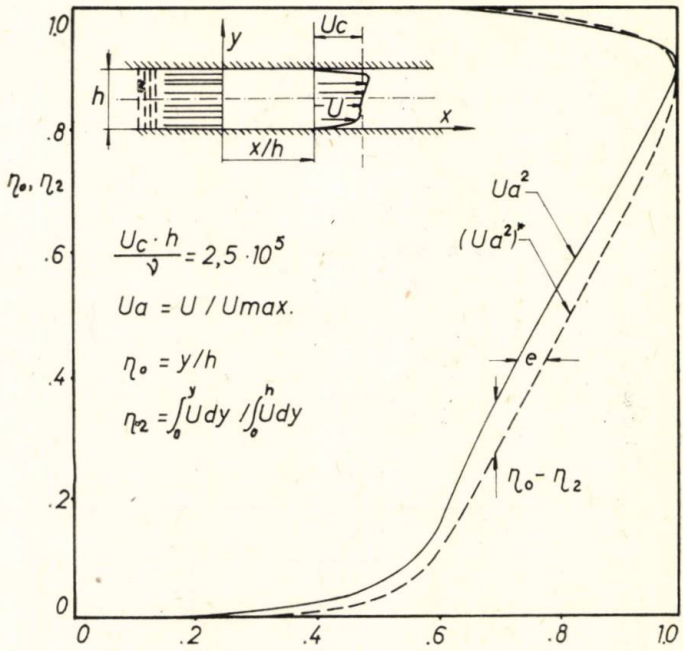
Este interesant de aplicat criteriul exprimat de formula (3.1) și asupra corelațiilor $\widetilde{u'v'}$; avem conform cu [4]

$$\widetilde{u'v'} = \nu K(\eta_0 - \eta_2)\frac{\partial U}{\partial y},$$

de unde deducem final, utilizînd datele experimentale din [2],

$$K = \frac{U_c h}{\nu} \cdot \frac{1}{dU_a/d\eta_0} \cdot \frac{\widetilde{u'v'}/U_c^2}{(\eta_0 - \eta_2)} = 7{,}91.10^5 \frac{\widetilde{u'v'}/U_c^2}{(\eta_0 - \eta_2)}.$$

În figura 4 s-a trasat K în funcție de η_0 și, spre deosebire de comportarea naturală se observă creșteri spre pereții canalului. În schimb, zona centrală $0{,}2 > \eta_0 > 0{,}8$ arată într-adevăr K aproximativ constant. O netă deosebire față de comportarea naturală o arată însă valorile absolute ale lui K care în acest caz sînt aproximativ de 5 ori mai mici decît cele prevăzute teoretic și verificate în alte cazuri [4]. Este limpede că transferul de impuls datorit fluctuațiilor turbulente între straturile vecine reprezintă


1.0
.8
.6
.4
.2
0
η₀, η₂
y
Uc
h
U
x
x/h
Uc · h / ν = 2,5 · 10⁵
Ua = U / Umax.
η₀ = y/h
η₂ = ∫₀ʸ Udy / ∫₀ʰ Udy
Ua²
(Ua²)*
e
η₀ - η₂
0
.2
.4
.6
.8
1.0

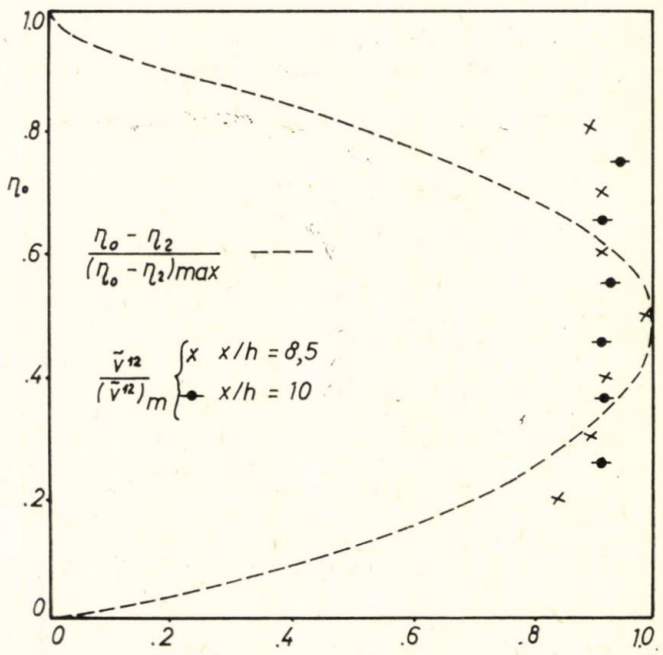
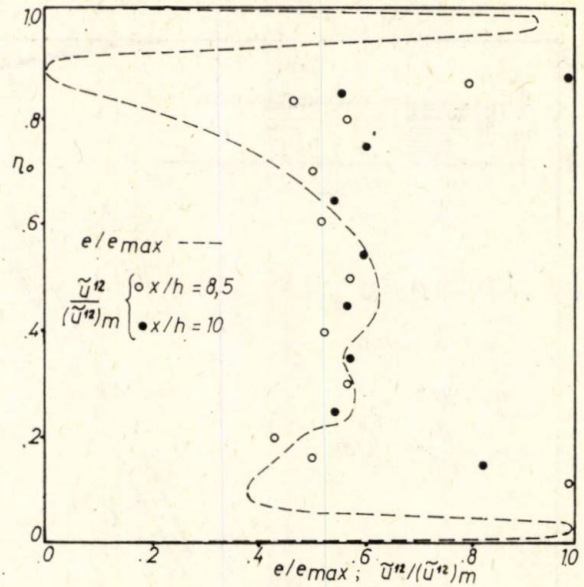
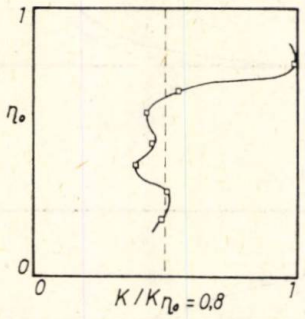

1.0
.8
η₀
.6
.4
.2
0
(η₀ - η₂) / (η₀ - η₂)max
ṽ'² / (ṽ'²)m
x/h = 8,5
x/h = 10
0
.2
.4
.6
.8
1.0

Fig. 4 *a*


1.0
.8
η_0
.6
.4
.2
0
e/e_{max} ---
$\frac{\widetilde{U}^{12}}{(\widetilde{U}^{12})m}$ ○ x/h = 8,5
● x/h = 10
0
.2
.4
.6
.8
1.0
e/e_{max} ; $\widetilde{U}^{12}/(\widetilde{U}^{12})m$


1
η_0
0
0
1
$K/K_{\eta_0 = 0,8}$

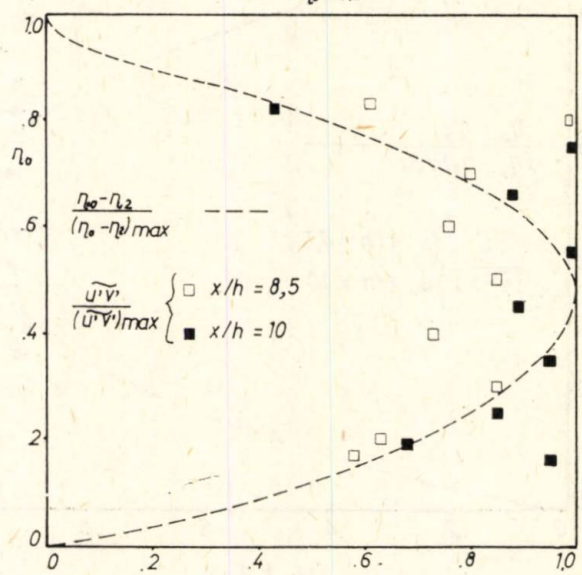

1.0
.8
η_0
.6
.4
.2
0
$\frac{\eta_{\infty} - \eta_2}{(\eta_0 - \eta_2)max}$ ---
$\frac{\widetilde{u'v'}}{(\widetilde{u'v'})max}$ □ x/h = 8,5
■ x/h = 10
0
.2
.4
.6
.8
1.0

Fig. 4 *b*

în primul rînd efecte locale fără o importantă contribuţie a întregului strat de frecare aşa cum se petrece acest transfer în cazul natural. Gradientul transversal relativ mic separă zona de la perete cu comportament natural de zona din centrul canalului dominată de scări locale ce-şi iau origina în perturbatorul de la $X/h = 0$.

Un alt criteriu mai general de caracterizare a structurii turbulente a curgerilor cu gradient transversal constant se referă la corelaţiile spaţio-temporale definite prin formula [2]:

$$\mathscr{R}_{ij}(\vec{r}_{ij}, \tau) = \frac{\widetilde{u_i'(\vec{R}; t) \cdot u_j'(\vec{R} + \vec{r}_{ij}); t + \tau)}}{\sqrt{\widetilde{u_i'^2}(\vec{R})} \cdot \sqrt{\widetilde{u_j'^2}(\vec{R} + \vec{r}_{ij})}}, \tag{3.2}$$

unde $|\vec{r}_{ij}|$ este distanţa ce separă cele două puncte, iar τ este intervalul de timp ce separă momentele de măsură şi înregistrare. Se observă că formula (3.1) este un caz particular obţinut pentru $r = 0$, $\tau = 0$. Pentru expresia (3.2) a coeficientului de corelaţie spaţio-temporal nu există în general expresii analitice, ci numai date experimentale. Cu ajutorul acestei expresii se pot defini două scări de lungime ce caracterizează într-o oarecare măsură coerenţa mişcării turbulente şi anume:

$$l_{ij}^2 = \frac{2\,\widetilde{u_i' u_j'}}{\left(\widetilde{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)^2}; \qquad L_{ij} = \int_0^\infty \mathscr{R}_{ij}(\vec{r}\,; 0)\,|\mathrm{d}\vec{r}_{ij}|,$$

care reprezintă microscala şi, respectiv, scara integrală a mişcării.

Condiţia de omogenitate cere ca l_{ij} şi L_{ij} să fie constante atît în spaţiu cît şi în timp. Pe figura 4 am indicat valorile microscalei

$$l_{11}/h = \frac{1}{h}\left\{\frac{2\,\widetilde{u}'^2}{(\widetilde{\partial u'/\partial x})^2}\right\}^{1/2} \approx \frac{1}{h}\left\{-2 \Big/ \frac{\partial^2}{\partial r_{11}^2} R_{11}(r_{11}; 0)\right\}^{1/2},$$

care sînt aproximativ constante în porţiunea canalului.

Pentru izotropia locală avem condiţia ca spectrul să fie dat de relaţia

$$\mathscr{E} \approx \frac{1}{4}\nu^2 k_k (k/k_k)^{-5/3}, \tag{3.3}$$

unde numărul de undă al lui Kolmogorof k_k este dat de

$$k_k = \frac{1}{h}\left(\frac{U_c h}{\nu}\right)^{3/4} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}\eta_0}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{\overline{u'v'}}{U_c^2}\right)^{1/4} =$$

$$= \frac{1}{h} K_{u,v}^{1/4} \left(\frac{U_c h}{\nu}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}\eta_0}\right)^{1/2} \cdot (\eta_0 - \eta_2)^{1/4}.$$

Izotropia locală are loc pentru numere de undă mult mai mari decît cele la care se petrece procesul producției de turbulență [2] caracterizat prin numărul de undă $k_p \approx \frac{1}{\sqrt{\overline{v'^2}}} \frac{dU}{dy} = \frac{1}{h} \frac{1}{\sqrt{\overline{v'^2}/U_c}} \frac{dU_a}{d\eta_0}$, astfel că trebuie să avem :

$$\frac{k_k}{k_p} \gg 1 \Rightarrow K_{v^{12}}^{1/4} \cdot K_{u'v'}^{1/4} \cdot \left(\frac{U_c h}{\nu}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{dU_a}{d\eta_0}\right)^{-1/2} \cdot (\eta_0 - \eta_2)^{3/4} \gg 1.$$

4. CONCLUZII

Următoarele concluzii se desprind din analiza rezultatelor experimentale prezentate.

a) Existența unei turbulențe omogene asociate unui gradient de viteză transversal constant trebuie limitată la valori mici ale acestui gradient $\left(\frac{dU}{dy} = (10 \ldots 15)\ s^{-1}\right)$, în special pentru scurgerile care au loc în prezența pereților solizi. Este posibil ca în curgerile libere așa cum este prezentat jetul de ieșire din lucrarea de față să fie acceptabilă mărirea gradientului transversal pînă la valori $\frac{dU}{dy} = (20 - 30)\ s^{-1}$.

b) Simularea straturilor limită foarte groase (straturi limite atmosferice) este posibilă numai pentru gradient transversal mare, întrucît procesul de transfer al impulsului prin fluctuații turbulente trebuie să se efectueze prin contribuția întregului strat așa cum prevede teoria [4].

c) Metoda prezentată de creare a unui jet cu gradient transversal important poate fi folosită atît pentru studiul turbulenții omogene, cît și pentru studiul transferului de impuls natural, simulînd dinamica de structură a stratului limită, straturilor de frecare libere, curgerilor turbulente dezvoltate în canale și conducte, zonei parietale a stratului fluctuant de sub stratul turbulent dezvoltat etc.

d) Este necesară continuarea lucrării cu analiza de structură a curgerii turbulente realizate, pentru a vedea în ce măsură efectul global de interacțiune a stratului de frecare (formula (3.1)) devine dominant în raport cu efectele locale.

Primită la redacție la 4 februarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. N. Săvulescu, V. Toma, V. Bretcan, N. Halipa, *Sufleria* INCERC *pentru încercări de aerodinamica construcțiilor*, Revista Construcțiilor, *1*, (1974).
2. F. H. Champagne, V. G. Harris, S. Corrsin, *Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow*, J. F. M. **41**, *1* (1970).
3. Michel Loiseau, *Evolution d'une turbulence homogène soumise à un cisaillement*, Teză pentru titlul de doctor inginer, Univ. Claude Bernard, Lyon, 1973.
4. Șt. N. Săvulescu, *The theory of fluctuating flow fields near Walls*, Part. II, R.M.A., **18**, *6*, (1973).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 34 3/1975

SUMAR

STUDII pag.

R. P. VOINEA, Profesorul Gheorghe Manea la a 70-a aniversare 329

G. BĂRĂNESCU, O teorie generală a echilibrajului forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie la motoarele policilindrice în linie 335

R. C. BOGDAN, D. LARIONESCU, Aprecieri asupra sintezei mecanismelor, interpretată ca o problemă neliniară de aproximare 347

S. T. CHIRIACESCU, C. HUIU, N. IONIŢĂ, D. MANGERON, M. N. OGUZTORELI, Aplicaţii ale unor criterii de apreciere globală a performanţelor sistemului dinamic de prelucrare pe maşinile unelte aşchietoare. I 353

M. D. GAFIŢEANU, N. G. POPINCEANU, D. D. BONTAŞ, Aspecte particulare în funcţionarea rulmenţilor axiali cu bile 365

N. S. GHEORGHIU, N. IONESCU, Definirea criterială a capacităţii de tracţiune la transmisiile prin curele 375

V. V. JINESCU, M. RENERT, O metodă de calcul pentru melcii maşinilor de extrudere termoplastelor 385

FR. KOVÁCS, Mecanisme pseudospaţiale 399

N. MANOLESCU, N. PANDREA, D. NICA, Metoda transformărilor proiective pentru sinteza mecanismelor patrulatere plane articulate pe calculator 407

D. PAVELESCU, Dependenţa uzare-fiabilitate pentru o cuplă de frecare piston-cilindru 417

CHR. PELECUDI, Reprezentarea plană a mecanismelor tridimensionale 423

M. RENERT, GABRIELA NUCĂ, V. CHIRIAC, E. FISCHER, D. FLONDOR, Starea de eforturi unitare în învelişul sferic de săgeată mică, încărcat cu sarcini locale . . 441

C. STĂNESCU, GH. ŞERBAN, B. DIMITROV, Unele aspecte ale frecării şi uzării cuplelor fir-captator în tracţiunea electrică. II. 455

ŞT. ZAREA, N. VASILIU, Metodă pentru calculul hidraulic al paletajului rotorului Dériaz 465

C. COZMA, O generalizare a ecuaţiei lui Buckley şi Leverett 477

PROFESORUL GHEORGHE MANEA LA A 70-A ANIVERSARE

Profesorul emerit dr. doc. ing. Gheorghe Manea
membru corespondent al Academiei R.S.R.

La 8 aprilie 1974, profesorul universitar emerit, doctor inginer GHEORGHE MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, profesor de organe de mașini la Institutul politehnic București a împlinit 70 de ani.

Pentru cei peste 5000 de foști studenți ai săi, astăzi ingineri, conducători de unități industriale, proiectanți, cercetători și cadre didactice, profesorul Gheorghe Manea, prin întreaga sa activitate se impune ca o personalitate marcantă a științei și a tehnicii construcțiilor de mașini.

S-a născut la Rîmnicu Sărat. A urmat Liceul Internat din Iași pe care l-a absolvit în 1922, apoi Facultatea de Construcții de mașini a Școlii politehnice (Technische Hochschule) din Berlin-Charlottenburg, obținînd titlul de inginer diplomat în anul 1928. La același institut în anul 1932 a obținut titlul de doctor în ingineria mecanică susținînd teza „Determinarea variației vitezelor și presiunilor de-a lungul paletelor cu formă oarecare, ale unui rotor de turbină fără celule", conducător științific fiind profesor dr. inginer H. Föttinger.

În timpul studiilor, inginerul Gheorghe Manea a lucrat în mari uzine din Germania și anume la „Siemens" din Berlin, combinat cu profil multilateral, la „Borsig-Werke" din Berlin-Tegel, fabrică de locomotive și turbine cu abur și la „Deutz" din Köln, fabrică de motoare diesel.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975, P. 329–333

Reîntors în țară, în 1933 își începe activitatea în producție la RIMMA (Regia Întreprinderilor Miniere și Metalurgice din Ardeal) unde, fiind încadrat în serviciul de studii, a abordat probleme din domeniul construcțiilor și amenajărilor mecanice privind Uzinele din Hunedoara și anume: modernizarea turnătoriei, dezvoltarea și utilarea unor ateliere mecanice, instalarea unei noi centrale de forță înzestrate cu motoare diesel. Merită să fie relevată colaborarea la un prim studiu pentru sporirea capacității de producție de fontă brută și instalarea unei oțelării.

După un an, în 1934, a trecut la Întreprinderea Unio-Astra Vagoane, în care a parcurs gradele ierarhice de la inginer pînă la prim director tehnic — locțiitor de director general, unde a activat pînă în anul 1947. La această întreprindere a efectuat lucrări în legătură cu proiectarea și construcția de vagoane și automotoare. De asemenea, a contribuit la rezolvarea unor probleme tehnice referitoare la amenajarea, înzestrarea cu utilaj și organizarea uzinei Astra Brașov (în prezent Întreprinderea „Steagul Roșu") și a uzinei din Orăștie, conducînd instalarea și punerea lor în funcțiune, efectuînd probe de mașini și instalații pe bază de măsurători cu caracter tehnico-științific. A colaborat la studiul și a condus lucrările de reconstrucție și reutilare a Fabricei de vagoane din Arad, distrusă în urma bombardamentelor, în timpul celui de-al doilea război mondial și, de asemenea lucrările de studii, proiectare și realizare a retransformării Uzinelor Astra Brașov pentru fabricația de pace.

În anul 1947 a fost chemat în cadrul Ministerului Industriei, care includea ramura metalurgiei și a construcției de mașini, în cadrul unui colectiv de conducere avînd sarcina de mare răspundere de a organiza și experimenta desfășurarea activității primului grup de întreprinderi pe baze socialiste (uzinele: Reșița, Astra, I.A.R.—Brașov, Cugir, Mîrșa), iar apoi, după 1948, a contribuit la rezolvarea problemelor tehnice privind proiectarea și fabricația de produse, concentrarea, profilarea, amenajarea, echiparea și organizarea celor peste 700 de întreprinderi naționalizate, fiind și responsabil pe minister pentru elaborarea primelor planuri anuale și a primului plan cincinal.

În anul 1951, a părăsit Ministerul Metalurgiei și Construcțiilor de Mașini, rămînînd mai departe membru în Consiliul tehnic al acestui minister. A păstrat în permanență legătura cu producția, în prezent fiind membru al Consiliului de coordonare a profilării, specializării și cooperării în ramurile industriei construcțiilor de mașini și industriei metalurgice.

În paralel cu activitatea din producție, inginerul Gheorghe Manea a avut, la Institutul politehnic din București, o amplă și valoroasă activitate în învățămîntul tehnic superior pe care a început-o ca asistent în anul 1933, devenind conferențiar în 1940, profesor în 1944 și profesor șef al Catedrei de Organe de mașini din 1948 pînă în 1972 cînd s-a pensionat, în prezent fiind profesor consultant la aceeași catedră și membru al Senatului institutului.

În prima perioadă, în paralel cu activitatea la disciplina organe de mașini, profesorul Gheorghe Manea a predat cursuri de mecanică și rezistența materialelor, de mașini-unelte și de organizarea și exploatarea fabricilor. După 1948 și-a concentrat eforturile în domeniul organelor de mașini, în care a activat astfel 37 din cei 39 de ani de activitate didactică.

Este meritul deosebit al profesorului Gheorghe Manea de a fi înlocuit treptat, treptat, caracterul preponderent descriptiv al vechilor cursuri şi manuale cu o analiză fenomenologică, un calcul al organelor de maşini pe baze ştiinţifice, cu principii directoare şi metode de soluţionare constructivă. În acest sens, tratatul său de „Organe de maşini" a devenit astăzi, la numai cîţiva ani de la apariţie, o lucrare clasică, răspunzînd nu numai exigenţelor unui învăţămînt superior modern, dar şi nevoilor unei industrii constructoare de maşini în plină dezvoltare, tratatul servind deopotrivă studenţilor, ca şi inginerilor din cercetare, proiectare sau din producţie. De asemenea, lucrarea „Amenajarea, organizarea şi exploatarea fabricilor" elaborată pe baza cursului predat la Politehnica din Bucureşti, apărută în 1944 şi premiată de Academia Română, constituie şi astăzi o lucrare clasică în acest domeniu.

Ceea ce impresionează în mod deosebit la profesorul Gheorghe Manea este dragostea sa faţă de studenţi, exigenţa şi înalta sa principialitate, ataşamentul faţă de învăţămînt. A participat în calitate de membru în comisiile de specialişti ale Ministerului Educaţiei şi Învăţămîntului şi în Consiliul învăţămîntului superior, la elaborarea de studii importante de restructurare şi de îmbunătăţire a învăţămîntului superior, începînd cu reforma din 1948 şi continuînd cu profilarea unor facultăţi, cu conţinutul unor specializări din învăţămîntul inginerese, planuri de învăţămînt, programe de cursuri, analize de institute de învăţămînt, de facultăţi, catedre şi discipline. Competenţa, conştiinciozitatea, clarviziunea sa şi-au pus pecetea pe o bună parte din aceste studii şi analize care au contribuit astfel substanţial la promovarea învăţămîntului tehnic superior din ţara noastră, profesorul Gheorghe Manea fiind distins pentru merite deosebite cu titlul de profesor universitar emerit al Republicii Socialiste România, în iunie 1969.

În întreaga sa activitate, o pondere deosebită o are cercetarea ştiinţifică. Meritul deosebit al profesorului Gheorghe Manea, pe lîngă cel legat de rezolvarea unor probleme concrete, este acela de a fi contribuit la *orientarea* activităţii de cercetare ştiinţifică în domeniul construcţiei de maşini în general şi al organelor de maşini în particular, într-o perioadă cînd în ţara noastră mai dăinuiau încă unele idei preconcepute potrivit cărora domeniul construcţiei de maşini ar fi bazat pe empirism. Au fost necesare eforturi deosebite pentru a se arăta că acest domeniu oferă un cîmp larg de cercetare cu caracter interdisciplinar a unor probleme deosebit de complexe, că aspectul experimental, posibilitatea de a verifica teoria este deosebit de important. Este edificatoare în acest sens activitatea dusă de profesorul Gheorghe Manea în calitate de conducător al Secţiei de maşini şi mecanisme a Institutului de mecanică aplicată al Academiei Republicii Socialiste România pentru orientarea cercetării ştiinţifice, cristalizarea tematicii, crearea unei baze materiale, formarea de cercetători, precum şi redactarea rezultatelor studiilor efectuate într-o formă potrivită folosirii concrete a lor în producţie.

Teza de doctorat, susţinută în 1932, a însemnat începutul activităţii de cercetare ştiinţifică. În această lucrare, folosindu-se transformările conforme, s-a reuşit să se dea o soluţie originală pentru descrierea proceselor curgerii fluidelor prin reţele constituite din profile cu forma oare-

care şi cu *grosime finită*, cu distanţe mari între ele, aşa cum rezultă din transpunerea rotorilor turbinelor Kaplan în asemenea reţele. Lucrarea este citată şi astăzi ca fiind prioritară, în acel moment fiind conoscute soluţii numai pentru profilul singular sau pentru profile în reţea, dar infinit subţiri.

Printre primele cercetări figurează şi un studiu legat de determinarea eforturilor unitare de încovoiere pentru bare din materiale cu caracteristică de rupere neliniară, elaborat în colaborare cu prof. Gheorghe Buzdugan, studiu din care rezultă că la fontele de joasă rezistenţă erorile calculului prin metodele clasice sînt foarte mari.

Lucrări ştiinţifice deosebit de valoroase au fost elaborate în domeniul lagărelor radiale şi axiale. Procesele din lagărele axiale segmentate au fost tratate după criterii hidrodinamice similare celor valabile pentru lagărele transversale, elaborînd curbele — pe cale analitică — şi metodologia de dimensionare a lagărelor.

Una din direcţiile principale de investigaţie a constituit-o temperatura filmului de lubrifiant, în interdependenţă cu portanţa prin intermediul viscozităţii şi grosimii stratului de fluid. Ţinîndu-se seama de încărcarea termică specifică a lagărului, de coeficientul de portanţă, precum şi de transferul de căldură pentru care s-a adoptat un coeficient „global", s-a elaborat o metodă de calcul avînd ca bază primară temperatura filmului. S-a arătat că, îndeosebi în cazul folosirii materialelor plastice, este importantă şi temperatura maximă, nu numai temperatura medie. S-a arătat de asemenea că viscozitatea în stratul de fluid variază foarte mult cu înălţimea sa şi cu parametrii calorici.

Alte cercetări ştiinţifice au abordat lagărele hidrostatice, îndeosebi lagărul radial hidrostatic fără canale longitudinale de scurgere, pentru care s-au elaborat baze teoretice, ţinîndu-se seama de variaţia presiunilor pe pragurile dintre degajeri, la curgerea circumferenţială şi de variaţia înălţimii interstiţiului dintre fus şi cuzinet la curgerea axială. S-a elaborat o metodă şi un program complet de calcul pe o maşină electronică numerică.

Începînd din anul 1960 profesorul Gheorghe Manea a efectuat cercetări în domeniul organelor de maşini din materiale plastice, îndeosebi privind lagărele şi roţile dinţate. Acestea au pus în evidenţă interdependenţa dintre componenţa chimică, structura şi proprietăţile fizice-mecanice ale materialelor plastice folosite în construcţia organelor de maşini, precum şi influenţa parametrilor geometrici şi funcţionali asupra cîmpului de temperatură, care, în cazul cusineţilor din poliamidă este mult diferit de cel al cusineţilor metalici, conductivitatea termică avînd un rol preponderent. De asemenea, s-a arătat că sub acţiunea presiunilor locale şi prin efectul dilataţiilor termice au loc deformaţii locale mari, inegale, deci variaţii ale grosimii filmului de lubrifiant, diferite de cele existente la metale şi care schimbă foarte mult repartiţia de presiuni şi, implicit, şi poziţia fusului în cusinet, ceea ce impune o corectare a rezultatelor ce se obţin prin aplicarea directă a teoriei hidrodinamice.

Alte cercetări pun în evidenţă efectul favorabil al prezenţei grafitului în poliamidă datorită micşorării frecărilor şi îmbunătăţirii conductivităţii termice a peretelui.

Sub conducerea profesorului Gheorghe Manea se continuă sub formă de teze de doctorat o serie de investigaţii în domeniul lagărelor cu alunecare în legătură cu: transferul de căldură în filmul de lubrifiant, curgerea în lagărele hidrostatice, îndeosebi în regim funcţional tranzitoriu, efectul sistemului de alimentare-reglaj asupra caracteristicilor funcţionale ale lagărelor hidrostatice, îndeosebi asupra stabilităţii, efectul modulului de elasticitate redus al materialelor plastice, asupra comportării lagărelor radiale funcţionînd în regim hidrodinamic.

În domeniul roţilor dinţate lucrările ştiinţifice ale profesorului Gheorghe Manea au clarificat modul de comportare a materialelor plastice arătînd că rezultatele sînt condiţionate de efectul complex şi cumulat al temperaturii, legat de procesele de suprafaţă, de conductivitate termică redusă şi de rezistenţa la oboseală a danturii. La poliamide pe lîngă frecările exterioare intervin frecări interne care modifică structura şi alterează proprietăţile mecanice. Adausul de grafit diminuiază frecările, măreşte rezistenţa la uzură, în schimb scade rezistenţa la oboseală a dintelui. Lucrările profesorului Gheorghe Manea, bazate pe experienţe îndelungate care au fundamentat ipotezele teoretice, au clarificat multe probleme din domeniul organelor de maşini oferind explicaţiile necesare şi înlăturînd controversele existente.

Vizînd continuu, în afara aportului la patrimoniul ştiinţei, interesul concret pentru producţie, profesorul Gheorghe Manea a avut colaborări de lungă durată cu Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.S. România, cu Institutul de cercetări şi proiectări de maşini-unelte şi agregate, precum şi cu mari întreprinderi ca: Uzinele „23 August", Întreprinderea de maşini-unelte şi agregate Bucureşti, Uzinele „Semănătoarea", Întreprinderea de materiale şi fibre sintetice Săvineşti, Intreprinderea „Unirea" Cluj şi altele.

Preocupări deosebite a avut profesorul Gheorghe Manea în legătură cu baza materială necesară crecetării, elaborînd primele studii pentru amenajarea şi dotarea unor laboratoare de organe de maşini la Institutul de mecanică aplicată şi la Institutul politehnic Bucureşti, unde au fost realizate standuri pentru studiul lagărelor şi al roţilor dinţate.

Pentru activitatea sa ştiinţifică deosebită, în anul 1963 a fost ales membru corespondent al Academiei R. S. România. A fost distins cu Meritul Stiinţific şi cu alte ordine şi medalii ale Republicii Socialiste România.

La împlinirea vîrstei de 70 de ani, Profesorul Gheorghe Manea se află în plină activitate creatoare. Odată cu mulţumirile noastre pline de recunoştinţă pentru frumoasele rezultate obţinute în procesul instructiv-educativ şi în cercetarea ştiinţifică, urăm profesorului GHEORGHE MANEA noi şi frumoase succese în întreaga sa activitate viitoare, pusă în slujba dezvoltării pe o treaptă superioară a industriei constructoare de maşini în ţara noastră.

Acad. Radu P. Voinea

Tovarășului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

O TEORIE GENERALĂ A ECHILIBRAJULUI FORȚELOR DE INERȚIE ALE MASELOR CU MIȘCARE DE TRANSLAȚIE LA MOTOARELE POLICILINDRICE ÎN LINIE

de G. BĂRĂNESCU

Se analizează posibilitățile de echilibrare a forțelor de inerție prin distribuția manivelelor în jurul axei lor de rotație. Sînt stabilite condițiile pe care trebuie să le îndeplinească steaua manivelelor pentru echilibrarea termenilor de ordinul întîi, termenii care se echilibrează simultan și echilibrajul în cazul aprinderilor uniform repartizate.

1. INTRODUCERE

La motorul în linie, forțele de inerție F_t ale maselor cu mișcare de translație nu pot fi complet echilibrate prin distribuția manivelelor în jurul axei lor de rotație. Anumite distribuții ale manivelelor realizează însă o reducere importantă a rezultantei forțelor F_t. În continuare se analizează posibilitățile de micșorare a acestei rezultante prin distribuția manivelelor în jurul axei lor de rotație.

Pentru cercetarea echilibrajului forțelor F_t este avantajos să se folosească interpretarea vectorială din figura 1. Conform acestei interpretări termenul de ordinul p al forței F_t este proiecția pe direcția Ox a vectorului T_p. În orice moment rezultanta $F_{p_{rez}}$ a termenilor de ordinul p se poate determina calculînd în prealabil rezultanta $T_{p_{rez}}$ a vectorilor T_p și proiectînd apoi această rezultantă pe direcția Ox; dacă $T_{p_{rez}} = 0$, evident, și $F_{p_{rez}} = 0$. Notațiile din figura 1 sînt definite în lucrarea [1].

Într-o poziție oarecare vectorii T_p au aceeași mărime și aceeași viteză unghiulară. De la o poziție la alta acești parametri ai vectorilor se schimbă numai datorită variației mărimilor ω și θ. Neglijînd deformația elastică a arborelui cotit, variația vitezei și accelerației unghiulare a manivelelor este aceeași pentru toți cilindri. În aceste condiții poziția relativă și mărimea relativă a vectorilor T_p rămîne neschimbată în timp; drept urmare, dacă într-o poziție oarecare a arborelui cotit s-a

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975, P. 335–346

realizat $T_{p_{rez}} = 0$, același rezultat se va obține în oricare altă poziție a arborelui cotit, ceea ce înseamnă că termenul de ordinul p este echilibrat.

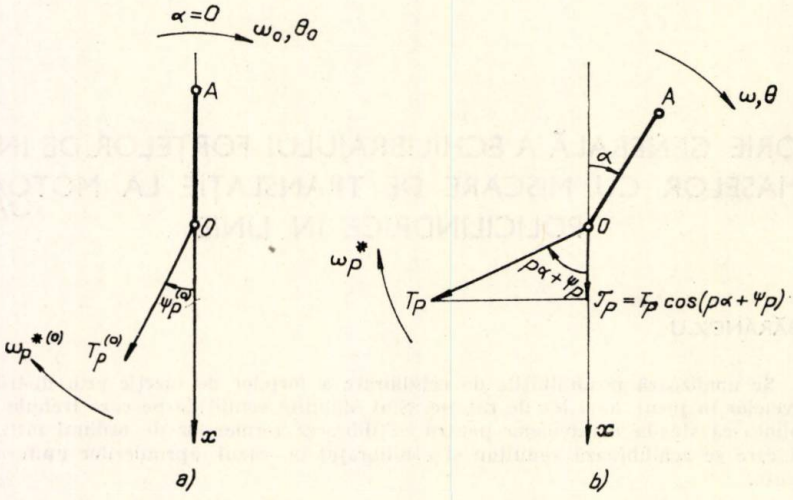


Fig. 1. — Interpretare vectorială a termenului de ordinul p al forței de inerție a maselor cu mișcare de translație ale mecanismului motor al unui cilindru

Astfel, cu ajutorul interpretării vectoriale din figura 1, echilibrarea termenilor de ordinul p ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație este redusă la echilibrarea vectorilor T_p într-un moment de timp oarecare.

2. STABILIREA CONDIȚIILOR DE ECHILIBRARE ÎN CAZUL GENERAL

Din faptul că vectorii T_p au în momentul considerat aceeași mărime pentru toți cilindrii, rezultă că echilibrarea lor se poate realiza numai dacă sînt organizați în serii de vectori, în cadrul fiecărei serii vectorii fiind uniform distribuiți în jurul axei de rotație a arborelui cotit. De exemplu, la motorul cu 12 cilindri, echilibrarea termenilor de ordinul p s-ar putea realiza dacă vectorii T_p au o astfel de distribuție în jurul axei de rotație Oz încît există una din următoarele variante de serii de vectori T_p uniform distribuiți în jurul axei Oz: o serie de șapte vectori și una de cinci vectori, sau trei serii de cîte patru vectori, sau o serie de nouă vectori și una de trei vectori etc.

În general, pentru echilibrarea termenilor de ordinul p, vectorii T_p trebuie să poată fi organizați în q_1 serii, avînd fiecare cîte n_1 vectori T_p, uniform distribuiți în jurul axei Oz, q_2, serii avînd fiecare cîte n_2 vectori T_p distribuiți în jurul axei Oz etc. Distribuția vectorilor T_p doi cîte doi în opoziție, care asigură de asemenea echilibrarea termenilor de ordinul p, nu este distinctă de cazul general, deoarece ea corespunde situației în care fiecare serie are doi vectori uniform distribuiți în jurul axei lor de rotație.

Pentru asigurarea unui bun echilibraj al forțelor F_t este necesară echilibrarea a cît mai mulți dintre primii termeni ai acestor forțe, deoarece amplitudinea unui termen este cu atît mai mare cu cît ordinul său este mai mic. În consecință, din punctul de vedere al echilibrajului forțelor F_t, prima condiție pe care trebuie să o îndeplinească steaua direcțiilor manivelelor este echilibrarea termenilor de ordinul întîi. Astfel, problema micșorării rezultantei forțelor F_t prin distribuția manivelelor în jurul axei Oz se reduce la stabilirea stelelor direcțiilor manivelelor care asigură echilibrarea termenilor de ordinul întîi, urmată de alegerea stelei care realizează și echilibrarea celui mai mare număr de termeni următori consecutivi.

Fie una din repartițiile vectorilor T_1 care echilibrează acești vectori pentru întregul motor. Într-un moment de timp oarecare fie α_f și α_h unghiurile ce precizează pozițiile manivelelor cilindrilor f și h; dacă, de exemplu, $\alpha_h > \alpha_f$, decalajul unghiular dintre aceste manivele este $\alpha_h - \alpha_f$. Unghiul ψ_1, variabil în timp, are aceeași valoare pentru mecanismele motoare ale tuturor cilindrilor. Potrivit interpretării vectoriale din figura 1, vectorii T_1 aferenți cilindrilor f și h fac cu direcția Ox, în sensul lor de rotație, unghiurile $\alpha_f + \psi_1$, respectiv $\alpha_h + \psi_1$. Decalajul unghiular dintre acești vectori are mărimea $\alpha_h + \psi_1 - (\alpha_f + \psi_1) = \alpha_h - \alpha_f$ (fig. 2); el este deci egal cu decalajul dintre manivelele respective. În consecință, vectorii T_1 formează o stea de vectori egali, identică cu steaua manivelelor și decalată față de aceasta cu un unghi variabil în timp, datorită diferenței dintre vitezele unghiulare ω_1^* și ω.

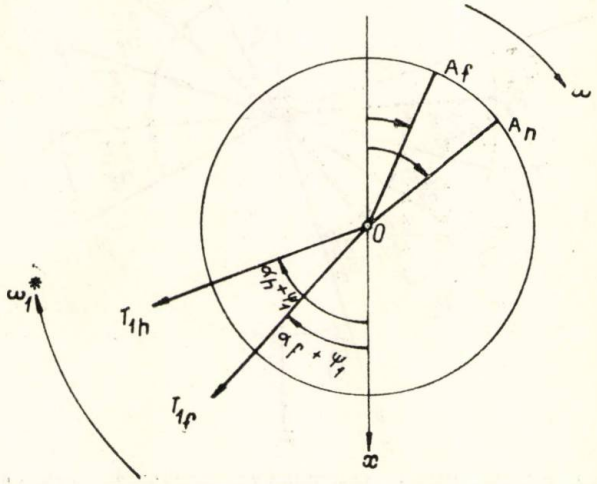


Fig. 2. — Decalajul unghiular dintre vectorii care interpretează termenii de ordinul întîi pentru doi cilindri oarecare

Conform constatării de mai sus, dacă s-a stabilit soluția de echilibrare a vectorilor T_1, s-a precizat și poziția relativă a unora din direcțiile manivelelor. Astfel, presupunînd că echilibrarea vectorilor T_1 se realizează prin repartizarea lor în q_1, q_2... serii de vectori, fiecare avînd,

respectiv, cîte n_1, n_2,... vectori uniform distribuiţi în jurul axei Oz, în steaua direcţiilor manivelelor trebuie să existe q_1 serii de cîte n_1 direcţii uniform distribuite în jurul axei Oz, q_2 serii de cîte n_2 direcţii uniform distribuite în jurul axei Oz etc.

Pentru precizarea echilibrajului forţelor F_t este necesar să se analizeze dacă satisfacerea condiţiei care asigură echilibrarea termenilor de ordinul întîi nu antrenează şi echilibrarea altor termeni ai forţelor F_t.

Se consideră manivelele aferente uneia din seriile de direcţii uniform repartizate în jurul axei Ox; fie n_l numărul de direcţii, deci şi numărul de manivele ale seriei. Se parcurge această serie în sensul pozitiv de rotaţie şi se numerotează manivelele consecutiv, începînd cu o manivelă oarecare. Într-un moment de timp oarecare fie α unghiul care precizează poziţia manivelei 1. Întrucît cele n_l manivele ale seriei sînt uniform distribuite în jurul axei Oz, unghiurile dintre manivelele consecutive sînt egale cu $\frac{2\pi}{n_l}$ şi deci unghiurile dintre manivelele 2, 3,..., n_l şi direcţia în raport cu care a fost precizată poziţia manivelei 1 sînt $\alpha + \frac{2\pi}{n_l}$, $\alpha + 2\frac{2\pi}{n_l}$, ... $\alpha + (n_l - 1)\frac{2\pi}{n_l}$ fig. 3).

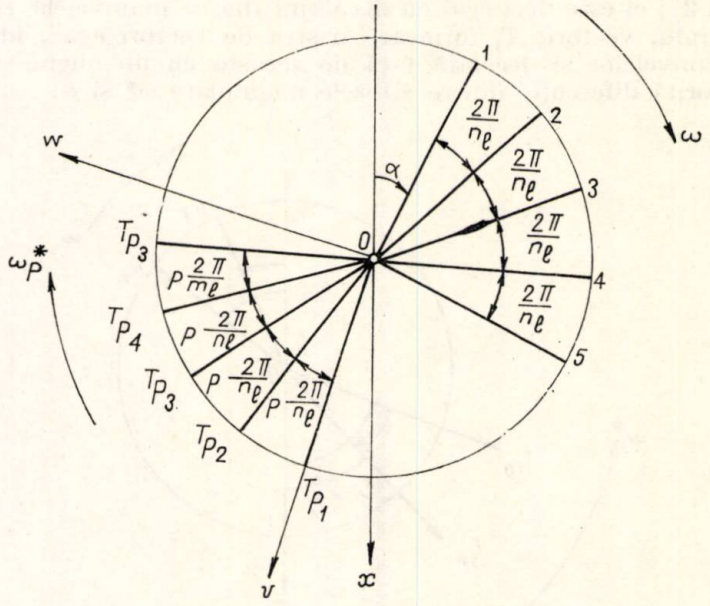


Fig. 3. — Schemă pentru determinarea rezultantei vectorilor T_p aferenţi unei serii de manivele uniform distribuite în jurul axei Oz

Se determină rezultanta vectorilor T_p în momentul de timp ales, pentru seria de manivele considerată. Conform interpretării vectoriale din figura 1, vectorul T_p corespunzător unui cilindru, face cu direcţia Ox, în sensul de rotaţie al arborelui cotit, un unghi de p ori mai mare decît unghiul pe care îl face manivela respectivă, în sensul său de rotaţie, cu direcţia în raport cu care s-a convenit să se măsoare unghiurile de-

scrise de manivelă. La acest unghi se adaugă unghiul ψ_p; deoarece ω și θ au aceeași valoare pentru toate manivelele, unghiul ψ_p este același pentru toate mecanismele motoare. Astfel, unghiurile făcute de vectorii T_p cu direcția Ox, măsurate în sensul de rotație al arborelui cotit sînt:

Pentru mecanismul motor corespunzător manivelei 1: $p\alpha + \psi_p = p\alpha + \psi_p$,

Pentru mecanismul motor corespunzător manivelei 2: $p\left(\alpha + \frac{2\pi}{n_l}\right) + \psi_p = p\alpha + \psi_p + p\frac{2\pi}{n_l}$,

Pentru mecanismul motor corespunzător manivelei 3: $p\left(\alpha + 2\frac{2\pi}{n_l}\right) + \psi_p = p\alpha + \psi_p + 2p\frac{2\pi}{n_l}$,

Pentru mecanismul motor corespunzător manivelei 4: $p\left(\alpha + 3\frac{2\pi}{n_l}\right) + \psi_p = p\alpha + \psi_p + 3p\frac{2\pi}{n_l}$

. . . . . .

Se constată că vectorii T_p sînt repartizați unghiular în progresie aritmetică de rație $p\frac{2\pi}{n_l}$.

Două cazuri se pot prezenta:

1) Rația progresiei este un multiplu de 2π

$$p\frac{2\pi}{n_l} = k2\pi, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

deci

$$p = kn_l, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ldots. \tag{1}$$

În acest caz vectorii sînt în fază, rezultanta lor fiind de n ori mai mare decît T_p; proiecția rezultantei pe direcția Ox, care reprezintă rezultanta $F_{p_{rez}}$ a termenilor de ordinul p ai forțelor F_t pentru mecanismele motoare ale cilindrilor deserviți de seria de manivele considerată, va fi și ea de n_l ori mai mare decît termenul de ordinul p al unui cilindru.

2) Rația progresiei nu este un multiplu de 2π. În acest caz, pentru determinarea rezultantei vectorilor T_p aferenți seriei de manivele considerată se proiectează acești vectori pe direcția Ov a vectorului corespunzător manivelei 1 și pe direcția Ow perpendiculară pe Ov (fig. 3). Sumînd proiecțiile se obține:

$$S_v = T_p\left[1 + \cos p\frac{2\pi}{n_l} + \cos 2p\frac{2\pi}{n_l} + \ldots + \cos(n_l - 1)\,p\frac{2\pi}{n_l}\right],$$

$$S_w = T_p\left[\sin p\frac{2\pi}{n_l} + \sin 2p\frac{2\pi}{n_l} + \ldots + \sin(n_l - 1)\,p\frac{2\pi}{n_l}\right.$$

Înmulțind aceste relații cu $2 \sin \frac{1}{2} p \frac{2\pi}{n_l}$ și folosind formulele

$$2 \sin a \cos b = \sin (a - b) + \sin (a + b),$$

$$2 \sin a \sin b = \cos (a - b) - \cos (a + b),$$

se deduce după transformări

$$S_w = T_p \frac{\sin\left(p \cdot 2\pi - \frac{1}{2} p \frac{2\pi}{n_l}\right) + \sin \frac{1}{2} p \frac{2\pi}{n_l}}{2 \sin \frac{1}{2} p \frac{2\pi}{n_l}},$$

$$S_w = T_p \frac{\cos \frac{1}{2} p \frac{2\pi}{n_l} - \cos\left(p \cdot 2\pi - \frac{1}{2} p \frac{2\pi}{n_l}\right)}{2 \sin \frac{1}{2} p \frac{2\pi}{n_l}}. \tag{2}$$

Deoarece prin ipoteză $p \frac{2\pi}{n_l} \neq k \cdot 2\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, rezultă $S_v = S_w = 0$.

Din cele de mai sus se constată că la orice ansamblu de cilindri în linie, ale căror manivele sînt uniform distribuite în jurul axei de rotație a arborelui cotit, subzistă numai termenii forțelor F_t al căror ordin este un multiplu al numărului de manivele n_l al ansamblului de cilindri; fiecare din acești termeni are o rezultantă de n_l ori mai mare decît termenul de același ordin pentru un cilindru. Toți ceilalți termeni se echilibrează reciproc. Prin urmare, la soluția de echilibrare a vectorilor T_1 considerată, pentru fiecare serie de cîte n_1 manivele uniform distribuite în jurul axei Oz subzistă numai termenii al căror ordin este multiplu de n_1, rezultanta generală a acestor termeni depinzînd de decalajul unghiular dintre cele q_1 serii de cîte n_1 manivele; la fiecare serie de n_2 manivele uniform distribuite în jurul axei Oz subzistă numai termenii al căror ordin este multiplu de n_2, rezultanta generală a acestor termeni depinzînd de decalajul unghiular dintre cele q_2 serii de cîte n_2 manivele etc.

Din formula (1) se desprinde concluzia că echilibrajul forțelor F_t este cu atît mai bun cu cît numărul de manivele din fiecare serie este mai mare. Cel mai mare număr de manivele pe care îl poate avea o serie este egal cu numărul cilindrilor, în care caz toate manivelele sînt uniform distribuite în jurul axei lor de rotație. Formula (1) devine

$$p = ki, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Dacă distribuția uniformă a tuturor manivelelor în jurul axei lor de rotație nu poate fi admisă din cauză că nu satisface alte condiții de natură dinamică, de pildă repartiția uniformă a aprinderilor sau echilibrarea unor momente externe, trebuie folosite soluții care au manivelele uniform distribuite în jurul axei Oz pe serii : astfel de soluții pot realiza un echilibraj al forțelor de inerție F_t mai puțin avansat, dar satisfăcător, și totodată permit îndeplinirea unora din condițiile enumerate mai sus, prin alegerea unghiurilor de calaj dintre seriile de manivele. Pentru îmbunătățirea echilibrajului forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, este avantajos ca în fiecare serie numărul de manivele să fie același ; în acest caz, aceiași termeni ai forțelor F_t subzistă în cadrul fiecărei serii și deci numărul termenilor care produc dezechilibrarea motorului este mai mic.

Organizarea manivelelor în serii cu același număr de manivele este posibilă dacă numărul i de cilindri admite divizori diferiți de 1 sau i. Se presupune că există astfel de divizori ; fie δ unul dintre aceștia. Arborele cotit poate fi realizat din δ arbori parțiali, fiecare avînd $\frac{i}{\delta}$ manivele uniform distribuite în jurul axei Oz. Conform relației (1), la fiecare serie de cilindri deservită de unul din arborii parțiali vor subzista termenii ale căror ordine sînt multiplii de $\frac{i}{\delta}$

$$p = k\frac{i}{\delta}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Dacă arborele cotit este constituit din mai multe serii de manivele uniform distribuite în jurul lor de rotație, este posibil ca unii din termenii ce subzisă în cadrul fiecărei serii să fie echilibrați. Această situație se realizează cînd unghiurile de calaj dintre seriile de manivele au anumite valori.

Pentru stabilirea termenilor din șirul (4) care se echilibrează reciproc în cazul unor valori date ale unghiurilor de calaj dintre seriile de manivele, se presupune că arborele comportă δ serii de cîte $\frac{i}{\delta}$ manivele uniform distribuite în jurul axei de rotație. La fiecare serie de manivele, vectorii ce interpretează termenii al căror ordin p^* face parte din șirul (4), au o rezultantă $T_{p^*_{rez}}$. În total vor exista pentru termenul de ordinul p^*, δ rezultante egale, care se echilibrează dacă sînt uniform distribuite în jurul axei Oz.

În vederea precizării condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească steaua direcțiilor manivelelor pentru ca cei δ vectori $T_{p^*_{rez}}$ să fie uniform distribuiți în jurul axei Oz se numerotează consecutiv seriile de manivele luate într-o ordine arbitrară, începînd cu o serie oarecare, căreia i se atribuie numărul de ordine 1. Se aranjează seriile de manivele astfel ca vectorii $T_{p^*_{rez}}$ să fie în fază. Deoarece stelele constituite din manivelele

celor δ serii sînt identice, ansamblul format din aceste stele va avea manivele în fază. Pentru a fi uniform distribuiţi în jurul axei Oz, vectorii $T_{p^*_{1ez}}$ ai seriilor de manivele 2, 3,..., δ, trebuie rotiţi înainte faţă de vectorul $T_{p^*_{1ez}}$ al seriei 1 cu unghiurile $\frac{2\pi}{\delta}$, $2\,\frac{2\pi}{\delta}$,..., $(\delta-1)\frac{2\pi}{\delta}$. Această operaţie se realizează prin decalarea seriilor de manivele. În acelaşi moment, decalarea unei serii de manivele cu un unghi antrenează rotirea tuturor vectorilor T_{p^*} ai seriei, deci şi a vectorului $T_{p^*_{rez}}$, cu un unghi de p^* ori mai mare. Prin urmare, pentru ca vectorii $T_{p^*_{1ez}}$, de exemplu, ai seriilor de manivele 1 şi 2 să fie decalaţi cu unghiul $\frac{2\pi}{\delta}$, seriile trebuie să fie decalate cu unghiul $\xi = \frac{2\pi}{p^*\delta}$. Cu acelaşi unghi trebuie să fie decalate seria a treia de a doua, seria a patra de a treia etc. Rezultă că decalajul dintre seriile consecutive este acelaşi.

Se constată astfel că termenii de un ordin care face parte din şirul (4) se echilibrează reciproc dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

— decalajul dintre seriile consecutive de manivele are aceeaşi valoare ξ;

— raportul $\frac{2\pi}{\xi\delta}$ este un număr întreg care face parte din şirul (4); valoarea acestui raport este egală cu ordinul p^* al termenilor echilibraţi.

Repetînd raţionamentele care au dus la stabilirea relaţiilor (1) şi (2) se ajunge la concluzia că echilibrarea termenului de ordinul p^* antrenează şi echilibrarea termenilor ale căror ordine sînt multipli de p^*, cu excepţia multiplilor de δ. Prin urmare, dacă sînt satisfăcute condiţiile precedente, din termenii ce subzistă în cadrul fiecărei serii de manivele, se echilibrează cei care au ordinele

$$p^* = k\,\frac{2\pi}{\xi\delta},\quad k = 1,\ 2,\ 3,\ldots;\ k \neq q\delta;\ q = 1,\ 2,\ 3,\ldots. \tag{5}$$

3. ECHILIBRAJUL FORŢELOR DE INERŢIE LA MOTORUL CU APRINDERI UNIFORM REPARTIZATE

Dacă se impune repartiţia uniformă a aprinderilor, echilibrajul cel mai avansat al forţelor de inerţie F_i, obţinut prin distribuţia manivelelor în jurul axei lor de rotaţie, se poate realiza la toate tipurile de motoare în linie cu simplă acţiune (exceptînd motorul în patru timpi cu număr par de cilindri), precum şi la motoarele în linie, cu dublă acţiune, în patru timpi cu număr par de cilindri, sau în doi timpi cu număr impar de cilindri, deoarece în aceste cazuri, printre stelele direcţiilor manivelelor care permit repartiţia uniformă a aprinderilor există şi soluţia cu manivelele uniform distribuite în jurul axei de rotaţie Oz.

La motorul în linie cu simplă acțiune, în patru timpi și număr par de cilindri, steaua direcțiilor manivelelor care asigură repartiția uniformă a aprinderilor are $\frac{i}{2}$ grupe de manivele în fază, uniform distribuite în jurul axei Oz; o astfel de stea a direcțiilor manivelelor este posibilă și la motorul în linie, cu dublă acțiune, în patru timpi, cînd numărul de cilindri este par dar nedivizibil cu patru. În aceste cazuri steaua direcțiilor manivelelor este deci formată din două serii de cîte $\frac{i}{2}$ manivele uniform distribuite în jurul axei Oz, decalajul unghiular dintre serii fiind nul; prin urmare termenii forțelor F_t care nu se echilibrează reciproc au ordinele precizate de formula (4), în care $\delta = 2$

$$p = k\frac{i}{2}, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots . \tag{6}$$

În cazul motorului în linie cu dublă acțiune, în patru timpi, cu număr impar de cilindri, repartiția uniformă a aprinderilor nu este posibilă. Pentru micșorarea variației momentului motor rezultant, cele două serii de aprinderi trebuie să fie uniform repartizate, condiție care este îndeplinită dacă arborele cotit are manivelele uniform distribuite în jurul axei Oz; prin această dispoziție a manivelelor se asigură totodată și cel mai bun echilibraj al forțelor de inerție.

La motorul în linie cu dublă acțiune, în doi timpi, cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate se poate realiza un echilibraj mulțumitor al forțelor de inerție F_t prin distribuția manivelelor în jurul axei lor de rotație numai dacă numărul de cilindri admite divizori δ diferiți de 1 sau i, pentru care rezultatul diviziunii este un număr impar, prin urmare numai dacă numărul de cilindri nu este o putere de 2; în acest caz steaua direcțiilor manivelelor are δ serii de cîte $\frac{i}{\delta}$ manivele uniform distribuite în jurul axei Oz și în consecință, în cadrul fiecărei serii se echilibrează toți termenii forțelor de inerție F_t, cu excepția celor ale căror ordine sînt date de formula (4). Datorită decalajului dintre serii se mai echilibrează și o parte din termenii ce subzistă în fiecare serie și anume cei ale căror ordine satisfac relația (5); deoarece decalajul dintre două serii consecutive oarecare este $\xi = \frac{\pi}{i}$, relația (5) devine

$$p^* = 2k\frac{i}{\delta}, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ldots\ ;\ k \neq q\delta;\ q = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

În consecință, rămîn neechilibrați termenii ale căror ordine sînt multipli impari de $\frac{i}{\delta}$, precum și multipli pari de i

$$\left.\begin{aligned} p &= (2k-1)\frac{i}{\delta} \\ p &= 2ki. \end{aligned}\right\} \qquad k = 1,2,3,\ldots, \tag{7}$$

La aplicarea formulelor (3), (6) și (7) trebuie avut în vedere faptul că — în cazul mecanismului bielă-manivelă normal și axat — seria forței F_t comportă numai termenii de ordinul întîi și pe cei de ordin par. Pentru diverse situații, formulele care precizează ordinele termenilor ce nu se echilibrează reciproc la motorul în linie cu aprinderi uniform repartizate, deduse din (3), (6) și (7), sînt trecute în tabelul 1.

Tabelul 1

Ordinele termenilor forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație care nu se echilibrează, la motorul în linie cu aprinderi uniform repartizate

$k = 1, 2, 3, \ldots$; $q = 1, 2, 3, \ldots$; $\frac{i}{\delta} = 2k + 1$; $\delta \neq 1, i$

Numărul de cilindri i	Tipul motorului			Ordinele termenelor care nu se echilibrează reciproc	
	Numărul de timpi	Alte caracteristici ale motorului		În cazul echipării motorului cu mecanisme bielă-manivelă normale și dezaxate	În cazul echipării motorului cu mecanisme bielă-manivelă normale și axate
Par	4	Simplă acțiune	$i \neq 4q$	$p = k\frac{i}{2}$	$p = ki$
			$i = 4q$		$p = k\frac{i}{2}$
		Dublă acțiune	Echipat cu arbore cotit avînd manivelele uniform distribuite în jurul axei lor de rotație	$p = ki$	
			Echipat cu arbore cotit avînd manivelele două cîte două în fază, grupele de manivele în fază fiind uniform distribuite în jurul axei lor de rotație	$p = k\frac{i}{2}$	$p = ki$
	2	Simplă acțiune		$p = ki$	
		Dublă acțiune $i \neq 2^q$		$p = (2k-1)\frac{i}{\delta}$, $p = 2ki$	$p = 2ki$
Impar	Toate motoarele[1])			$p = ki$	$p = 2ki$

[1]) Inclusiv motorul cu dublă acțiune în patru timpi, cu număr impar de cilindri, prevăzut cu arbore cotit care are manivelele uniform distribuite în jurul axei lor de rotație.

Întrucît aplitudinea termenilor scade repede cînd ordinul lor crește, se constată din tabelul 1 că un bun echilibraj al forțelor de inerție F_t ale maselor cu mișcare de translație îl au motoarele cu un număr impar de

cilindri, prevăzute cu mecanisme bielă-manivelă normale și axate. Din punctul de vedere al echilibrajului forțelor F_t sînt sensibile la dezaxare: 1 — motoarele cu număr par de cilindri, în patru timpi, cu simplă sau dublă acțiune, la care $i \neq 4q$; 2 — motoarele cu număr de cilindri, în doi timpi, cu dublă acțiune; 3 — toate motoarele cu număr impar de cilindri.

4. CONCLUZII

Rezultatele obținute mai înainte permit formularea următoarelor concluzii.

La motorul în linie, cel mai bun echilibraj al forțelor de inerție F_t ale maselor cu mișcare de translație, realizat prin distribuția manivelelor în jurul axei de rotație, se obține cînd toate manivelele arborelui cotit sînt uniform distribuite în jurul axei Oz; la această distribuție subzistă numai termenii ale căror ordine sînt multipli ai numărului de cilindri, fiecare termen avînd o rezultantă de i ori mai mare decît termenul de același ordin al unui cilindru; toți ceilalți termeni se echilibrează reciproc. Dacă distribuția uniformă a manivelelor în jurul axei lor de rotație nu convine din alte puncte de vedere, se poate realiza un echilibraj al forțelor F_t mai puțin avansat dar satisfăcător, organizînd manivelele în serii cu același număr de manivele și distribuind manivelele fiecărei serii uniform în jurul axei lor de rotație. Această posibilitate există cînd numărul de cilindri i admite divizori diferiți de 1 sau i; dacă numărul de cilindri are mai mulți divizori cuprinși între 1 și i, este de preferat divizorul cel mai mic, spre a realiza echilibrarea unui număr mai mare de termeni ai forțelor F_t în cadrul fiecărei serii de manivele. Cînd decalajul unghiular dintre serii nu este determinat de alte condiții, se pot echilibra și unii dintre termenii care subzistă în fiecare serie, prin alegerea valorii acestui decalaj.

Dacă aprinderile sînt uniform repartizate, echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație pentru diferite tipuri de motoare este realizat în modul următor:

1. La motorul în linie cu simplă acțiune și aprinderi uniform repartizate subzistă numai acei termeni ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație ale căror ordine sînt un multiplu al jumătății numărului de cilindri în cazul motorului în patru timpi, sau un multiplu al numărului de cilindri în cazul celorlalte tipuri de motoare; fiecare din acești termeni are o rezultantă de i ori mai mare decît termenul de același ordin aferent unui cilindru, rezultantă care trepidează motorul în planul cilindrilor; toți ceilalți termeni se echilibrează reciproc.

2. La motorul în linie cu dublă acțiune în patru timpi cu număr par de cilindri, repartiția uniformă a aprinderilor poate fi asigurată de un arbore cotit cu manivelele uniform distribuite în jurul axei lor de rotație; în cazul cînd numărul de cilindri nu este divizibil cu patru se poate folosi și un arbore cotit care are manivelele două cîte două în fază, grupele de manivele în fază fiind uniform distribuite în jurul axei lor de rotație. Dacă motorul este echipat cu unul din acești arbori cotiți, echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație este identic cu

echilibrajul aceloraşi forţe la motorul în linie cu simplă acţiune, prevăzut cu acelaşi arbore cotit.

3. La motorul în linie, cu dublă acţiune, în patru timpi, cu număr impar de cilindri, se poate realiza numai repartiţia uniformă a fiecăreia din cele două serii de aprinderi, folosind un arbore cotit cu manivelele uniform distribuite în jurul axei lor de rotaţie. În acest caz, echilibrajul forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie este identic cu echilibrajul aceloraşi forţe la motorul în linie cu simplă acţiune, cu aprinderi uniform repartizate şi acelaşi număr de cilindri.

4. La motorul în linie cu dublă acţiune, în doi timpi cu număr impar de cilindri şi aprinderi uniform repartizate există pentru fiecare număr de cilindri o stea a direcţiilor manivelelor, care are manivele uniform distribuite în jurul axei lor de rotaţie. Folosirea acestei stele a manivelelor asigură un echilibraj al forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie identic cu cel al motorului în linie cu simplă acţiune, cu aprinderi uniform repartizate şi acelaşi număr de cilindri.

5. La motorul în linie, cu dublă acţiune, în doi timpi, cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate, se pot echilibra unii termeni ai forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie prin distribuirea manivelelor în jurul axei lor de rotaţie, numai dacă numărul de cilindri admite divizori δ diferiţi de 1 sau de i, pentru care rezultatul diviziunii este un număr impar. În acest caz subzistă numai termenii ale căror ordine sînt date de formulele (7); toţi ceilalţi termeni se echilibrează reciproc.

Primită la redacţie la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. G. BĂRĂNESCU, *Interpretări vectoriale ale forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variaţiei vitezei unghiulare de rotaţie a arborelui cotit* St. cerc. mec. apl., *6* (1969).

Tovarășului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

APRECIERI ASUPRA SINTEZEI MECANISMELOR, INTERPRETATĂ CA O PROBLEMĂ NELINIARĂ DE APROXIMARE

de R. C. BOGDAN,
Institutul politehnic București
D. LARIONESCU
Centrul de mecanică a solidelor

Există în prezent destul de multe metode de sinteză a mecanismelor și fiecare din ele aduc anumite avantaje.

O bună comparație între aceste metode trebuie să ia în considerare fundamentul matematic al problemelor de sinteză a mecanismelor; este ceea ce se face în prezenta lucrare. Se argumentează că sinteza mecanismelor reprezintă în fond o problemă neliniară de aproximare, rezolvarea unei astfel de probleme implicînd numeroase dificultăți. Se indică în această lucrare două căi prin care aceste dificultăți pot fi în parte evitate.

1. INTRODUCERE

Calea generală pentru definirea problemei de aproximare a funcțiilor constă în a utiliza spațiile funcționale.

Fie, de exemplu, problema aproximării unei funcții $f(x)$ printr-o altă funcție $g(x)$.

Este mai bine să se considere aceste funcții ca punctele f și g ale unui spațiu vectorial E.

În acest caz problema de aproximare implică faptul că pentru un punct dat f și un subspațiu dat G a spațiului vectorial E, să se găsească acel punct $g_0 \in G$ având proprietatea că este cel mai apropiat de f dintre toate punctele lui.

Introducînd notația d, pentru distanța în spațiul E, cele mai de sus implică

$$d(f,\ g_0) = \inf_{g \in G} d(f,\ g). \tag{1}$$

Distanța d este evident, definită de norma în spațiul E:

$$d(f,\ g) = \|f - g\|, \quad (f,\ g \in E). \tag{2}$$

Totul depinde de cum se dorește să fie organizat spațiul E. Dacă E este organizat ca spațiul $C[\alpha,\ \beta]$ a funcțiilor reale și continue pe

intervalul $[\alpha, \beta]$ cu norma lui Cebîşev

$$\|f\| = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x)|, \tag{3}$$

aproximarea va fi în acest caz în sensul lui Cebîşev. Dacă este organizat ca spaţiul $L^2[\alpha, \beta]$ a funcţiilor reale de pătrat integrabil pe intervalul $[\alpha, \beta]$ cu norma

$$\|f\| = \left\{ \int_\alpha^\beta f^2(x)\, dx \right\}^{1/2}, \tag{4}$$

aproximarea va fi în sensul aproximării medie pătratice minime.

Să presupunem că subspaţiul G al funcţiilor de aproximare depind nu numai de x, dar, de asemenea, de parametrii $a_1, a_2 \ldots a_n$, componente ale unui vector $\bar{a} \in A$, unde A este un spaţiu a spaţiului R^n. Cu alte cuvinte se iau în considerare funcţii de tipul $F(\bar{a}, x) \in G$.

Cazul liniar al aproximării rezultă cînd A este un spaţiu vectorial, şi funcţiile $F(\bar{a}, x)$ sînt funcţionale liniare pe A pentru fiecare x fix.

În caz contrar aproximarea se numeşte de obicei neliniară [4].

2. LEGĂTURA DINTRE PROBLEMA SINTEZEI MECANISMELOR ŞI PROBLEMA APROXIMĂRII FUNCŢIILOR

Sinteza mecanismelor reprezintă o problemă de aproximare. În acest caz spaţiul E constă din funcţii de tipul celor dorite de proiectant.

Pe de altă parte subspaţiul G constă din funcţii $F(\bar{a}, x)$, care reprezintă traiectorii sau funcţii generatoare ale unui anumit tip de mecanism.

Componentele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ale vectorului $\bar{a}$ reprezintă în acest caz parametrii cinematici care caracterizează mişcarea mecanismului.

În probleme de sinteză trebuie calculat acel vector $\bar{a}_0$ care face ca distanţa dintre $F(\bar{a}_0, x)$ şi $f(x)$ (aleasă de proiectant) să fie cea mai mică în spaţiul E. Pentru cele mai multe probleme care apar în sinteza mecanismelor, organizarea spaţiului E drept spaţiul $C[\alpha, \beta]$ este convenabilă.

De asemenea, în cele mai multe cazuri, subspaţiul G constă din funcţii periodice.

Pentru majoritatea mecanismelor, funcţiile de tipul $F(\bar{a}, x)$ descrise mai sus sînt neliniare referitor la parametrii a_k.

Se poate în general considera că sinteza mecanismelor reprezintă o problemă neliniară de aproximare.

O bună proiectare trebuie să ia în considerare nu numai minimizarea funcţiei eroare, dar, de asemenea, să găsească un mecanism de dimensiuni adecvate, cu valori adecvate pentru unghiurile de transmitere, care să îndeplinească condiţiile necesare pentru mobilitate etc.

J. Tomas [6] consideră toate aceste condiţii nu ca fiind ulterioare etapei de sinteză, ci ca fiind parte integrantă a acesteia. Cu alte cuvinte foloseşte aceste condiţii pentru construirea unui domeniu:

$$\Phi_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots m, \tag{5}$$

în care caută după aceea soluţia sintezei.

El transformă astfel problema proiectării mecanismelor într-o problemă de programare neliniară. La prima vedere acest mod de a formula problema proiectării mecanismelor pare atractivă, dar în realitate greutăţile rezolvării ei sporesc.

În ceea ce priveşte dificultăţile rezolvării unei probleme neliniare de aproximare, teoria condiţionează existenţa şi unicitatea soluţiei problemei de aproximare, de existenţa şi unicitatea soluţiei problemei de interpolare în subspaţiul G. Aceasta revine în final la posibilitatea rezolvării unui sistem neliniar de ecuaţii.

Fie un sistem neliniar de ecuaţii aranjat sub forma

$$x_i = F_i(\bar{x}), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{6}$$

unde vectorul $\bar{x}$ are componentele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Să presupunem că vectorul $\bar{\alpha}$ reprezintă o soluţie a sistemului. Să presupunem că există o regiune R descrisă astfel

$$|x_j - \alpha_j| \leqslant h, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{7}$$

şi pentru vectorul $\bar{x}$ situat în regiunea R există un număr pozitiv μ mai mic ca 1, astfel ca

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial F_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right| \leqslant \mu. \tag{8}$$

Metoda aproximaţiilor succesive [3], una din cele mai des utilizate metode de calcul numeric, impun ca vectorul $\bar{x}_0$ reprezentînd primul pas al iteraţiei să fie situat în regiunea R descrisă prin relaţiile (7) pentru ca procesul iterativ să conveargă către o soluţie a sistemului.

Se observă deci că alegerea soluţiei iniţiale, de start a algoritmului de calcul, depinde de condiţii impuse asupra derivatelor funcţiei, pe baza căreia se formează sistemul. Dar în practică se cunoaşte rar această funcţie sub formă analitică şi în aceste cazuri condiţiile (8) nu mai pot fi folosite.

3. POSIBILITĂŢI DE EVITARE PARŢIALĂ A DIFICULTĂŢILOR ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE SINTEZĂ A MECANISMELOR

a) O primă posibilitate constă în aplicarea în mod adecvat a teoriei matematice asupra aproximării funcţiilor.

Este ceea ce a făcut I. I. Artobolevski [1], care a încercat să liniarizeze problema de aproximare şi apoi să utilizeze teoria sistemelor de funcţii Cebîşev pentru care atît condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiei, cît şi metodele numerice de găsire a ei sînt bine puse la punct.

Acţionînd în acest sens, I. I. Artobolevski a aproximat funcţia abatere reală pînă a reuşit să o aducă la o formă convenabilă aplicării teoriei lui Cebîşev, de exemplu, pentru un mecanism patrulater acţionînd ca mecanism de transmitere, această formă este

$$\Delta_p = 2[p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + \ldots + p_6 f_6(\varphi)]. \tag{9}$$

În expresia de mai sus, φ are semnificația unghiului de manivelă, sistemul de funcții $\{f_0(\varphi), f_1(\varphi), \ldots f_6(\varphi)\}$ este cunoscut depinzînd numai de φ și de legea de mișcare impusă $\Psi = \Psi(\varphi)$. Coeficienții $p_0, p_1, \ldots p_6$ depind numai de parametrii cinematici ai mecanismului.

În continuare, I. I. Artobolevski a considerat că polinomul generalizat (9) este format pe baza unui sistem de funcții Cebîșev și a acționat în sensul teoriei lui Cebîșev pentru a determina valorile coeficienților p_k. O dată aceștia determinați, obținerea parametrilor cinematici ai mecanismului patrulater a devenit ușoară. Dar coeficienții p_5 și p_6 depind neliniar de ceilalți coeficienți

$$p_5 = -(p_0 p_2 + p_1 p_3),$$
$$p_6 = p_1 p_2 - p_0 p_3, \tag{10}$$

ceea ce demonstrează caracterul neliniar al problemei de sinteză ce nu a putut fi evitat.

În orice caz, acest mod de abordare a problemei ușurează mult determinarea numerică a soluției problemei de sinteză, decît în cazul aplicării directe a teoriei generale referitoare la problemele neliniare de aproximare.

b) A doua posibilitate de evitare în parte a dificultăților rezolvării problemelor de sinteză, constă în restrîngerea domeniului în care se caută soluția.

Această cale este probabil cel mai bine ilustrată prin utilizarea seriilor Fourier.

Cu alte cuvinte se caută soluția problemei în mulțimea funcțiilor dezvoltabile în serie Fourier. Dar în acest caz binecunoscutele condiții ale lui Dirichlet necesare pentru ca o funcție să poată fi dezvoltată în serie Fourier, acționează de fapt în sensul restrîngerii spațiului E definit mai înainte. În consecință, E este înlocuit cu un altul $E_1 \subset E$.

Dar trebuie să se observe că de regulă condițiile lui Dirichlet nu sînt prea restrictive în domeniul sintezei mecanismelor în care cele mai multe funcții care intervin sînt periodice și continue. Din cauza înlocuirii problemei generale prin una particulară (dar în general convenabilă), este de așteptat să fie mai ușor de rezolvat [5], [2].

4. CONCLUZII

— Problemele de sinteză a mecanismelor reprezintă de fapt probleme neliniare de aproximare a funcțiilor, ceea ce conduce în final la necesitatea rezolvării unor sisteme neliniare de ecuații.

— Pentru rezolvarea mai ușoară a unor astfel de probleme este important să fie afectate fundamentul matematic al problemei. Două căi de a acționa în acest sens sînt indicate mai sus.

— Utilizarea calculului matriceal, tensorial, teoria grafurilor, fără a modifica problema de fond, pot fi utile, în special în legătură cu utilizarea calculatoarelor electronice pentru rezolvarea problemelor de sinteză.

— Este necesar să fie puse la punct „metode generale" adică metode care să poată fi aplicate pentru probleme diferite de sinteză sau pentru diferite tipuri de mecanisme fără să fie necesare schimbări mari. O idee în acest sens [2] constă în abordarea mecanismelor, prin intermediul grupelor structurale, părți componente de bază în formarea mecanismelor. Deoarece numărul acestor grupe structurale nu este prea mare, orice metodă de sinteză care le folosește cîștigă în generalitate și este indicată pentru programarea calculatoarelor electronice.

— Pentru fiecare nouă metodă de sinteză considerăm că este indicat în spiritul celor de mai sus, să se specifice de ce natură sînt avantajele pe care la aduce.

Primită la redacție la 25 decembrie 1974.

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artobolevski, *Sintez ploskih mehanizmov*, Moskva, Fitmatighiz, 1959.
2. R. C. Bogdan, D. Larionescu, *Applications of the complex harmonic synthesis in five and four-bar mechanisms of I aspect*, Proceedings of the third world Congress for the Theory of Machines and Mechanisms Vol. C., paper C—3 pp. 31—44, Kupari, Yugoslavie, 1971.
3. B. Carnahan, M. A. Luther, J. O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, 1969.
4. G. Meinardus, *Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods*, Springer-Verlag, 1967.
5. H. Rankers, *Angenäherte Getriebesynthese durch harmonische Analyse der vergegeben periodichen Bewegungsverhältnisse*, Disertation, Aachen, 1958.
6. J. Thomas, *The Synthesis of Mechanisms as a Nonlinear Programming Problem*, J. Mechanisms, vol. 3, pp. 119—130.

Tovarășului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

APLICAȚII ALE UNOR CRITERII DE APRECIERE GLOBALĂ A PERFORMANȚELOR SISTEMULUI DINAMIC DE PRELUCRARE PE MAȘINILE UNELTE AȘCHIETOARE. I

de S. T. CHIRIACESCU[1]), C. HUIU[2]), N. IONIȚA[3]), D. MANGERON[4]), M. N. OGUZTORELI[5])

Lucrarea prezintă modul în care criteriile pentru aprecierea globală (statică și dinamică) a performanțelor sistemului dinamic de prelucrare pe mașinile-unelte aşchietoare pot fi utilizate în proiectarea barelor de alezat, în obținerea condițiilor de stabilitate staționară și la optimizarea parametrilor regimului de aşchiere.

1. INTRODUCERE

O serie de teze de doctorat românești în domeniul Mecanicii tehnice, susținute cu totul recent în țară sau peste hotare [1], [15] — [17], constituie, după cum au afirmat cunoscuții specialiști străini G. Bradistilov, D. A. Calahan, M. Chase, F.R.E. Crossley, B. Finzi, N. I. Levitski, John J. Uicker, Jr., J. Volmer ș.a., contribuții teoretice și aplicative deosebit de valoroase, de interes incontestabil pentru lumea științifică și tehnică contemporană.

Autorii, luînd ca punct de plecare șirul de lucrări [2] — [4], [8], [13] — [14], în care cel puțin ponderea contribuțiilor experimentale, executate în laboratoarele Universității din Brașov, trebuie atribuită în întregime primului autor al prezentei lucrări, și ținînd seama de stadiul actual al problemelor abordate la nivel mondial în domeniul Mecanicii tehnice a vibrațiilor, Dinamicii tehnice și Stabilității mișcării, concepută în cele mai variate moduri, începînd cu hiperstabilitate, stabilitate asimptotică, parametrică, elastică ș.a. și terminînd cu *stabilitatea globală*, introdusă în teza de doctorat [1], expun, în ceea ce urmează, modul în care criteriile pentru apecierea globală (statică și dinamică) a performanțelor sistemului dinamic de prelucrare pe mașinile unelte aşchietoare pot fi utilizate în proiectarea barelor de alezat, în obținerea condițiilor de prelucrare staționară și la optimizarea parametrilor regimului de aşchiere.

---

[1]) Universitatea din Brașov. 2) Institutul politehnic din Iași. 3) Academia de Studii Economice, București. 4) Instit. politehnic din Iași. 5) Department of Mathematics. The University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975, P. 353–363

2. CRITERII PENTRU STABILITATEA GLOBALĂ ŞI PENTRU INSTABILITATEA GLOBALĂ A SISTEMULUI DINAMIC DE PRELUCRARE

În forma sa de bază, sistemul dinamic de prelucrare este alcătuit din sistemul elastic (maşină-unealtă-dispozitiv-piesă-sculă) supus forţelor de aşchiere. Schema-bloc a acestuia este reprezentată în figura 1 *a* [9] sau, în reprezentare echivalentă, în figura 1 *b*.

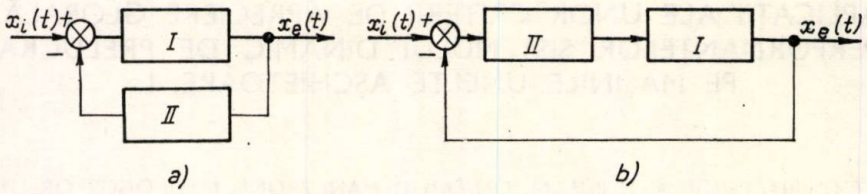


Fig. 1. — Schema-bloc a sistemului dinamic de prelucrare.

În ipoteza liniarităţii sistemelor I şi II principalele metode de cercetare a stabilităţii sistemului dinamic de prelucrare decid asupra stabilităţii (asimptotice) prin condiţii echivalente cu

$$\int_0^\infty |w(t)|\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{2.1}$$

în care $w(t)$ este funcţia de pondere (răspunsul sistemului la o funcţie impuls unitar), iar t este timpul.

În lucrările [1], [3], [8], [14] se arată că îndeplinirea condiţiilor de stabilitate derivate din (2.1) [5], [9] ş.a. nu prezintă prea multă importanţă pentru sinteza (proiectarea) sistemului dinamic de prelucrare. Din acest motiv, în lucrările [3], [4], [8], [13], [14] se propune a se aprecia stabilitatea globală (statică şi dinamică) prin criteriul

$$\int_0^\infty |w(t)|\,\mathrm{d}t < (M_2/M_1) = \varepsilon^{-1}, \tag{2.2}$$

iar instabilitatea globală prin criteriul

$$\int_0^\infty |w(t)|\,\mathrm{d}t > \varepsilon^{-1} \tag{2.3}$$

şi instabilitatea sistemului dinamic de prelucrare în regim staţionar (static) prin criteriul

$$\left|\int_0^\infty w(t)\,\mathrm{d}t\right| > \varepsilon^{-1}. \tag{2.4}$$

În relaţiile (2.2) — (2.4) M_1 este valoarea maximă a mărimii de intrare $x_i(t)$, iar M_2 este valoarea maximă a mărimii de ieşire $x_e(t)$ a sistemului din figura 1. Pentru precizarea mărimii ε în cazul prelucrărilor

de finisare (sau de semifinisare) se ţine seama că suprafaţa prelucrată se poate considera corespunzătoare dacă [1], [4], [8]

$$x_e(t) = q \leqslant q_{max} = \lambda\delta = M_2, \tag{2.5}$$

în care q este variaţia globală (statică şi dinamică) a adîncimii de aşchiere măsurată pe normala la suprafaţa prelucrată, $\lambda < 1$ este un coeficient care ţine seama de influenţa altor factori sistematici care afectează precizia de prelucrare, iar δ este cîmpul de toleranţă al suprafeţei supusă la prelucrare. Prin urmare, avînd în vedere că

$$x_i(t) = F_0 \quad \text{şi} \quad M_1 = F_{0\,max}, \tag{2.6}$$

în care F_0 este valoarea nominală (reglată) a forţei F din planul normal la suprafaţa prelucrată, se poate scrie

$$\varepsilon = (M_1/M_2) = F_{0\,max}/\lambda\delta. \tag{2.7}$$

Observaţie. La deducerea relaţiilor (2.2) şi (2.3) nu s-a făcut nici o precizare asupra naturii variaţiei ΔF a forţei F. Aceasta determină abaterea q şi are atît o componentă statică, cît şi una dinamică. Pe de altă parte, pentru $\varepsilon = 0$ relaţia (2.2) conduce la relaţia (2.1). Din aceste motive autorii consideră că este corect a asocia noţiunea de stabilitate globală (statică şi dinamică) criteriului (2.2) şi pe cea de instabilitate globală criteriului (2.3).

3. STABILITATEA ŞI INSTABILITATEA GLOBALĂ LA PRELUCRAREA CU BARE DE ALEZAT

La prelucrările cu bare de alezat rigiditatea sistemului piesei este de regulă mult mai mare decît cea a sistemului sculei. Din acest motiv sistemul elastic I (fig. 1) poate fi înlocuit printr-un model dinamic tip Kelvin cu cel mult două grade de libertate.

3.1. BARA CU SECŢIUNE CIRCULARĂ

Notînd cu D diametrul barei de alezat, cu m, c, k—parametrii dinamici echivalenţi ai sistemului sculei şi cu R raza suprafeţei prelucrate, mişcarea masei echivalente în raport cu poziţia de echilibru (corespunzătoare forţei F_0) este descrisă de ecuaţia

$$m\ddot{\nu} + c\dot{\nu} + k\nu = F, \tag{3.1}$$

iar variaţia adîncimii de aşchiere se calculează cu ajutorul relaţiei

$$\Delta a \equiv q = (a_0 - a) = \nu \sin(\bar{\alpha} + \bar{\delta}), \tag{3.2}$$

în care prin a_0 s-a notat valoarea nominală (reglată) a adîncimii de aşchiere a (fig. 2).

Aplicînd ecuaţiei (3.1) şi relaţiei (3.2) transformata Laplace în condiţii iniţiale nule, se obţine funcţia de transfer a sistemului dinamic de prelucrare din figura 2*b*

$$G(p)=\frac{q(p)}{F(p)}=\frac{\sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta})}{mp^2+cp+k}. \tag{3.3}$$

Dacă se accepta pentru F expresia

$$F=C_F a^x s^y, \tag{3.4}$$

în care C_F, x şi y sînt constante ale condiţiilor de prelucrare, iar s [mm/rot] avansul, atunci, într-o primă aproximaţie, funcţia de transfer a sistemului procesului de aşchiere capătă forma [1], [3], [8], [14] ş.a.

$$H(p)=\frac{\Delta F(p)}{q(p)}=k_a=C_F x a_0^{x-1} s^y. \tag{3.5}$$

Ţinînd seama de relaţiile (3.3) şi (3.5) funcţia de transfer a sistemului din figura 2*b* este

$$W(p)=\frac{G(p)}{1+G(p)\cdot H(p)}=\frac{\sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta})}{mp^2+cp+k+k_a\sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta})}. \tag{3.6}$$

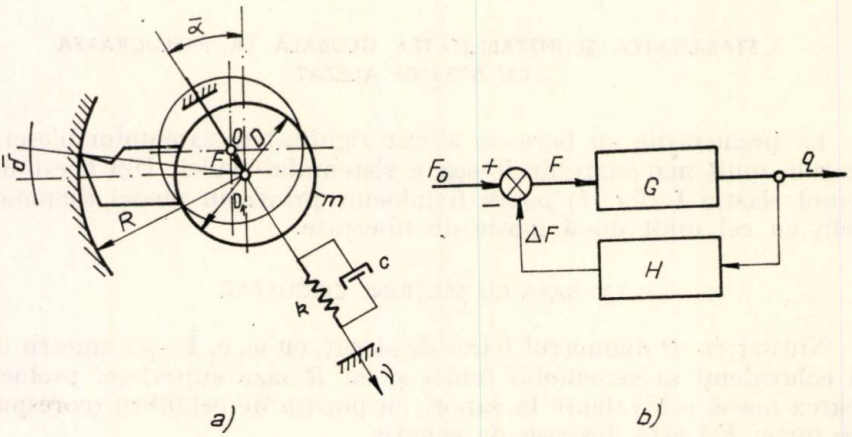


Fig. 2. — Modelul dinamic echivalent al sistemului elastic şi schema-bloc a sistemului dinamic de prelucrare la prelucrarea cu bara de alezat de secţiune circulară.

În cazul frecvent în care

$$\omega^2=\frac{k+k_a\sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta})}{m}-\frac{c^2}{4m^2}>0, \tag{3.7}$$

aplicînd relaţiei (3.6) transformata Laplace inversă se găseşte funcţia pondere

$$w(t) = \frac{\sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta})}{m\omega} e^{-\frac{c}{2m}t} \sin \omega t, \tag{3.8}$$

în care caz condiţia (2.2) se scrie [4], [11]

$$\frac{\sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta})}{k + k_a \sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta})} \cdot \psi < \varepsilon^{-1}, \tag{3.9}$$

unde

$$\psi = \frac{1 + e^{-\frac{\pi c}{2m\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi c}{m\omega}}}. \tag{3.10}$$

Condiţia (3.9) poate fi utilizată atît la analiza stabilităţii sistemului dinamic de prelucrare, cît şi la sinteza sa. De exemplu, dacă se pune problema dimensionării barei de alezat, atunci, ţinînd seama că rigiditatea se calculează cu relaţia

$$k \approx 0{,}147\, \mu \frac{ED^4}{L^3}, \tag{3.11}$$

unde L[mm] este lungimea în consolă a barei de alezat, E [N/mm^2] modulul de elasticitate al materialului barei, iar μ un coeficient care ţine seama că prinderea barei în suportul său nu reprezintă o încastrare perfectă, relaţiile (2.2), (2.7), (3.9) şi (3.11) conduc la inegalitatea

$$\frac{ED^4}{L^3} \geqslant \frac{6{,}8}{\mu}\left(\frac{F_0\psi}{\lambda\delta} - k_a\right)\sin(\bar{\alpha}+\bar{\delta}). \tag{3.12}$$

Ca aplicaţie se consideră prelucrarea unei piese din oţel carbon de calitate marca OLC-50 (St 50-DIN) folosind un cuţit din oţel rapid care are: unghiul de degajare principal de 10°, unghiul de aşezare principal de 10°, unghiul de atac principal de 45° şi unghiul de înclinare a tăişului principal de 0°. În acest caz $C_F \approx 2500$ N/mm, $x \approx 1$, $y \approx 0{,}75$ [2]. Bara de alezat are $L = 150$ mm (impusă de lungimea suprafeţei care se prelucrează), este executată din OLC-45 (St 45-DIN) şi are $\mu \approx 0{,}3$ [2]. Întrucît $k_a/k \leqslant 0{,}5$, $\varphi = c/2\sqrt{mk} = 0{,}1$, relaţia (3.10) dă $\psi = 3{,}7 \div 5$. Adoptînd, acoperitor, $\psi = 5$, pentru $\bar{\delta} \approx 0$, $\bar{\alpha} \approx \pi/6$ [1], [2], $a_0 = 0{,}5$ mm, $s = 0{,}1$ mm/rot, $\delta = 0{,}1$ mm, $\lambda = 0{,}1$, relaţiile (3.4), (3.5) şi (3.12) dau $D \geqslant 21$ mm, condiţia care se confirmă practic dacă se au în vedere rezultatele experimentale obţinute în [2].

3.2. BARA DE ALEZAT CU STABILITATE MĂRITĂ LA VIBRAŢII

Dacă bara de alezat are secţiunea transversală ca în figura 3 [6], [11], modelul dinamic echivalent are două grade de libertate. Ţinînd seama de figura 3 se obţine [2], [3], [8]

$$G(p) = \frac{q(p)}{F(p)} = \frac{\cos \bar{\alpha}_1 \cdot \cos(\bar{\alpha}_1 - \bar{\beta})}{mp^2 + c_1 p + k_1} + \frac{\cos \bar{\alpha}_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \beta)}{mp^2 + c_2 p + k_2}. \qquad (3.13)$$

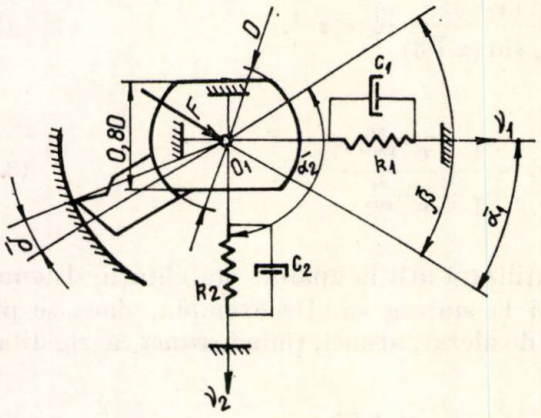


Fig. 3. — Modelul dinamic echivalent al sistemului elastic la prelucrarea cu bara de alezat cu stabilitatea mărită la vibraţii.

În acest caz, pentru $H(p)$ dat de relaţia (3.5) şi $k_1/m > c_1^2/4m^2$, $k_2/m > c_2^2/4m^2$ condiţia (2.4) conduce la [3], [11]

$$\frac{k_a \cos \bar{\alpha}_1 \cdot \cos(\bar{\alpha}_1 - \beta)}{k_1} + \frac{k_a \cos \bar{\alpha}_2 \cdot \cos(\bar{\alpha}_2 - \bar{\beta})}{k_2} \geqslant \varepsilon^{-1}. \qquad (3.14)$$

Relaţia (3.14) este adevărată pentru orice $\varepsilon > 0$ dacă

$$k_2 \cos \bar{\alpha}_1 \cdot \cos(\bar{\alpha}_1 - \bar{\beta}) + k_1 \cos \bar{\alpha}_2 \cdot \cos(\bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}) > 0,$$

care, ţinînd seama că $\bar{\alpha}_2 = \pi/2 + \bar{\alpha}_1$, se scrie

$$(k_2/k_1) > \operatorname{tg} \bar{\alpha}_1 \cdot \operatorname{tg}(\bar{\beta} - \bar{\alpha}_1). \qquad (3.15)$$

Deoarece $\bar{\alpha}_1 > 0$, iar valoarea maximă a funcţiei $\varphi(\bar{\alpha}_1) = \operatorname{tg} \bar{\alpha}_1 \cdot \operatorname{tg}(\bar{\beta} - \bar{\alpha}_1)$, se obţine pentru $\bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}/2 = \pi/4$ inegalitatea (3.15), conduce la cunoscutele condiţii de instabilitate [5], [6], [11]:

$$\bar{\alpha}_1 < \bar{\beta}; \quad k_2 > k_1. \qquad (3.16)$$

După cum se arată în lucrarea [8], aceste condiţii sînt, însă, condiţii de instabilitate statică. Neîndeplinirea lor constituie o relaţie necesară dar nu şi suficientă pentru stabilitatea dinamică a sistemului dinamic de prelucrare.

4. STABILITATEA GLOBALĂ ŞI OPTIMIZAREA PARAMETRILOR REGIMULUI DE AŞCHIERE

Este bine cunoscută importanţa care trebuie acordată determinării parametrilor regimului optim de aşchiere. În acest scop, în cazul general este necesar a rezolva o problemă de programare neliniară sau, într-o primă aproximaţie, ce s-a dovedit suficient de exactă pentru nevoile practicii, liniară [1]. Drept urmare, găsirea valorilor optime ale parametrilor regimului de aşchiere nu este condiţionată numai de stabilirea corectă a funcţiei de eficienţă (preţul de cost, productivitatea, beneficiul etc.) ci, în aceeaşi măsură, depinde şi de precizarea tuturor relaţiilor restrictive esenţiale. Print-un exemplu în cele ce urmează se indică modul în care relaţiile restrictive, derivate din condiţiile de forma (2.2), pot şi trebuiesc luate în considerare la întocmirea modelului matematic al problemei mai sus menţionate

Fie o piesă din OLC-45 (St 45 — DIN). Aceasta este prinsă în universalul unui strung de tipul S3, are lungimea în consolă $l = 150$ mm şi trebuie strunjită de la diametrul de 60 mm la diametrul $d = 59 \pm 0{,}2$ mm. Cuţitul care va fi folosit la prelucrare are tăişurile din carburi metalice (de tipul P 10) şi unghiul de degajare principal de 10°, unghiul de aşezare principal de 8°, unghiul de atac principal de 45°, unghiul de atac secundar de 10° şi unghiul de înclinare a tăişului principal de 0°. Se caută acele valori ale turaţiei (n) şi avansului (s), care realizează minimul preţului de cost la strunjirea dintr-o singură trecere cu $a_0 = \text{const}$.

În lucrarea [1] se arată că partea variabilă (cu parametrii regimului de aşchiere) a preţului de cost pe operaţie se calculează cu relaţia

$$K = \frac{L}{n \cdot s} C_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1 T}\right), \tag{4.1}$$

unde $L \approx l$ [mm] este lungimea cursei de avans, C_1 [lei/min] salariul muncitorului de la maşina-unealtă plus cota-parte aferentă din regia secţiei de prelucrare, C_2 [lei] cheltuielile legate de schimbarea sculei, iar T [min] durabilitatea sculei.

Minimul funcţiei (4.1) are loc în cadrul anumitor relaţii restrictive precizate în lucrarea [1]. Presupunînd că piesa se prelucrează pe o linie tehnologică de prelucrare şi că scula şi mecanismul de avans al strungului sînt suficient de rigide, în cele ce urmează se iau în considerare :

— relaţia Taylor-Time generalizată :

$$T^m n a^{x_v} s^{y_v} = \frac{1000 C_v}{\pi d}, \tag{4.2}$$

unde C_v, n, x_v şi y_v sînt constante ale condiţiilor de prelucrare ;

— ritmul liniei tehnologice :

$$nas \geqslant \frac{L}{R_l N_w k_0 - \tau_1}, \tag{4.3}$$

în care R_l [min/buc] este ritmul liniei tehnologice, N_w numărul de maşini-unelte folosite la aceeaşi operaţie, k_0 este coeficientul de utilizare a fondului de timp (raportul dintre fondul de timp utilizat de maşina-unealtă şi cel planificat), iar τ_1 [min] partea din norma tehnică de timp a operaţiei care nu depinde de parametrii regimului de aşchiere;

— cinematica maşinii-unelte:

$$n_{\min} \leqslant n \leqslant n_{\max}, \qquad s_{\min} \leqslant s \leqslant s_{\max}, \tag{4.4}$$

unde $n_{\max}$, $n_{\min}$ şi $s_{\max}$, $s_{\min}$ sînt valorile limită ale turaţiei, respectiv ale avansului, impuse de cinematica maşinii-unelte;

— puterea motorului care dă viteza principală de aşchiere:

$$na^x s^y = \frac{6{,}12 \cdot 10^6 \eta P_0}{\pi d C_{F_z}}, \tag{4.5}$$

în care C_{F_z}, x şi y sînt constante (menţionate deja), P_0 [kW] este puterea nominală a motorului, iar η randamentul lanţului cinematic principal;

— rugozitatea suprafeţei prelucrate:

$$s^{1{,}07} \leqslant \frac{R_l r^{0{,}65}}{0{,}21}, \tag{4.6}$$

unde R_l [mm] este rugozitatea maximă admisă a suprafeţei prelucrate, iar r [mm] este raza de rotunjire a tăişurilor cuţitului.

Deoarece rigiditatea sistemului sculei este presupusă mult mai mare decît cea a sistemului piesei, o nouă relaţie restrictivă se obţine combinînd relaţiile (2.7), (3.5) şi (3.9) în cazul care $a = a_0 = \text{const.}$ şi $x = 1$:

$$s^y \leqslant \frac{k\lambda\delta}{C_F(\psi a^x - \lambda\delta)\sin(\bar{\alpha} + \bar{\delta})}. \tag{4.7}$$

Eliminînd variabila T între funcţia (4.1) şi relaţia (4.2) se găseşte

$$K \approx \left(\frac{1000\, C_v}{\pi d}\right)^{-\frac{\lambda_2}{m}} \frac{\lambda_3 C_1 L}{n^{\frac{m-\lambda_2 x_v}{m}} \cdot s^{\frac{m-\lambda_3 y_v}{m}}}, \tag{4.8}$$

unde λ_2 şi λ_3 sînt constante care se determină după metodica expusă în lucrarea [1].

Pentru $C_{F_2} = 2000$ N/mm, $m = 0{,}2$, $x = 1$, $y = 0{,}75$[1]; $C_{F_2} = C_F \cos\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \approx \pi/6$, $\bar{\delta} \approx 0$, $a = 0{,}5$ mm, $L \approx l = 150$ mm, $R_l = 5$ min/buc, $N_w = 1$,

$k_0 = 0{,}85$, $\tau_1 = 0{,}75$ min, $\eta = 0{,}8$, $P_0 = 7$ kW, $R_t = 0{,}0625$ mm, $r = 1$ mm, $n_{max} = 1200$ rot/min, $n_{min} = 11{,}5$ rot/min, $s_{max} = 1{,}59$ mm/rot, $s_{min} = 0{,}082$ mm/rot; $k = 7.10^6$ N/mm [1] (în capătul liber al piesei), $\lambda = 0{,}3$, $\delta = 0{,}4$ şi $\lambda_2 = 0{,}1515$,

$$x_1 = \lg n; \quad x_2 = \lg (100\ s), \qquad \Phi = \lg K; \quad \Phi_0 = \lg (1000\ C_v/\pi d), \tag{4.9}$$

se obţine modelul unei probleme de programare liniară:

$$\Phi \approx \Phi_0 - 0{,}2425x_1 - 0{,}735x_2 \to \min \tag{4.8'}$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 3{,}13, \tag{4.3'}$$

$$\begin{cases} 1{,}06 \leqslant x_1 \leqslant 3{,}08, \\ 0{,}91 \leqslant x_2 \leqslant 2{,}22, \end{cases} \tag{4.4'}$$

$$x_1 + 0{,}75\ x_2 \leqslant 4{,}70, \tag{4.5'}$$

$$x_2 \leqslant 1{,}52, \tag{4.6'}$$

$$x_2 \leqslant 1{,}45. \tag{4.7'}$$

Rezolvarea grafică a problemei la care s-a ajuns poate fi urmărită în figura 4.

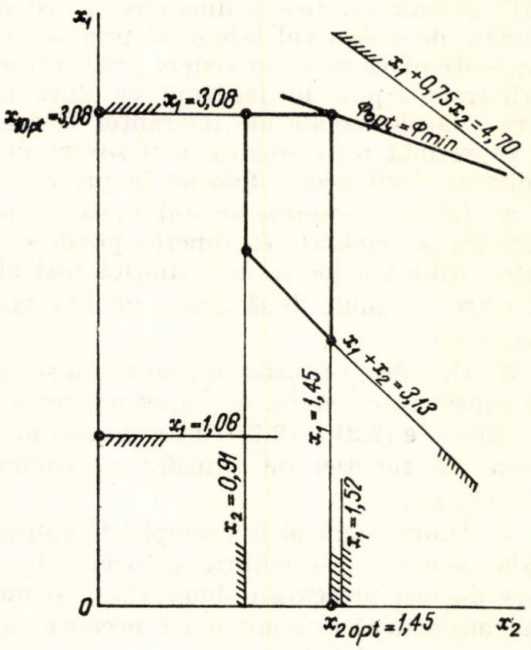


Fig. 4. — Rezolvarea grafică a modelului matematic al problemei determinării parametrilor optimi ai regimului de aşchiere.

Se constată că $n_{opt} = 10^{x_{1\,opt}} = 1200$ rot/min, $s_{opt} = 10^{x_{2\,opt}/100} = 0{,}286$ mm/rot sînt determinate şi de relaţia (4.7'), adică de condiţia stabilităţii globale a sistemului dinamic de prelucrare.

Reglînd cuţitul la diametrul de 59 mm şi prelucrînd piesa în condiţiile menţionate mai sus, la care se adaugă $n = 1200$ rot/min şi $s = 0{,}3$ mm/rot, s-a obţinut $d_{max} = 59{,}10$ mm (în capătul liber al piesei) şi $R_t = 0{,}059$ mm, ceea ce arată că suprafaţa corespunde preciziei impuse.

Observaţie. Într-una din lucrările în curs de elaborare autorii, luînd ca punct de plecare cele mai recente metode de optimizare şi de control optimal, expuse într-o prelucrare adecvată în preambulele tezelor de doctorat [15] — [16], vor trata un şir de probleme noi de dinamica mecanismelor şi maşinilor, utilizînd pentru obţinerea rezultatelor numerice şi grafice corespunzătoare, îndeosebi în cazul modelelor matematice neliniare în care se ţine seama şi de argumente întîrziate [18] — [19], aparatajul computerial al Centrului de Calcul digital, analogic şi hibrid al Departamentului de Matematică al Universităţii din Alberta, iar într-o altă lucrare se vor prezenta noi aplicaţii ale Mecanicii analitice tehnice, inaugurată cu atîta succes cu ani în urmă în teza de doctorat a prof. dr. doc. şt. N. Irimiciuc şi expusă sistematic în volumele cu totul recente ale cursului de Mecanică aplicată în Inginerie, editate de Institutul politehnic din Iaşi.

5. CONCLUZII

1°. Criteriile de forma (2.2) şi (2.3) dau posibilitatea aprecierii stabilităţii globale (statice şi dinamice) a sistemului dinamic de prelucrare în funcţie de obiectivul tehnic al prelucrării şi anume precizia suprafeţei aşchiate (dacă se au în vedere prelucrările de degroşare, atunci aceste criterii trebuie puse în legătură cu durabilitatea tăişurilor sculei [1]). Pentru valorile uzuale ale toleranţei δ, condiţiile derivate din (2.2) şi (2.3) reprezintă nişte condiţii mai severe de stabilitate, respectiv de instabilitate, decît acelea folosite în prezent [5], [9], [11] ş.a.

2°. Întrucît criteriile de stabilitate şi instabilitate globală prezentate se bazează pe cunoaşterea funcţiei pondere a sistemului dinamic de prelucrare, utilitatea lor se face simţită mai ales în cazul în care sistemul elastic are cel mult două grade de libertate (situaţii frecvent întîlnite în practică).

3°. Deşi drept funcţie de transfer a sistemului procesului de aşchiere a fost considerată rigiditatea statică a forţei de aşchiere [9] dată de relaţia (3.5), criteriile (2.2) şi (2.3) sînt generale, putîndu-se aplica şi pentru alte expresii ale funcţiei de transfer a sistemului procesului de aşchiere [10], [11] ş.a.

4°. Dintre multiplele exemple de aplicare a criteriilor de stabilitate globală (sau de instabilitate globală) [1] — [4], [8], [14], în prezenta lucrare au fost prezentate două. Chiar şi numai prin prisma acestora se poate considera că este justificată necesitatea şi utilitatea folosirii criteriilor de apreciere globală a performanţelor sistemului dinamic de prelucrare pe maşinile-unelte aşchietoare.

Primită la redacţie la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. S. T. Chiriacescu, *Contribuţii la studiul stabilităţii dinamice a proceselor de prelucrare pe maşinile-unelte aşchietoare*, Teza de doctorat, Institutul politehnic din Iaşi, 1971.
2. — *Global stability of boring bar*, Bul. Univ. din Braşov (sub tipar).
3. S. T. Chiriacescu, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, *Beitrag zum Studium der Ermittlung der Instabilität des dynamischen Arbeitsystem spanabhebender Werkzeugmaschinen*, Mechanism and Machine Theory, **9**, *1*, 37—48, (1974).
4. S. T. Chiriacescu, a) *Stability of dynamic machining system and the performance criteria of the adaptive control of machine tools*, Lucrare susţinută la „Conferinţa de maşini-unelte a Universităţii tehnice din Praga", 4—6 iulie 1973.
   b) *Stabilitatea globală şi sistemele ACC*, Conferinţa naţională de scule aşchietoare Braşov, 1972.
5. O. Daňek, L. Špaček, M. Poláček, J. Tlustý, *Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen*, BEV Verlag Technik, 1962.
6. L. K. Kucima (Кучма, Л. К.), *Виброустойчивые расточные оправки*. Вестник машиностроения 9, 12—16, 1956.
7. В. А. Кудинов, *Динамика станков*. Изд. машиностроение, Москва, 1967.
8. S. T. Chiriacescu, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, a) *Stabilität der Hauptwellen spanabhebender Werkzeugmaschinen*, Industrie-Anzeiger Nr. 14. Ausgabe „Werkzeumaschine und Fertigungstechnik" (2. Heft), 1973, pp. 1—6.
   b) *Beitrag zum Studium der parametrischen Stabilität der Hauptwellen spanbhebender Werkzeugmaschinen*, Theorettitschna i priloschna Mechanika, **4**, *1*, 45—57.
9. H. E. Meritt, *Theory of self-excited machine tool chatter*. Trans. ASME, B87, 4, 1965, p. 447—454 (1973).
10. J. Milberg, *Das Übertragungsverhalten des Zerspanungsprozesses*, Ind. -Anzeiger, 94. 58. 1972, p. 1145—1146.
11. S. A. Tobias, *Machine tool vibration*. London, Glasgow, Blachie, 1965.
12. P. Vanherck, *Aperçu général des études du coefficient dynamique de coupe*, Annals of the C.I.R.P., 18, 1970, p. 501—511.
13. S. T. Chiriacescu, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, *Sur la stabilité asymptotique des pièces à usiner lors du tournoiement*, Proceedings of the Fourth Canadian Congress of Applied Mechanics. Montreal, May 28-June 1, 1973. CANCAM 1973, p. 457—458.
14. — *Der Einfluss des Drehbankherzens auf die asymptotische Stabilität des Werkstücksystems beim Drehen*, Utilitas Mathematica, **3**, 251—284 (1973).
15. N. Orlandea, *Node-analogous, sparcity oriented Methods for Simulation of Mechanical Dynamic Systems*, Ph. D. Thesis. The University of Michigan, 1973.
16. N. Ioniţă, *Sinteza optimală a mecanismelor plane cu aplicaţii în Construcţii de maşini şi Metalurgie*, Teză de doctorat. Institutul politehnic din Iaşi, 1974.
17. C. Huiu, *Contribuţia la dinamica grafică şi analitică*, Teză de doctorat. Institutul politehnic din Iaşi, 1972.
18. V. F. Poteraşu, *Metode de optimizare în studiul sistemelor de corpuri elastice*. Teză de doctorat. Institutul politehnic. Iaşi, 1971.
19. M. N. Oguztoreli, D. Mangeron, *Optimal problems in distributed parameter control systems*, Archivum Mathematicum, **4**, *2*, 85—92, (1969).
20. D. Mangeron, N. Irimiciuc, *Curs de Mecanică cu aplicaţii în inginerie*. Vol. I, fasc. 1—3, Vol. II, fasc. 1—3, Institutul politehnic Iaşi, 1974. Vol. III (în pregătire).

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

ASPECTE PARTICULARE ÎN FUNCŢIONAREA RULMENŢILOR AXIALI CU BILE

de M. D. GAFIŢEANU, N. G. POPINCEANU, D. D. BONTAŞ,
Institutul politehnic Iaşi

În lucrare sînt prezentate particularităţi în funcţionarea intermitentă a rulmenţilor axiali cu bile pentru ambreiaje. Sînt puse în evidenţă efecte de dezaxare cu consecinţe asupra durabilităţii determinate de uzura coliviei. Încercările pe rulmenţi au confirmat aceste observaţii.

Încercări de uzură pe epruvete au dus la concluzii cu privire la influenţa materialului şi a formei suprafeţei de contact bilă-colivie asupra vitezei de uzură.

1. INTRODUCERE

Nu sînt rare cazurile în care durabilitatea rulmenţilor în exploatare nu este determinată de clasicele fenomene de tip „pitting". Literatura menţionează, pentru anumite condiţii, deteriorări prin uzura căilor sau corpurilor de rulare, uzura sau ruperea coliviilor, alterarea sau pierderea lubrifiantului cu consecinţe imediate în accelerarea generală a fenomenelor de deteriorare [1], [4].

Cu o dezvoltare mai rapidă decît deteriorările de pitting, deteriorările particulare menţionate prezintă un deosebit interes atît din punct de vedere ştiinţific, cît şi economic.

Prin fenomenele de uzură şi ruperile constatate pe colivii, rulmenţii axiali cu construcţie de tip casetă şi cu funcţionare intermitentă (ambreiaje), constituie un exemplu caracteristic.

Lucrarea de faţă îşi propune, în primul rînd, să elucideze cauzele apariţiei acestor deteriorări, să discute eventualele influenţe şi să pună în evidenţă posibilităţile de reducere a efectelor lor, deci de prelungire a duratei de funcţionare a rulmenţilor.

2. CONDIŢII DE FUNCŢIONARE — FENOMENE DE DETERIORARE

O construcţie obişnuită de rulment axial cu bile, cu casetă pentru funcţionarea intermitentă este prezentat în figura 1. Caseta are rolul de a menţine lubrifiantul în interiorul rulmentului o durată de timp cît mai mare concomitent cu împiedicarea poluării lui din exterior.

Condițiile de funcționare pentru asemenea rulmenți, folosiți la ambreiaje sînt relativ grele : turații mari, apropiate sau chiar depășind limita

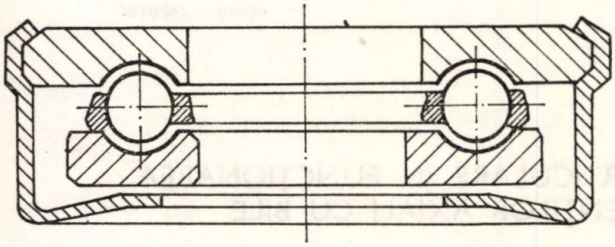


Fig. 1. — Construcție de tip casetă pentru un rulment axial cu bile

impusă de ungerea cu unsoare consistentă, temperaturi ridicate (pînă la 120°C), funcționare intermitentă cu sarcini variind între 0 și C/8...C/10 în intervale de timp reduse (0,3...0,5 s) și cu frecvență ridicată (80...100 acționări/oră), imposibilitatea înlocuirii lubrifiantului în funcționare, montarea într-o zonă insuficient protejată față de particulele abrazive. Deși durata lor în funcționare efectivă este de numai 5...6% din durata de lucru a motorului, deteriorarea acestor rulmenți este un eveniment frecvent. Aceste constatări rezultate din cercetările efectuate în Departamentul de Organe de Mașini se adaugă la faptul că în marea lor majoritate (95%) deteriorările se produc mai întîi la nivelul contactelor bile-colivii. Prin uzură de tip adeziv, în prezența unor particule abrazive provenite chiar din procesul propriu de uzură ca și din exterior orificiile din colivii se alungesc pe direcția tangențială (fig. 2), bilele capătă astfel un joc însemnat care în funcționare determină apariția unor vibrații și zgomote caracteristice și în final ruperea coliviei și distrugerea rulmentului.

Dezvoltarea acestui fenomen de uzură mixt (adeziv + abraziv) este nfluențată de următorii parametri specifici :

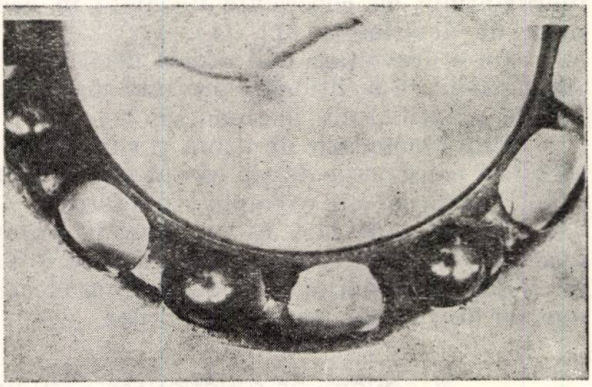


Fig. 2. — Fenomen de deteriorare prin uzură de colivii

— parametri funcționali : viteză relativă de alunecare și sarcină de apăsare cu eventuala modificare a tipului de uzură (trecere la gripare);
— parametri metalurgici ;
— parametri perturbatori dintre care reținem influența particulelor abrazive rezultate din uzură și menținute în zona de contact datorită caracterului lubrifiantului precum și acționările cu caracter de șoc și regimurile vibratorii aferente.

O comparație între cifre convenționale de durabilitate observate în exploatare este dată în figura 3.

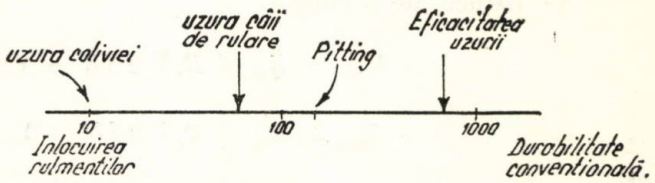


Fig. 3. — Comparație între cifrele de durabilitate convenționale corespunzătoare diferitelor fenomene de deteriorare

3. ASPECTE FUNCȚIONALE SPECIFICE

În cazul rulmenților studiați, parametrii funcționali, viteza relativă de alunecare și sarcina de apăsare intervin în mod cu totul deosebit și aduc uzura coliviei pe prim plan în analiza fenomenelor de deteriorare.

În realitate, în poziția de repaus, inelele rulmentului sînt dezaxate cu mărimea e (fig. 4) dependentă de jocul axial (J_a) dintre inelul fix și casetă și de razele căilor de rulare (R_c) și bilelor (R_r).

Apăsarea axială exercitată pe rulment, odată cu rotația inelului rotitor ar determina astfel rotația bilelor cu viteze diferite : la corpurile de rulare aflate în partea superioară ωR_{max}, iar pentru partea inferioară cu viteza ωR_{min}. Bilele sînt însă reținute de colivie și se deplasează odată cu ea ; bilele din partea superioară tind să accelereze mișcarea coliviei, cele din partea inferioară să o frîneze ; apar forțe de apăsare importante la nivelul contactelor superioare și inferioare între bile și colivie cu viteze relative de alunecare însemnate (10...20 m/s), determinînd și fenomenele de deteriorare prin uzură amintite.

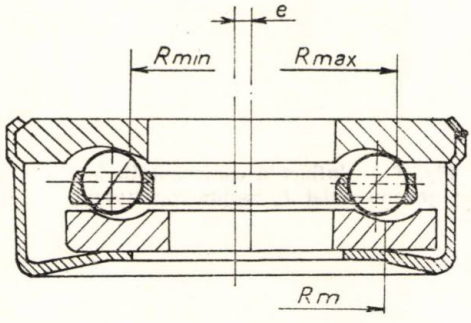


Fig. 4. — Schemă explicativă

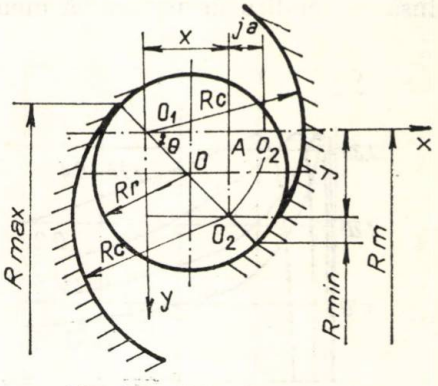


Fig. 5. — Schemă explicativă

Exprimarea calitativă a intervenției acestor forțe de apăsare însemnate pe suprafețele de contact s-a făcut cu ajutorul raportului de viteze în situația descrisă mai sus :

$$\rho = R_{max}/R_{min}. \tag{1}$$

Cu ajutorul schemei din figura 5, raportul poate fi apreciat astfel :

$$X = 2(R_c - R_r) - J_a = 2\Delta R - J_a, \tag{2}$$

$$Y = \sqrt{4R\Delta J_a - J_a^2}. \tag{3}$$

Se deduce, de asemenea,

$$R_{max} = R_m + R_r Y/2\Delta R - Y/2, \tag{4}$$

$$R_{min} = R_m - R_r Y/2\Delta R - Y/2 \tag{5}$$

și

$$\rho = \frac{R_m - R_r Y/2\Delta R - Y/2}{R_m + R_r Y/2\Delta R - Y/2}, \tag{6}$$

cu valori date în figura 6 pentru diverse conformități $\beta = (R_c - R_r)/R_r$ și jocuri axiale J_a.

Se observă astfel influența negativă a creșterii jocului axial în domeniul uzual de conformități (5%). Creșterea conformității are, de de asemenea, influențe favorabile.

Intervenția și creșterea forței exterioare axiale produce o tendință de autocentrare și de reducere deci a raportului ρ;
este normal însă că autocentrarea nu este perfectă și că funcționarea rulmentului, chiar sub sarcină maximă, este caracterizată de o anumită valoare redusă pentru ρ, suficientă însă ca să determine evoluția fenomenelor menționate.

Durabilitatea rulmenților depinde astfel nu numai de numărul de cuplări, ci chiar numai de faptul dacă este vorba de o singură cuplare, însă în condiții de natură să mențină în timp o valoare $\rho > 1$.

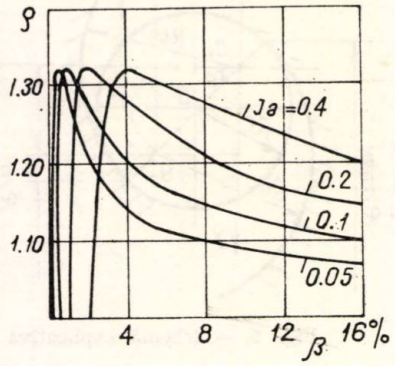


Fig. 6. — Influența conformității β și a jocului axial J_a asupra raportului ρ

4. ÎNCERCĂRI DE RULMENȚI LA DURABILITATE

4.1. *Stand pentru încercări.* Pentru această categorie de încercări, în condiții care să permită atît încărcarea constantă, cît și încărcarea variabilă pulsantă, specifică rulmenților pentru ambreiaje, s-a conceput mașina reprezentată schematic în figura 7, compusă din :

I. Subansamblu de antrenare : electromotor *2*, curele trapezoidale *3*, arbore *4*, disc de antrenare *5*, Dacă discul *5* este în contact cu unul din inelele rulmentului axial *1*, acesta poate fi antrenat în mișcare de rotație.

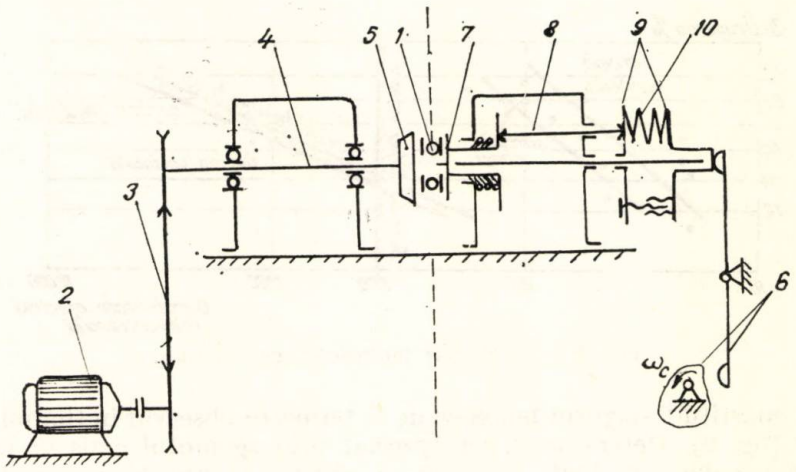
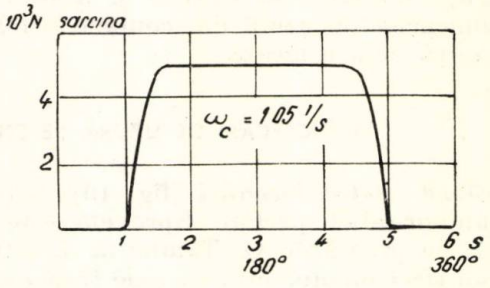


Fig. 7.

II. Subansamblu de încărcare. Forța de încărcare se transmite rulmentului încercat *1*, montat pe axul *7*, prin intermediul tijelor *8* (3 tije) și al discului *9* asupra cărora acționează tachetul oscilant *6* antrenat de un alt electromotor cu reductor melcat. Între suprafețele discurilor *9* sînt interpuse arcurile *10*, precomprimate cu mecanismul șurub-piuliță *11*. Variația în timp a sarcinii pentru fiecare din posturile de lucru care lucrează cu variația de sarcină pulsantă este arătată în figura 8.

Fig. 8.



4.2. *Condițiile de încercare* au fost următoarele : sarcina constantă 5000 N, pulsantă 0 ... 5000 N (fig. 8), turația rulmentului $143^{1/s}$, temperatură 45°C, ungere cu unsoare consistentă.

4.3. *Rulmenții încercați*, au fost rulmenți axiali cu bile tip 588711, în construcție capsulată pentru ambreiaje, cu următoarele dimensiuni caracteristice : 9,525 mm — diametrul bilei, 5,0 mm — raza căilor de

rulare de pe inele, 68,5 mm — diametrul mediu al căilor de rostogolire, 15 — numărul de bile.

4.4. *Metodica de încercare* a fost metodica rapidă elaborată în catedra de Organe de Mașini a I.P.I. [7], aplicată pentru uzura coliviilor

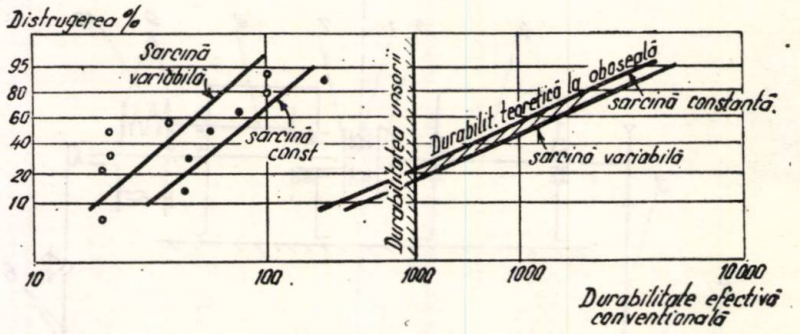


Fig. .9 — Rezultatele încercărilor de rulmenți.

care a constituit singurul fenomen de deteriorare observat în timpul încercărilor (fig. 2). Deteriorarea s-a apreciat prin zgomotul emis în funcționare și a coincis în toate cazurile cu uzuri — la nivelul locașurilor din colivii — de 0,8 ..., 1,0 mm ovalizare pe direcția tangențială.

Rezultatele încercărilor sînt prezentate în figura 9.

Analiza rezultatelor din figura 9 pune în evidență, durabilitatea redusă a rulmenților încercați, în comparație cu cea teoretică datorită fenomenelor de uzură la nivelul contactelor bile-colivie. Aceste fenomene sînt mai accentuate în cazul în care rulmenții sînt încărcați după ciclul din figura 8, adică în condiții în care efectele de dezaxare se produc — la proporții maxime — în număr sporit.

Contactele bile-colivie apar astfel ca o zonă critică — hotărîtoare pentru durabilitatea rulmentului.

Influența materialului coliviei și a formei suprafeței de contact asupra fenomenelor de uzură din contactele bile-colivie a fost studiată pe modele după cum urmează.

5. ÎNCERCĂRI DE UZURĂ PE EPRUVETE

5.1. *Stand pentru încercări* (fig. 10); este cu geometrie de uzură de tipul tambur-sabot parțial. Epruveta este încărcată prin brațul *2* și pîrghia *1*, cu greutățile G. Tamburul *5*, este antrenat în mișcare de rotație de un electromotor prin curelele trapezoidale *3* și arborele *4*.

5.2. *Condițiile de încercare* s-au adoptat astfel: $v = 7{,}25$ m/s și forța de apăsare 16,2 N. Ungere inițială, pentru fiecare epruvetă încercată cu ulei 413 (13°E/50°C).

5.3. *Epruvete.* S-au folosit două categorii de epuvete (fig. 11): a) epruvete de tip subțire, la care suprafața de contact a fost limitată la 16 mm², și epruvete de tip b și c, la care suprafața de contact cu tamburul, inițial liniară, putea evolua pînă la 324 mm², respectiv 110 mm².

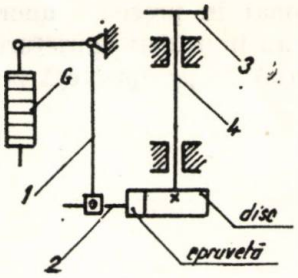


Fig. 10. — Standul pentru încercări de uzură pe epruvete

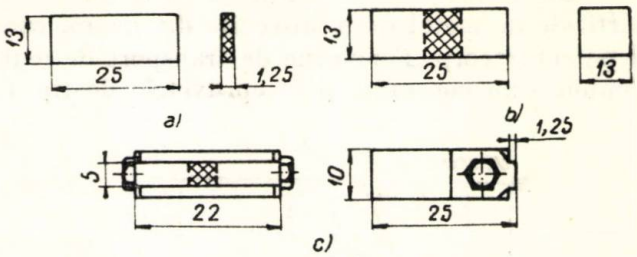


Fig. 11. — Tipuri de epruvete încercate

Dimensiunile tamburului au fost 62 mm × 15 mm.

Materialele încercate sînt specificate în tabelul 1.

Pentru fiecare tip de epruvetă s-au efectuat cîte trei determinări, calculîndu-se valoarea medie a volumului de material îndepărtat prin

Tabelul 1

Materialele încercate

Nr. test	Epruvetă fip	Materialul	Tratament	Duritate
1	a	GOST 914—56 08 Kp—VG—I	netratat	120 HB
2	a	idem	cementare+călire+revenire 400°C	40—45 HRC
3	b	STAS 880—68 OLC 10	cementare+călire+revenire 400°C	40 HRC
4	b	Bronz	netratat	126 HB
5	c	GOST 914—56 08 Kp—VG—I	netratat	120 HB
Tambur		RUL 1 STAS	călire+revenire	62 HRC

uzură, după diferite intervale de timp. Rezultatele sînt prezentate în figura 12.

Rezultatele pun în primul rînd în evidență sensibilitatea deosebită a epruvetei de tip 1, ca și pentru o perioadă inițială de timp a epruvetei de tip 4. Epruvetele de tip 2, 3, 5 s-au dovedit mult mai rezistente la uzură în condițiiie date. Raportul vitezelor de uzură pentru încercările de tip 1/5 este aproximativ 13.

Toate epruvetele de construcție b și c au prezentat fenomene de uzură cu tendință de stabilizare ca urmare a creșterii suprafeței de contact în timp, pentru sarcină de apăsare constantă.

Epruvetele tratate termic *2* și *3* au funcționat în prezența unor particule de metal dure provenite din uzură, care au imprimat zgîrieturi și pe contracorp. Fenomene de transport de material de pe epruvetă pe tambur s-au constatat și la epruvetele de tip 4.

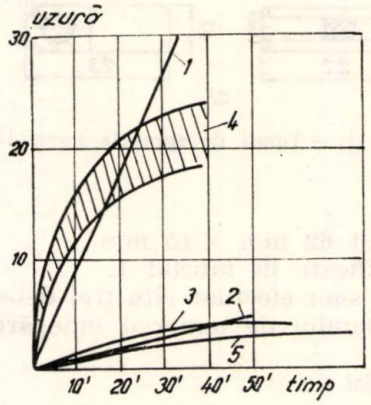


Fig. 12. — Rezultatele încercărilor de uzură în mm³.

6. CONCLUZII

a. Cercetări în exploatare au pus în evidență fenomene de uzură la coliviile rulmenților axiali cu casetă pentru ambreiaje, fenomene determinante în durabilitatea rulmenților respectivi.

b. Analiza funcțională a acestor rulmenți explică apariția acestor fenomene de deteriorare prin funcționarea dezaxată cu viteze virtual diferite pentru corpurile de rulare și deci cu solicitări însemnate pentru contactele bile-colivii. Este subliniată influența jocului axial și a conformității.

c. Încercările de rulmenți pe stand au dus la aceleași fenomene de deteriorare ca și încercările de exploatare.

d. Încercările de uzură pe epruvete au pus în evidență o comportare deosebită pentru materialele încercate, cu avantaje pentru materialele de tip oțel netratate, cu suprafețe de contact sporite.

Primit la redacție la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Th. Barrish, *Bal Speed Variation in Ball Bearings and its Effects on Cage Design*, Lubrication Engineering, march. 1969, p. 110—115.
2. O. Biță, I. Dincă, *Cîteva aspecte fundamentale ale procesului de uzură*, St. cerc. mec. apl., **XI**, 1 (1958).
3. O. Biță, I. Dincă, *Aspecte ale influenței naturii suprafețelor în frecare asupra rezistenței la abraziune*, St. cerc. mec. apl., **XIII**, 2 (1962).

4. W. R. Hinton, *A theoretical Study of the Effect of Angular Misalignement on Ball, Bearing Cage Life*, Wear, **16**, nr. *3* (1970).
5. V. I. Kostețki, *Sorotivlenie iznașivraniu detalei mașin*, Mașghiz, Moskva, 1959.
6. D. Pavelescu, *Stadiul actual al cercetărilor în domeniul uzurii*, St. cerc. metalurgice, *1*, (1966).
7. N. G. Popinceanu, M. D., Gafițanu, Contribuții asupra noilor metode de încercare ale rulmenților, St. cerc. mec. apl., **XVIII**, *2* (1967).
8. Takazi Rusten, Tsuya Yuko, *Effect of Wear Particles on the Wear Rate of unlubricated Sliding metals*, Wear, vol. 6, 1962.
9. Gh. Vasilca, O. Biță, I. Dincă, *Acțiunea concomitentă în procesele de frecare și uzură a fazelor dure și moi*. St. cerc. mec. apl., **XV**, *3*, (1964).
10. Gh. Vasilca, O. Biță, *Procesele de lubrificație, frecare și uzură la suprafețele metalice*, Ed. Acad. RSR, 1967.
11. * * * FAG Katalog

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

DEFINIREA CRITERIALĂ A CAPACITĂŢII DE TRACŢIUNE LA TRANSMISIILE PRIN CURELE

de N. S. GHEORGHIU, N. IONESCU

Institutul politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Prin analiza dimensională a relaţiilor general valabile ce descriu procesul transmiterii de putere la curele, se stabilesc invarianţii caracteristici şi criteriile de similitudine specifice.

În acest mod devine posibilă compararea obiectivă a două soluţii constructive distincte, programarea raţională a experimentelor, precum şi optimizarea dimensionării.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Funcţionarea în regim staţionar a unei transmisii prin frecare cu element real flexibil şi extensibil este parţial descrisă prin sistemul de relaţii

$$\forall\{\mu\beta_{al}\} \neq \Phi \exists T_2^* = T_1^* e^{-\mu\beta_{al}}; \quad F_t = T_1^* - T_2^* = \frac{M_{t1,2}}{R_{p1,2}}, \tag{1}$$

dedus din analogia aproximativă de comportament ce se poate stabili între curea şi firul extensibil aflat în echilibru dinamic pe o suprafaţă cilindrică aspră în rotaţie uniformă [2].

Unde cu notaţiile din figura 1, pentru $j \in [0; 1; 2]$,

$T_j^* = T_j - \frac{m_{01}}{f_j} v_j^2$ reprezintă componenta efortului activ din ramuri pentru viteza curelei $v_j = \omega_j R_{pj}$;

$f_j = 1 + \frac{T_j}{E_t A_c}$ este funcţia Kretz ce descrie comportamentul elastic al curelei de rigiditate $E_t A_c$;

$m_{01} = \rho_0 A_c$ constituie masa liniară a curelei netensionate.

Analiza capacităţii de tracţiune devine posibilă numai dacă sistemului de relaţii general valabile (1) i se asociază o legătură suplimentară între efortul iniţial T_0 şi componentele efortului activ $T_{1,2}^*$. Astfel se

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975, P. 375–384

corelează modul de tensionare inițială cu funcționarea în sarcină și, concomitent, se delimitează particularitățile de comportament ce corespund unui sistem de tensionare dat.

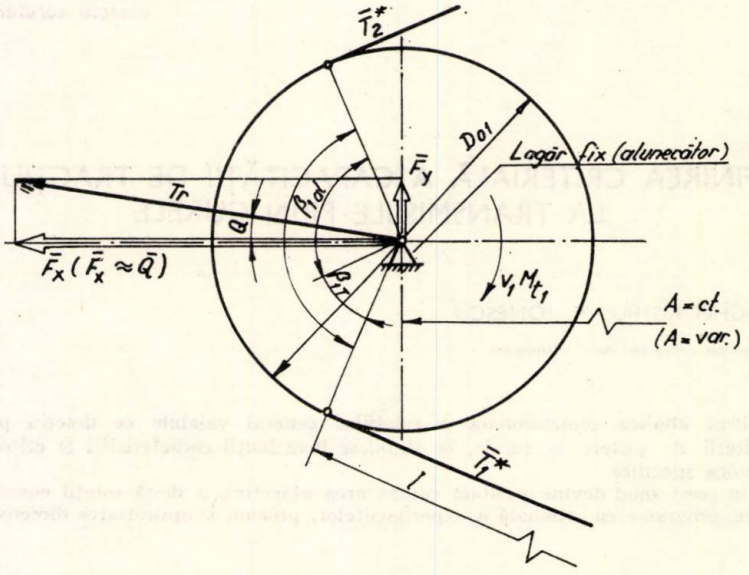


Fig. 1

Transmisiile cu tensionare permanentă sînt reglate inițial pentru un domeniu limitat de viteze și o valoare unică a cuplului rezistent:

$$M_{rez} = \lim_{\beta_{a1} \to \beta_1} M_{t_2}. \tag{2}$$

Pentru oricare altă alternativă funcțională, posibilitățile de tracțiune sînt incomplet utilizate sau apare patinarea. Acestei categorii îi aparțin trei soluții constructive distincte funcțional:

— Transmisia cu distanța între axe și lungimea primitivă variabile $\{A;\ L_p = \text{var.}\}$ la care tensionarea inițială se realizează prin acțiunea unei forțe invariabile, aplicată asupra arborelui motor sau condus și dirijată după linia centrelor.

Rezemarea alunecătoare a arborelui de comandă compensează continuu deformațiile curelei și ca urmare:

$$2T_0 = T_1^* + T_2^* = \text{const.} \tag{3}$$

— Transmisia cu rolă de întindere $\{A = \text{const};\ L_p = \text{var.}\}$ este tensionată prin încărcarea ramurii conduse cu o forță practic invariabilă,

$$T_0 = T_2^* = \text{const.}$$

Bascularea (cursa) rolei de întindere conservă contactul forțat optimal rolă/ramură condusă și compensează deformațiile curelei doar pentru un singur sens de rotație.

— Transmisia cu distanța dintre axe și lungimea primitivă fixe $\{A\ ;\ L_p = \text{const.}\}$ realizează tensionarea inițială prin montarea curelei cu o deformație împiedicată :

$$2T_0^* = C_{11}T_1^* + C_{21}T_2^*, \tag{5}$$

unde, prin coeficienții adimensionali,

$$\forall \beta_{ad_{1,2}} = \beta_{1,2} - \beta_{al} \exists C_{11} = e^{-\mu\beta_{al}} \left[\left(\frac{A}{R_{p_1}} \sin \frac{\beta_1}{2} + \beta_{ad_1} \right) e^{\mu\beta_{al}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{A}{R_{p_1}} \sin \frac{\beta_1}{2} + i\beta_{ad_2} \right) - \frac{1 - e^{\mu\beta_{al}}}{\mu} (i + 1) \right] = C_{21} e^{-\beta_{al}},$$

s-a exprimat condiția de invariabilitate a deformației împiedicate în stare de repaus și la funcționarea în gol sau sarcină cu $v = \text{const.}$ [3].

Se menționează că, indiferent de modul de tensionare, expresia reacțiunii pe arbore rămîne formal identică :

$$\forall \{\mu\beta_{al}\ ;\ v\} \neq \Phi \exists T_r = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}\ ;\ \theta = \text{arc tg} \frac{F_y}{F_x}, \tag{6}$$

unde, conform figurii 1,

$$F_x = (T_1^* + T_2^*) \cdot \sin \frac{\beta_1}{2}\ ;\quad F_y = F_t \cdot \cos \frac{\beta_1}{2},$$

sînt proiecțiile reacțiunii în raport cu sistemul ortogonal de axe *xoy* legat de linia centrelor.

2. CORELAȚII CRITERIALE SPECIFICE TENSIONĂRII PERMANENTE

Dacă se observă că transmisiile prin curele sînt geometrice asemenea (cu sau fără distorsiuni), iar materialul curelei este caracterizat printr-o anumită funcție reologică de stare, analiza dimensională a mărimilor fizice determinante,

$$T_j\ ;\ F_t\ ;\ \frac{m_{01}}{f}\ ;\ v \text{ și } 2T_0,$$

definește seria completă de invarianți caracteristici (în SI):

$$\forall\{\mu\beta_{al}\} \neq \Phi \cup R(\sigma_j;\ \varepsilon_j,\ t) = 0 \exists\, \tau_j \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{T_j}{2T_0};\quad \varphi \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{F_t}{2T_0};$$

$$v^* \overset{\text{def.}}{=\!=} v\left(\frac{m_{01}}{f_0}\cdot\frac{1}{T_0}\right)^{1/2} = (f_0 N_0)^{-1/2}, \tag{7}$$

unde $N \underset{\text{eo}}{\overset{\text{def.}}{=\!=}} \dfrac{T_0}{v^2 \cdot m_{01}}$ reprezintă criteriul Newton.

Semnificațiile lor fizice vor fi: efort din ramuri sau reacțiune pe arbore (τ_j), forță tangențială și/sau cuplu transmis de roata motoare (φ), respectiv viteză (v_*). Ca urmare, fenomenul transmiterii de putere se poate descrie complet cu ajutorul unor ecuații criteriale — adimensionale — care exprimă totodată legile similitudinii restrînse a procesului [1].

Întrucît ecuațiile criteriale nu depind de dimensiunile concrete ale transmisiei și de forma profilului de curea, analiza teoretică a capacității de tracțiune, optimizarea dimensionării, programarea experimentelor și prelucrarea datelor devin sistematice și unitare.

— Pentru transmisiile cu $\{A;\ L_p = \text{var}\}$, capacitatea de tracțiune este independentă de sensul de rotație și viteză:

$$\varphi_\infty = \frac{1 - e^{-\mu\beta_{al}}}{1 + e^{-\mu\beta_{al}}}, \tag{8a}$$

și prezintă o creștere eficientă doar pentru coeficientul aparent de frecare $\mu \in (0;\ 1{,}25)$ întrucît

$$\forall \beta_{al} = \text{const.}\ \exists \lim_{\mu\to\infty} \varphi_\infty = 1.$$

Eforturile active din ramuri variază simetric în raport cu efortul inițial și satisfac aproximația Poncélét-Grashof:

$$\tau^*_{1\infty} = \tau_{0\infty} + \frac{\varphi_\infty}{2};\quad \tau^*_{2\infty} = \tau_{0\infty} - \frac{\varphi_\infty}{2}, \tag{8b}$$

iar intensitatea ca și orientarea reacțiunii pe arbore depind de cuplul transmis:

$$\tau_{r\infty} = \sin\frac{\beta_1}{2}\sqrt{1 + \varphi_\infty^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\beta_1}{2}};\quad \theta_\infty = \operatorname{arctg}\left(\varphi_\infty \operatorname{ctg}\frac{\beta_1}{2}\right) \tag{8c}$$

Acest mod de tensionare este utilizat aproape în exclusivitate pentru simularea (modelarea) experimentală a capacității de tracțiune.

— Pentru transmisiile cu $\{A = \text{const.}\ L_p = \text{var}\}$, capacitatea de tracţiune este, de asemenea, independentă de viteză:

$$\varphi_0 = \frac{1 - e^{-\mu\beta_{al}}}{2e^{-\mu\beta_{al}}}, \tag{9a}$$

dar, spre deosebire de cazul precedent, creşte foarte rapid o dată cu ameliorarea calităţilor fricţioniste ale curelei şi nu permite inversarea sensului de rotaţie pentru că

$$\forall\ \beta_{al} = \text{const.}\ \exists \lim_{\mu\to\infty} \varphi_0 = \infty, \quad \cup\ \frac{\varphi_0}{\varphi_0^1} = e^{\mu\beta_{al}} \gg 1.$$

Eforturile active din ramuri variază asimetric în raport cu efortul iniţial:

$$\tau_{10}^* = \tau_{00} + \varphi_0; \quad \tau_{20}^* = \tau_{00}, \tag{9b}$$

fapt pentru care ramura motoare în raport cu cea condusă este intens solicitată.

$$\tau_{r0} = \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} \sin\frac{\beta_1}{2} \sqrt{1 + \varphi_\infty^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\beta_1}{2}}; \quad \theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\varphi_0 \operatorname{ctg}\frac{\beta_1}{2}\right). \tag{9c}$$

Datorită calităţilor de tracţiune avantajoase, sistemul de tensionare cu rolă de întindere trebuie reconsiderat îndeosebi la acţionările cu mai mulţi consumatori ce folosesc curele late compound (multistrat).

— Pentru transmisia cu $\{A;\ L_p = \text{const.}\}$ resursele capacităţii de tracţiune sînt limitate simultan de parametrii geometrici (c_{11}) şi de eficienţa contactului alunecător ($\mu\beta_{al}$):

$$\varphi = \frac{1 - e^{-\mu\beta_{al}}}{2C_{11}}(1 - v^2). \tag{10a}$$

Totodată se observă că la atingerea vitezei critice $v_{*cr} = 1$, forţa tangenţială şi/sau cuplul transmis, eforturile active din ramuri şi reacţiunea pe arbore,

$$\tau^* = \tau_0 \frac{1 - v_*^2}{C_{11}}; \quad \tau_2^* = \tau_1^* - \varphi, \tag{10b}$$

$$\tau_r^* = \frac{\varphi}{\varphi_\infty} \sin\frac{\beta_1}{2} \sqrt{1 + \varphi_\infty^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\beta_1}{2}}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\varphi \operatorname{ctg}\frac{\beta_1}{2}\right), \tag{10c}$$

se anulează întrucît

$$\forall\ \{\mu\beta_{al}\} \neq \Phi\ \exists \lim_{v_*\to v_{*cr}} \varphi = \lim_{v_*\to v_{*cr}} \tau_{1,2}^* = \lim_{v_*\to v_{*cr}} \tau_0 = 0.$$

Relativa simplitate constructivă a transmisiei ca şi demarajul eficient pe care-l realizează,

$$\frac{\varphi_{dem}}{\varphi_{nom}} = \frac{\varphi(v_* = 0)}{\varphi(v_*)} > 1,$$

justifică pe deplin folosirea în continuare a soluţiei analizate mai ales atunci cînd curelele sînt confecţionate din materiale cu un comportament reologic superior (din punctul de vedere al relaxării).

3. CRITERII DE ANALIZĂ COMPARATIVĂ A TRANSMISIILOR CU TENSIONARE PERMANENTĂ

Eficienţa transmisiilor prin frecare cu element flexibil şi extensibil este univoc definită, independent de modul de tensionare, prin raportul

$$\forall \{\varphi, \tau_r\} \cup \mu\beta_{al} = \text{idem } \exists K_u = \frac{\varphi}{\tau_r} = \frac{\varphi_\infty}{\sin\frac{\beta_1}{2}\sqrt{1 + \varphi_\infty^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\beta_1}{2}}}. \quad (11)$$

Criteriul unic de calitate (K_u) exprimă apartenenţa la aceeaşi clasă funcţională a soluţiilor analizate şi dezvăluie totodată o contradicţie : optimizarea totală a capacităţii de tracţiune implică satisfacerea simultană a două condiţii disjunctive :

$$(K_u)_{opt} = \lim_{\mu \to \infty} K_u = \lim_{\beta_1 \to 0} K_u = 1.$$

Întrucît pentru cele trei variante distincte de tensionare eforturile nominale din ramuri variază parabolic cu viteza, dimensionarea se bazează pe sistemul universal de relaţii

$$\forall \varphi_{opt} = \lim_{\frac{\beta_{al}}{\beta_1} \to 1} \varphi \Leftrightarrow \eta_{max} \exists \tau_1 = \tau_1^* + \frac{1}{2} v_*^2 \leqslant \tau_{lim} = \frac{1}{c_\sigma} \frac{\sigma_{lim}}{2\sigma_0}$$

$$v_{*lim} = \sqrt{2(\tau_{lim} - \tau_1)} \geqslant v_*. \quad (12)$$

În această situaţie, la o anumită putere transmisă se asigură concomitent fiabilitatea dorită şi funcţionarea cu randament maxim dacă

$$\pi = (\tau_1^* - \tau_2^*)\, v_* = \varphi v_* \equiv \varphi_{opt} \cdot v_{*lim}. \quad (13)$$

Pentru primele două variante, conform (8.a) şi (9.a), puterea creşte liniar cu viteza. La cea de a treia variantă, conform (10.a), dependenţa puterii de viteză devine parabolică şi are un maxim la :

$$v_{*opt} = \frac{v_{*cr}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{d\pi}{dv_*} = 0. \quad (14a)$$

De aici rezultă că dimensionarea raţională a transmisiilor cu $\{A\,;\ L_p = \text{const.}\}$ trebuie corelată cu condiţia suplimentară :

$$v_{*\lim} = v_{*\text{opt}} \Leftrightarrow \pi_{\max} = \lim_{v_* \to v_{*\text{opt}}} \pi \,. \tag{14b}$$

Relaţiile criteriale permit de asemenea definirea echivalenţei între cele trei variante de tensionare.

Dacă se acceptă drept „transmisie standard" (model) soluţia cu $\{A\,;\ L_p = \text{var.}\}$ cazurile de echivalenţă funcţional posibile şi criteriile de similitudine ce le corespund $\forall\,\{\mu\beta_{al}\} \neq \Phi \cup \frac{\beta_{al}}{\beta_1} = 1\,;\ v_* = v_{*\text{opt}}$ vor fi următoarele :

— Eforturi iniţiale identice (fig. 2) :

$$\tau_{0\infty} = \tau_{00} = \tau_0 = \text{idem},$$

$$\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} \cdot \frac{\pi_0}{\pi_\infty} = \frac{\varphi_\infty}{\varphi} \cdot \frac{\pi}{\pi_\infty} = 1. \tag{15}$$

În această situaţie transmisia cu rolă de întindere realizează cele mai bune performanţe întrucît

$$\frac{\varphi_\infty}{\varphi} > \frac{\varphi_\infty}{\varphi}.$$

Trebuie remarcat însă faptul că eforturile nominale maxime, reacţiunea pe arbore şi implicit secţiunea curelei cresc în acelaşi raport.

— Eforturi nominale în ramura motoare identice (fig.3) :

$$\tau_{1\infty} = \tau_{10} = \tau_1 = \text{idem},$$

$$\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} \cdot \frac{\tau_{0\infty}}{\tau_{00}} \cdot \frac{\pi_0}{\pi_\infty} = \frac{\varphi_\infty}{\varphi} \cdot \frac{\tau_{0\infty}}{\tau_0} \cdot \frac{\pi}{\pi_\infty} = 1. \tag{16}$$

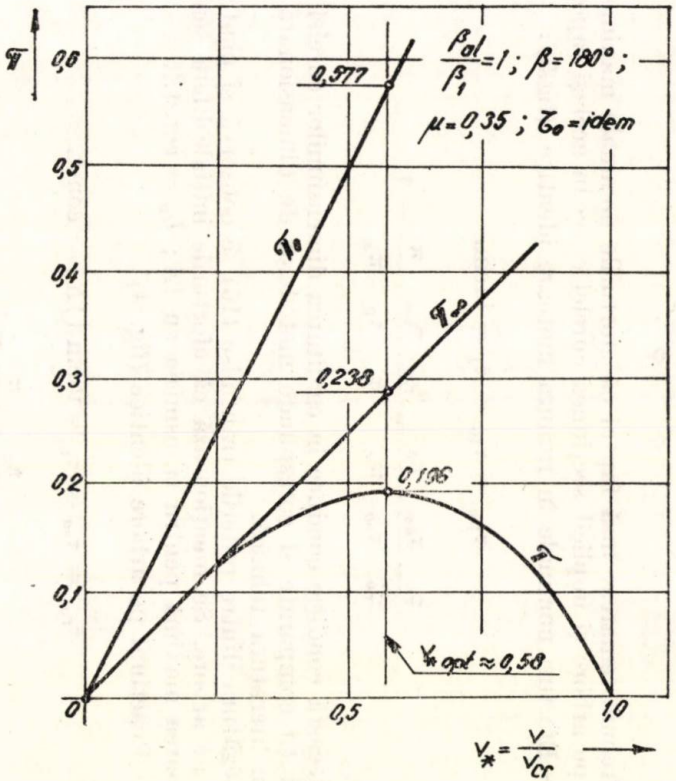
Această condiţie conduce la egalitatea dimensiunilor curelei la cele trei soluţii comparate şi corespunde metodelor de dimensionare consacrate în literatura tehnică.

Legătura dintre puterile transmise (16) se conservă şi pentru reacţiunile pe arbore. Se menţionează că eforturile iniţiale diferă sensib l şi au valoarea maximă pentru transmisia cu $\{A\,;\ L_p = \text{const.}\}$.

— Reacţiuni pe arbore identice (fig. 4)

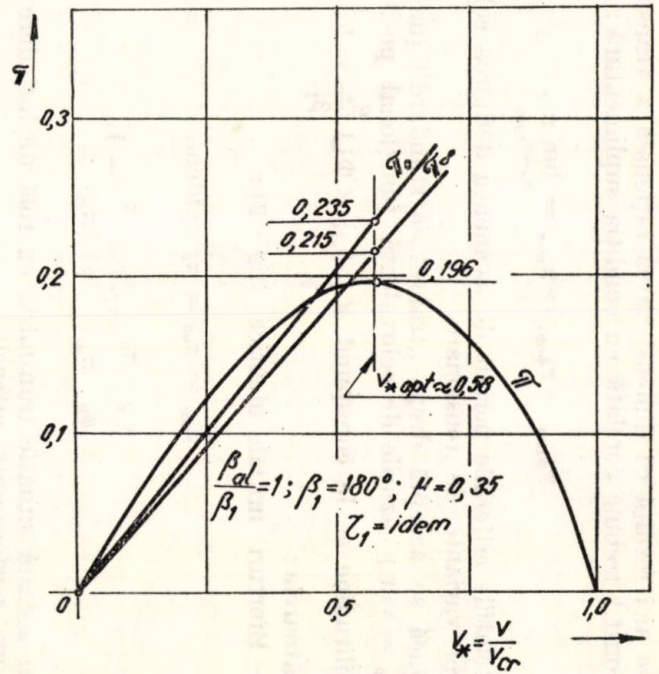
$$\tau_{r\infty} = \tau_{r0} = \tau_r = \text{idem} \cup K_u = \text{const.}$$

$$\frac{\pi_0}{\pi_\infty} = \frac{\pi}{\pi_\infty} = 1. \tag{17}$$



π
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,5
1,0
$\frac{\beta_{al}}{\beta_1}=1$; $\beta=180°$;
$\mu=0,35$; $\tau_0=$ idem
0,577
0,238
0,196
π_0
π_∞
π
$V_{*\,opt}\approx 0,58$
$V_* = \frac{V}{V_{cr}}$

Fig. 2



π
0,3
0,2
0,1
0
0,5
1,0
π_0
π_∞
0,235
0,215
0,196
$V_{*\,opt}\approx 0,58$
π
$\frac{\beta_{al}}{\beta_1}=1$; $\beta_1=180°$; $\mu=0,35$
$\tau_1=$ idem
$V_* = \frac{V}{V_{cr}}$

Fig. 3

Eforturile nominale din ramura motoare sînt relativ apropiate şi implicit dimensiunile curelei rămîn practic identice dar ca şi în situaţia precedentă eforturile iniţiale diferă sensibil.

Pentru $v_* \in (0\,;\ v_{*opt})$ transmisia cu $\{A\,;\ L_p = \text{const.}\}$ este net superioară celorlalte două (aspect confirmat experimental).

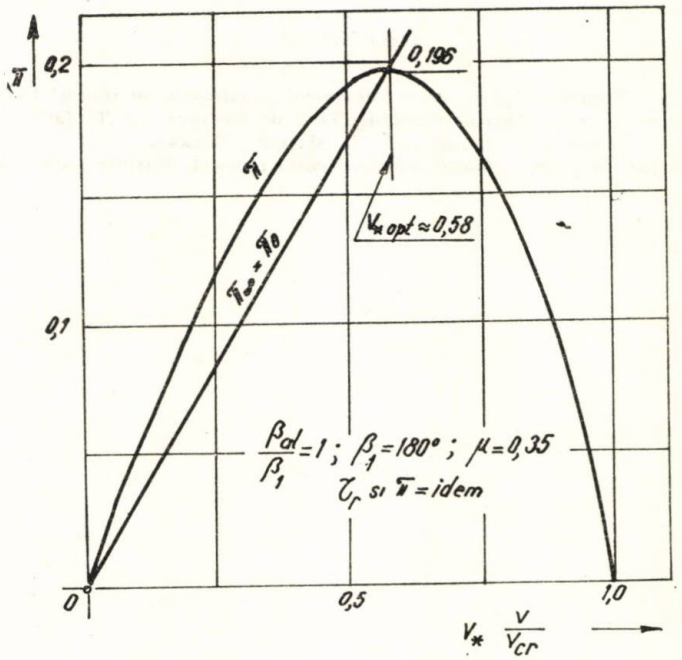


Fig. 4

4. CONCLUZII

Exprimarea adimensională a fenomenului transmiterii de putere oferă o serie de avantaje remarcabile de natură metodologică.

Dacă se acceptă valabilitatea relaţiilor (1), ecuaţiile criteriale devin universale şi independente de forma geometrică a profilului de curea.

Invarianţii caracteristici permit compararea obiectivă a două soluţii constructive distincte precum şi precizarea alternativei optime, potrivită unor condiţii particulare de exploatare.

Cercetarea experimentală a capacităţii de tracţiune se simplifică şi în acelaşi timp devine sistematică. Transferul proprietăţilor model ⇔ transmisie se unifică pe baze ştiinţifice.

De asemenea, corectivele ce trebuie aduse metodelor de calcul consacrate nu mai necesită experimentări suplimentare. În această pri-

vinţă, informaţiile din literatura tehnică conţin numeroase contradicţii, fapt ce cauzează grave confuzii.

În ultimă analiză, dimensionarea elementului flexibil poate urmări consecvent optimizarea performanţelor de tracţiune.

Primită la redacţie la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. GHEORGHIU N., *Transmisii prin curele trapezoidale, contribuţii la studiul teoretic şi experimental al capacităţii de tracţiune*, Teză de doctorat, I.P.T. 1969/1970.
2. V. S. SCEDROV, *Osnova mehaniki ghibkoi niti*, Maşghiz, Moskva, 1961.
3. V. A. SVETLIŢKI, *Peredaci s ghibkoi sviaziu*, Teoria i rascet. Maşinostroenia. Moskva, 1967.

Tovarășului profesor GHEORGHE MANEA,
un călduros omagiu.

O METODĂ DE CALCUL PENTRU MELCII MAȘINILOR DE EXTRUDERE A TERMOPLASTELOR

de V. V. JINESCU, M. RENERT,

Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă relații de calcul originale și pe această bază se dezvoltă o metodă originală pentru calculul melcilor mașinilor de extrudere a termoplastelor. Se pune astfel în evidență interdependența dintre caracteristicile fizice (reologice, termice și tribologice) ale materialelor prelucrate, parametrii regimului de funcționare (corespunzător regimului staționar), geometria melcului și forma și calitatea extrudatului.

Calculul ce duce la stabilirea caracteristicilor geometrice ale melcului mașinii de extrudere nu poate fi separat de procesul termomecanic care are loc în canalul elicoidal, de natura și de caracteristicile materialului prelucrat și de caracteristicile produsului. Un anumit debit Π_G și o anumită calitate a produsului pot fi obținute cu melci de geometrie diferită. Optimul tehnic*), însă, se obține, de regulă, numai cu un melc de construcție anumită. Aceasta rezultă luînd în considerare interdependența dintre cuplul melc-cilindru și capul de extrudere pe de o parte și a interdependenței dintre parametrii procesului de extrudere și caracteristicile fizice (termice, reologice și tribologice) ale materialului prelucrat. Forma și dimensiunile acestuia la alimentare (granulară sau pulverulentă) și forma și dimensiunile produsului reprezintă factorii limitativi pentru debit și, în anumită măsură și pentru calitatea acestuia.

Filiera și zonele ce o preced în capul de extrudere trebuie astfel concepute și realizate încît să permită extruderea materialului cu o viteză maximă admisibilă W_{Ma}, cît mai mare. Aceasta poate fi raportată la viteza critică, W_{cr}, la atingerea căreia are loc degradarea mecanică sau mecanochimică a suprafeței produsului, prin relația

$$W_{Ma} = \frac{W_{cr}}{c_{n\,1}}, \tag{1}$$

*) Prin optim tehnic se înțelege aici atingerea unui randament energetic total, η_{et}, cît mai apropiat de unitate, la caracteristici fizico-mecanice ale produsului cît mai avantajoase, inclusiv calitate bună a suprafeței.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975, P. 385–397

unde $c_{n1} > 1$ are semnificaţia coeficientului de siguranţă la neuniformitatea suprafeţei produsului.

Forma şi dimensiunile secţiunii de ieşire a filierei sînt determinate de produsul a cărui realizare se urmăreşte şi, de asemenea, de caracteristicile viscoelastice ale topiturii în această secţiune. Debitul prin filieră, exprimat gravimetric, este

$$\Pi_{G,fl} = \rho_{fl} \cdot S_{fl} \cdot \overline{W}_{fl}, \tag{2}$$

unde ρ_{fl} este densitatea topiturii, S_{fl} — aria secţiunii de ieşire a filierei, $\overline{W}_{fl}$ — viteza medie a topiturii în această secţiune.

Dacă Π_G este debitul gravific necesar, atunci numărul de maşini de extrudere necesare

$$z_{ex} = \frac{\Pi_G}{\Pi_{G,fl}}. \tag{3}$$

Pentru ca procesul termomecanic în extruder să poată fi efectuat corect, debitul maşinii trebuie limitat. Considerînd drept caracteristici ale procesului termomecanic temperatura de extrudere T_e şi omogenitatea topiturii, debitul volumic capabil se poate scrie [1]

$$\Pi_{v,c} = \pi \cdot \frac{b}{b+e} \cdot i_M \cdot \overline{\Psi}_M \cdot \overline{v}_{tM} \cdot D^2, \tag{4}$$

unde b este lăţimea canalului elicoidal; e — grosimea spirei, $\overline{\Psi}_M$ — factorul regimului termic, mediu, pe întreaga maşină şi D — diametrul interior al cilindrului. În general, $\pi \frac{b}{b+e} \approx 2{,}826$ deoarece foarte frecvent $b/e = 0{,}9/0{,}1$. În cazul melcului neutru, din punct de vedere termic, $\overline{\Psi}_M \approx 1$. Cu $i_M = (L_i/D)$ s-a notat lungimea relativă a zonei încălzite a cilindrului (vezi şi relaţia (5)). Viteza de transfer termic medie pe întreaga maşină se defineşte ca

$$\overline{v}_{tM} = \frac{1}{L_i} \sum_{j=1}^{k} (L_{ij} \cdot \overline{v}_{tj}), \tag{5}$$

unde L_i este lungimea cilindrului încălzită din exterior sau prin frecare internă, iar L_{ij} este lungimea zonei încălzite, căreia îi corespunde viteza (locală) de transfer termic medie

$$\overline{v}_{tj} = \frac{\overline{q}^*_{1j}}{\int_{T_j}^{T_{j+1}} \rho \cdot c_p \cdot \mathrm{d}T}, \tag{6}$$

unde s-a notat cu ρ — densitatea şi cu c_p — căldura specifică a materialului ce se află în zona j, zonă în lungul căreia temperatura materialului creşte de la T_j la T^*_{j+1}. În aceeaşi relaţie

$$\overline{q}^*_{1j} = \pm \overline{q}_{1j} + \overline{q}_{fj} \tag{7}$$

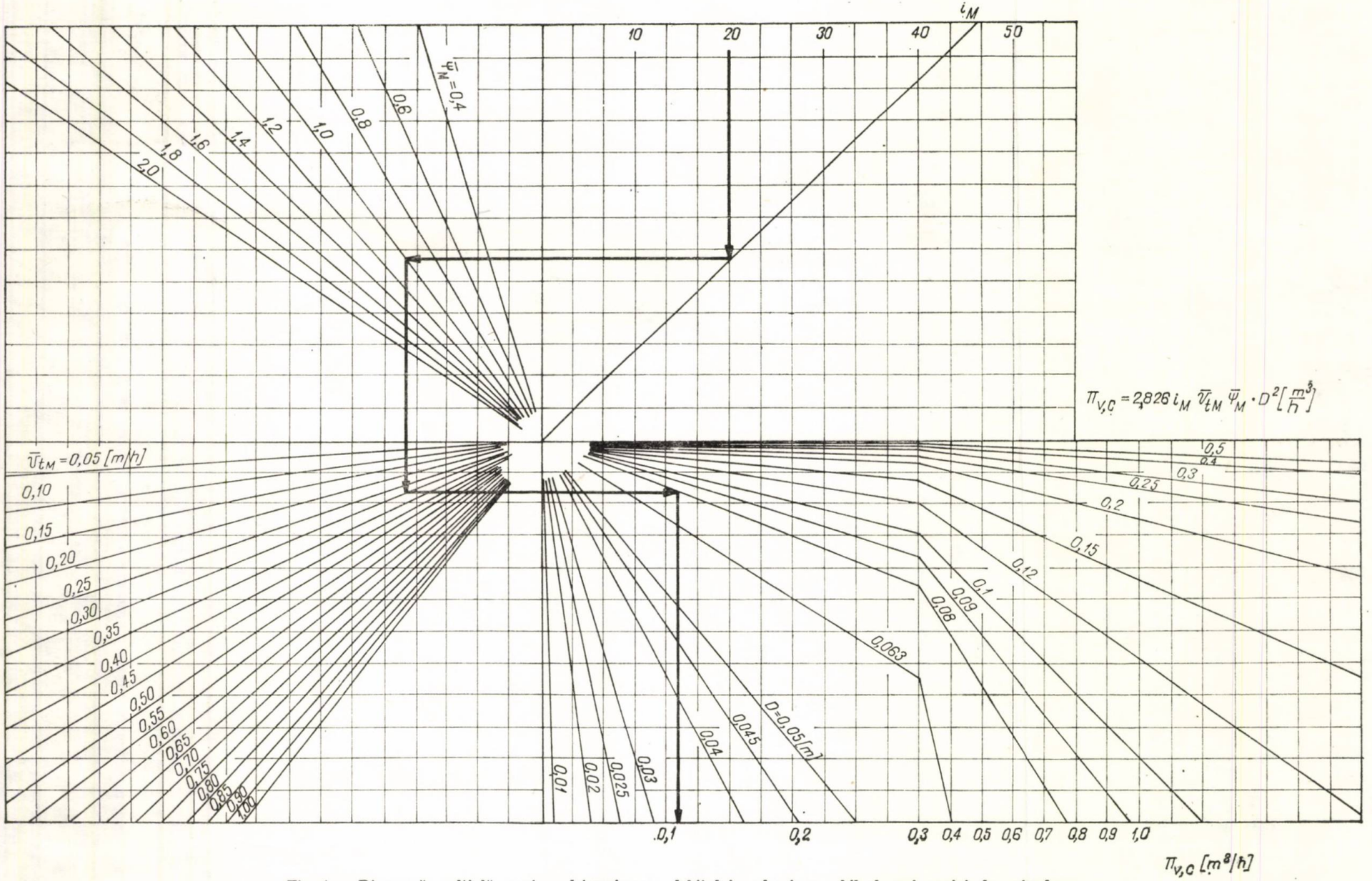
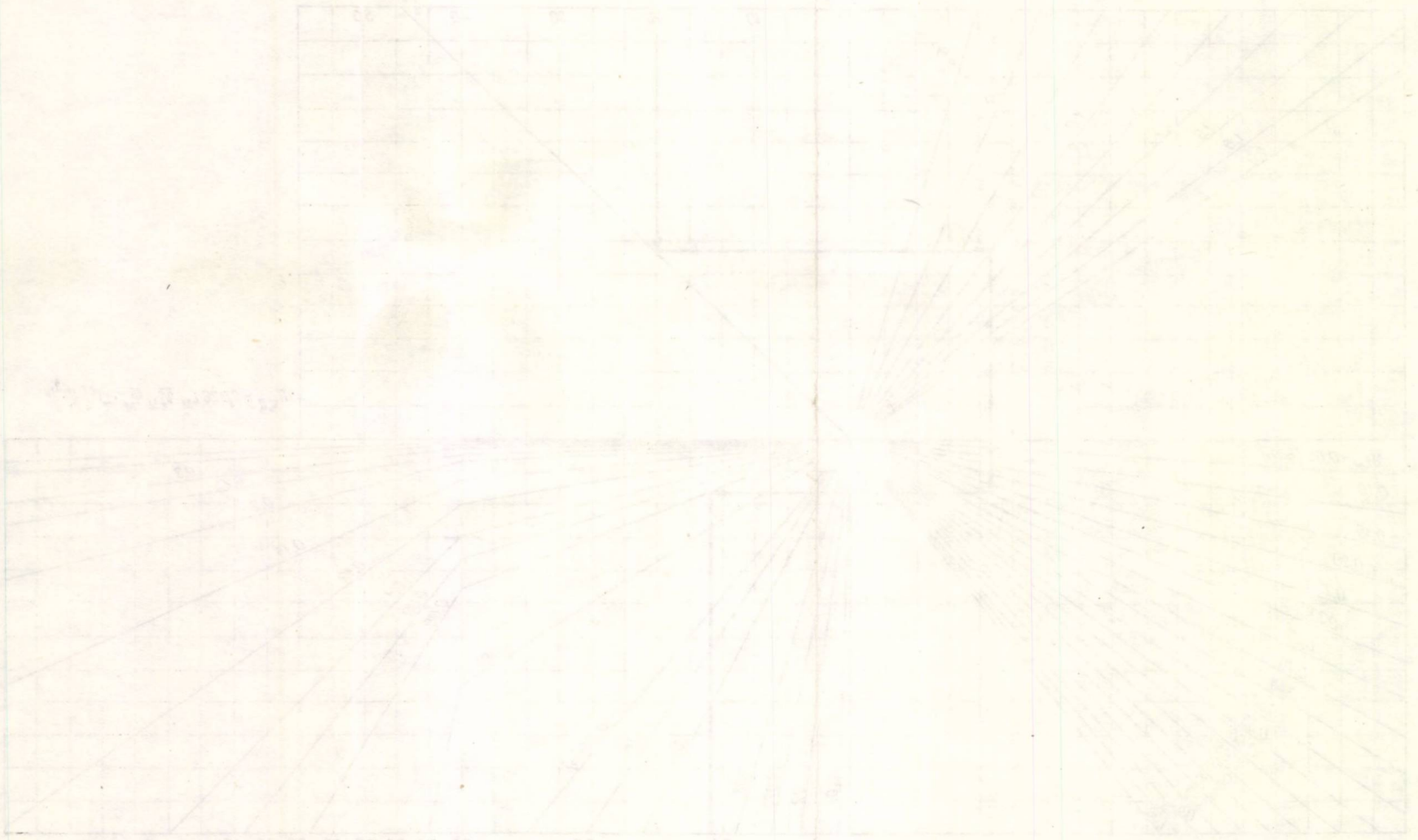


Fig. 1. — Diagramă multiplă pentru determinarea debitului volumic capabil al unei mașini de extrudere.



este fluxul termic mediu prin peretele cilindrului în zona j, rezultat din însumarea fluxului termic (din sau spre) exterior, $\pm \bar{q}_{1j}$, și a fluxului termic mediu echivalent, datorit frecării interne și externe, $\bar{q}_{fj}$.

Practica arată că, pentru materiale termoplastice, $\bar{v}_{tM} = 0{,}1 \ldots 1$ m/h, [2].

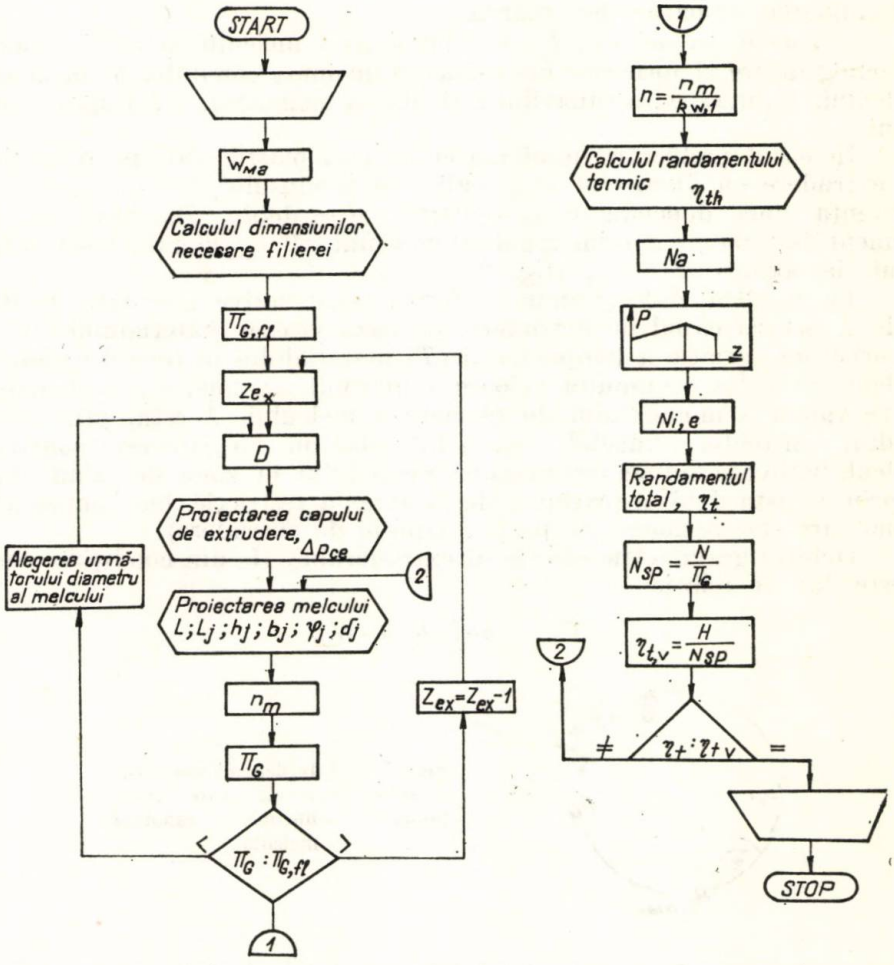


Fig. 2. — Schema logică a calculului cuplului activ melc — cap de extrudere.

Cu ajutorul diagramei multiple din figura 1, construită pe baza relației (4), valoarea diametrului melcului, necesară într-un caz dat, poate fi determinată cu ușurință.

Cunoscînd dimenisunile melcului și ale filierei se proiectează capul de extrudere și în consecință se calculează căderea de presiune în lungul capului de extrudere Δp_{ce} (fig. 2).

Din acest moment, din punctul de vedere al calculului extruderii se pot pune două probleme [3]:

— calculul, pentru un material de prelucrat și un produs date, a unui melc cu dimensiuni corespunzătoare optimului;

— calculul procesului termomecanic optim în cazul unui melc dat, corespunzător materialului care se prelucrează.

În cazul calculului melcului de diametru cunoscut, D, este necesară determinarea următoarelor mărimi:

— zonele geometrice, L_j, în lungul axei melcului (inclusiv zonele de omogenizare și forfecare intensivă), adîncimea canalului h_j în zonele melcului, lățimea, b_j, a canalului melcului și înclinarea, φ_j, a spirei melcului.

În cazul prelucrării unui material termoplastic dat, pe o mașină de extrudere cu diametrul D și calitatea produsului date, se constată existența unei dependențe „circulare" între debit, Π_G, presiune, p, moment de torsiune maxim admis al melcului, $M_{t,\max}$ și adîncimea canalului, la alimentare, $h_{p,1}$ (fig. 3).

La un debit dat, și anumite forme constructive adoptate pentru melc și pentru capul de extrudere, pe baza vitezei materialului (W) și a curbei de variație a temperaturii (T) materialului în lungul canalului melcului, rezultă o anumită valoare a presiunii maxime, p_M, care determină valoarea momentului de răsucire a melcului. Acesta, prin intermediul rezistenței admisibile, σ_a, a materialului din care este construit melcul, limitează adîncimea maximă a canalului în zona de alimentare și prin aceasta debitul (excepție de la această restricție fac numai acei melci care sînt acționați pe partea capului de extrudere).

Debitul gravimetric efectiv al extruderului, Π_G din condițiile zonei j este dat de relația

$$\Pi_G = \rho_j \cdot i_j \cdot b_j \cdot h_j \cdot \overline{W}_j, \tag{8}$$

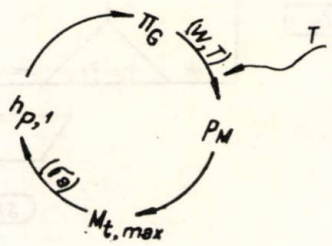


Fig. 3. — Interdependența principalilor parametri care condiționează adîncimea canalului melcului.

în care viteza medie a materialului în canalul melcului, în secțiunea j,

$$\overline{W}_j = k_{W,2} \cdot \pi \cdot (D - 2h_j) \cdot n_m \cdot \cos \varphi_j, \tag{9}$$

iar $k_{W,2}$ este un coeficient subunitar dependent de forma profilului de viteză.

Relația (8) se mai poate scrie sub forma

$$\Pi_G = \pi^2 \cdot \rho_j \cdot B_j \cdot D^2 \cdot n_m, \tag{10}$$

în care

$$B_j = (k_{W,2} \cdot \bar{C} \cdot \xi' \cdot \xi'' \cdot h \cdot \sin\varphi \cdot \cos^3\varphi)_j,$$

$$\bar{C}_j = 1 - \frac{\zeta_j \cdot \bar{e}_j}{\pi \cdot D \cdot \sin\varphi_j},$$

$$\xi'_j = 1 - \frac{2h_j}{D}; \quad \xi''_j = 1 - \frac{h_j}{D} = \frac{1+\xi'_j}{2},$$

$\bar{e}_j$ — lățimea medie a spirei melcului; ζ_j — numărul de începuturi ale spirei melcului.

Turația, n_m, cu care se rotește materialul în canalul melcului, depinde de aria secțiunii transversale, S_f, a filierei, de densitatea materialului în filieră, ρ_f, de densitatea materialului, ρ_j, în secțiunea de referință a canalului, de geometria canalului în această secțiune și de viteza $W_{M,a}$ [1]:

$$n_m = 0{,}101 \frac{\rho_f}{\rho_j} \frac{S_f}{\chi_j \cdot (D - 2\bar{\bar{h}}_j)^2 \cdot \bar{\bar{h}}_j \cdot \sin\varphi_j \cos^3\varphi_j} \cdot \frac{W_{M,a}}{c_{n,2}}, \tag{11}$$

în care

$$\bar{\bar{h}}_j = \bar{h}_j + \frac{b_j}{2} \cdot \mathrm{tg}\bar{\beta}_j \cdot \cos\varphi_j,$$

$$\bar{h}_j = \frac{1}{2}(h_j + h_{j+1}) \text{—adîncimea medie a canalului în secțiunea } j,$$

$$\mathrm{tg}\,\bar{\beta}_j = \frac{\bar{h}_j - \bar{h}_{j+1}}{L_{j+1} - L_j}; \quad \chi_j = \frac{\bar{C}_j}{\zeta_j}$$

L_j — cota secțiunii j, în lungul axei geometrice a melcului; $c_{n,2}$ — coeficient supraunitar care ține seama de diferența dintre dimensiunile produsului real și cele ale „produsului" pe care au fost efectuate experimentele în vederea determinării mărimilor critice.

Debitul real al extruderului, calculat cu relația (10) se compară cu debitul prin filieră $\Pi_{G,fl}$. În cazul egalității acestora urmează calculul turației melcului (fig.2),

$$n = \frac{n_m}{k_{W,1}}, \tag{12}$$

în care $k_{W,1}$ este un coeficient subunitar de alunecare al materialului în raport cu suprafața melcului.

Calculul principalelor dimesiuni ale melcului (adîncimea și lungimea zonelor, ca și alegerea succesiunii zonelor de adîncime constantă și variabilă și a celor de forfecare intensivă) se face odată cu calculul procesului termomecanic care are loc în canalul melcului. Se urmărește aici ca viteza de încălzire efectivă a materialului, $v_{i,ef}$, prin frecare internă și externă

și prin încălzire exterioară, să fie superioară cel puțin egală cu viteza de încălzire necesară materialului, $v_{i,n}$:

$$v_{i,ef} \geqslant v_{i,n}. \tag{13}$$

Aceasta impune ca pe fiecare increment

$$q_{ac} = q_f + q_{tr} \geqslant q_{nec}, \tag{14}$$

unde q_{ac} este cantitatea de căldură acumulată în material prin frecare (q_f) și prin transfer termic din exterior (q_{tr}), iar q_{nec} este cantitatea de căldură necesară materialului spre a se încălzi cu cantitatea $\Delta T_{j,j+1} = T_{j+1} - T_j$, la trecerea în lungul încrementului $\Delta L_j = L_{j+1} - L_j$.

Adîncimea canalului la capătul melcului se calculează cu relații de forma [1], [4] :

— pentru zone cu adîncimea constantă (zone plate) :

$$h_p = \frac{\overline{\Psi} \cdot \bar{L}_{tr} - \left(1 - \frac{\delta}{D}\right) \cdot \delta}{C_p \cdot \xi_p''}, \tag{15}$$

— pentru zone cu adîncimea variabilă (zone conice), adîncimea maximă :

$$h_{p,j+1} = \frac{2\left[\overline{\Psi} \cdot \bar{L}_{tr} - \left(1 - \frac{\delta}{D}\right)\delta\right]}{C_c \cdot \xi_c'' \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\gamma} + 1\right)}, \tag{16}$$

— pentru un melc cu o zonă de compresiune L_c și o zonă finală de adîncime constantă L_p ;

$$h_p = \frac{2\left[\overline{\Psi} \cdot \bar{L}_{tr} - \left(1 - \frac{\delta}{D}\right)\delta\right]}{2 \cdot C_p \cdot \xi_p'' \cdot l_p + C_c \cdot \xi_c'' \cdot l_c \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\gamma} + 1\right)}, \tag{17}$$

în care

$$l_p = \frac{L_p}{L_t}; \quad l_c = \frac{L_c}{L_t}; \quad L_t = L_c + L_p$$

sau $l_p + l_c = l$,

$\overline{\Psi}$ — este factorul regimului termic; $\overline{\Psi} = 1$, în zonele cu melc neutru; $\overline{\Psi} > 1$, în zonele cu melc încălzit; $\overline{\Psi} < 1$, în zonele răcite ale melcului; $\bar{L}_{tr} = \bar{v}_t \cdot t_r$, este lungimea de transfer termic, t_r — timp de reținere, δ — jocul radial dintre cilindru și melc,

$$C_c = 1 - \frac{\zeta_c \cdot e_c}{t_c}; \qquad C_p = 1 - \frac{\zeta_p \cdot e_p}{t_p},$$

$$\xi_c'' = 1 - \frac{e_{c,j}}{D}; \qquad \xi_p'' = 1 - \frac{\bar{h}_p}{D}; \qquad \frac{\varepsilon_c}{\gamma} = \frac{h_{p,j}}{h_{p,j+1}} -,$$

t_c şi t_p — pasul spirei melcului în zona cu adîncimea variabilă şi, respectiv, constantă. Pentru prima aproximaţie se ia $\frac{\varepsilon_c}{\gamma} = 1$.

Adîncimea canalului în zona de alimentare, $h_{p,1}$, rezultă din expresia raportului de compresiune pe baza adîncimii la capătul melcului, $h_{p,2}$:

$$\varepsilon_{c,1} = \frac{[\pi \cdot (D - h_{p,1}) \cdot \sin \varphi_1 - e_1] \cdot h_{p,1}}{[\pi \cdot (D - h_{p,2}) \cdot \sin \varphi_2 - e_2] \cdot h_{p,2}}, \tag{18}$$

în care $\varepsilon_{c,1}'$ este raportul de compresiune al primei zone de comprimare (de lîngă zona de alimentare), $h_{p,1}$ este adîncimea la începutul, iar $h_{p,2}$ la sfîrşitul acestei zone conice.

Adîncimea $h_{p,1}$ pe de altă parte trebuie să asigure debitul necesar Π_G, motiv pentru care acesta se calculează (relaţia (10)), din condiţiile zonei de alimentare. Pe de altă parte valoarea lui $h_{p,1}$ este limitată de

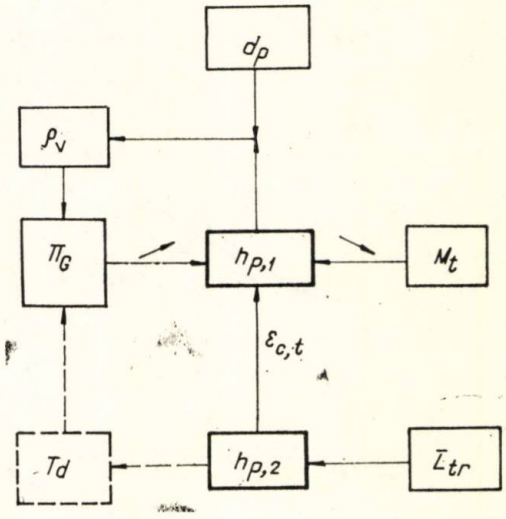


Fig. 4. — Factorii care determină valoarea adîncimii în zona de alimentare $h_{p,1}$. Aici T_d este temperatura la care are loc degradarea termică a materialului prelucrat,

valoarea momentului de torsiune capabil al melcului $M_{t,c}$ (fig. 4). Aici se va lua în seamă şi influenţa asupra densităţii în vrac, ρ_v, a raportului dintre dimensiunile particulelor de material, d_p, la alimentare şi adîncimea $h_{p,1}$ (fig. 4), întrucît

$$\rho_v = \rho \cdot (1 - \varepsilon_g),$$

unde ρ este densitatea intrinsecă a materialului, iar ε_g este fracţia de goluri la alimentare. ε_g depinde de raportul $h_{p,1}/d_p$ [5].

În cazul prelucrării materialelor termolabile, spre a evita degradarea termică a materialului datorită căldurii dezvoltate prin frecare internă, se va ţine seamă şi de influenţa adîncimii de la capătul melcului, $h_{p,2}$, asupra debitului (fig. 4).

Calculul formei canalului, a modului de variaţie a adîncimii şi a lăţimii acestuia, între cele două extreme determinate ($h_{p,1}$ şi $h_{p,n}$) aşa

cum s-a arătat mai sus, se face pe baza curbei de variație a temperaturii în lungul melcului. Forma acesteia se alege (fig. 5). Apoi, prin calculul adîncimii canalului, a căldurii dezvoltate prin frecare internă în materialul prelucrat și a căldurii care se transferă de la sistemul de încăl-

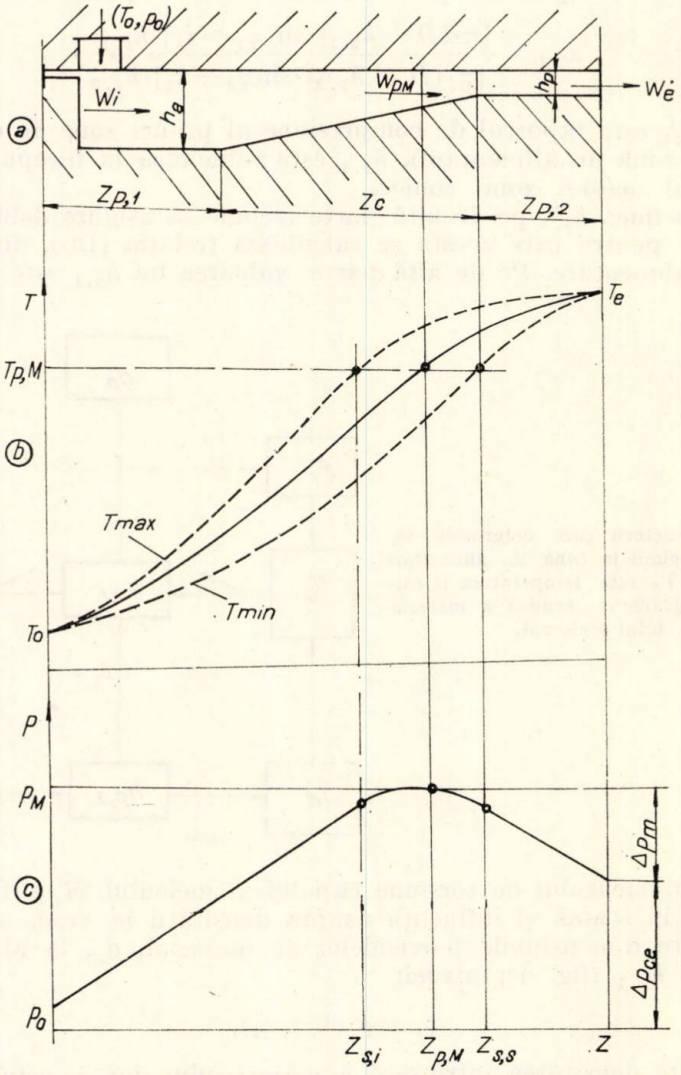


Fig. 5. — a) Secțiune în lungul axei canalului melcului; b) — Evoluția temperaturii materialului în lungul axei canalului melcului; c) — Evoluția presiunii materialului în lungul axei canalului melcului

zire exterioară, se verifică alegerea făcută și se corectează, din aproape în aproape, profilul temperaturii și profilul canalului melcului. Printr-un calcul cu aproximații succesive se poate ajunge în final la soluția optimă.

La extruderele autoterme forma canalului trebuie astfel construită încît condiția (14) să fie îndeplinită numai pe baza căldurii dezvoltate prin frecare (internă și externă):

$$q_f = q_{f,i} + q_{fe} \geqslant q_{nec}. \tag{19}$$

În urma calculului puterii de antrenare, N_a, se verifică dacă melcul poate dezvolta — în condițiile date — presiunea necesară extruderii (fig. 2) după care urmează calculul randamentului total, η_t, a puterii specifice

$$N_{sp} = \frac{N_t}{\Pi_{G,fl}}, \tag{20}$$

în care N_t este puterea totală a mașinii, și verificarea randamentului total (fig. 2) prin calculul mărimii de referință

$$\eta_{t,v} = \frac{H}{N_{sp}}, \tag{21}$$

în care H este entalpia materialului prelucrat la temperatura de extrudere.

Adîncimea melcului la capătul acestuia $h_{p,n}$ se calculează uneori — în primă aproximație — pe baza unor relații empirice, în funcție de diametrul melcului [6], [7]

$$h_{p,n} = C_1 \cdot D, \tag{22}$$

în care C_1 depinde de tipul materialului prelucrat (tabela 1).

Tabelul 1

Material	C_1	ε_{ct}
Polietilenă de joasă și de înaltă presiune*	0,05...0,025	3,5...4
Poliamide*	0,05...0,025	3,5...4
P C V plastifiată	0,04	2,5...3
P C V dură : granulat	0,035	1,8...2,5
P C V dură : pulbere	0,035	2,5...4
Polistiren	0,03	3,5
Acetat de celuloză	0,035	2,5
Polimetacrilat de metil	0,05	2,7

*) Pentru melci cu $D = 30...150$ mm. Valorile mai mari ale lui C_1 corespund valorilor mai mici ale diametrului D.

Raportul de compresiune total al melcului, se calculează pe baza raportului de compresiune necesar materialului, $\varepsilon_{c,n}$.

$$\varepsilon_{c,t} = k_\varepsilon \cdot \varepsilon_{c,n}, \tag{23}$$

în care k_ε este un coeficient supraunitar,

$$\varepsilon_{c,n} = \varepsilon_{n,0} \cdot \frac{1 + \beta_p \cdot (p_M - p_0)}{1 + \beta_T \cdot (T_{pM} - T_0)}, \tag{24}$$

$$\varepsilon_{n,0} = \frac{\rho(T_0, p_0)}{\rho_v} = \frac{}{1 - \varepsilon_{g,0}} \tag{25}$$

reprezintă raportul de compresiune necesar materialului în condiţii normale ($T_0 = 20°C$ şi $p_0 = 1$ ata). $\varepsilon_{n,0}$ depinde de fracţia de goluri, $\varepsilon_{g,0}$, a materialului la alimentare. Pentru cîteva materiale, $\varepsilon_{g,0}$ şi $\varepsilon_{n,0}$ sînt date în tabela 2. În relaţia (24) s-a mai notat: β_p — coeficientul compresibilităţii izoterme; β_T — coeficientul de temperatură al dilataţiei cubice; p_M, T_{pM} — presiunea maximă şi, respectiv, temperatura în secţiunea în care presiunea este maximă.

Tabela 2

Nr. crt.	Natura polimerului şi forma materialului prelucrat		Densitatea în vrac $\rho_{v,0}$ kg/m³	Densitatea intrisecă ρ_0 kg/m³	$\varepsilon_{g,0}$ %	$\varepsilon_{n,0}$
1	Polietilenă	aşchii	300	920	67,4	3,07
		cubică	440		52,2	2,09
		cilindrică	500		45,7	1,84
		sferică	550		40,2	1,67
		lenticulară	590		35,8	1.56
2	PVC neplastifiată	aşchii	600	1380	56,5	2,3
		cubică	770		44,1	1,79
		cilindrică	774		43,8	1,78
		pulbere	460		66,7	3,00
3	PVC plastifiată	cilindrică	780	1420	45,0	1,82
4	Polistiren	cilindrică	620	1080	42,7	1,745
		sferică	650		39,8	1,66

Înclinarea, φ, a spirei melcului influenţează timpul de reţinere şi căldura dezvoltată prin frecare internă. Cu micşorarea lui φ, cresc căldura dezvoltată prin frecare şi timpul de reţinere. La unghiuri φ mici există pericolul ca materialul să nu fie antrenat de melc. În general se consideră $\varphi = 10° - 22,5°$, însă cel mai des se adoptă $\varphi = 17°40'$ ceea ce corespunde situaţiei în care pasul spirei elicoidale este egal cu diametrul melcului.

La alegerea lungimii melcului se va ține seamă că, cu cît lungimea relativă a melcului, $\frac{L_t}{D}$, este mai mare, cu atît se realizează o omogenizare mai bună a materialului, datorită și unei încălziri treptate a acestuia. Se construiesc, în prezent, extrudere cu $L_t = (25 \div 40)\ D$. La alegerea lungimii relative l_p de la capătul melcului, atunci, cînd calculul profilului melcului începe de la $h_{p\,n}$ spre $h_{p,1}$, se va ține seamă că:

— cu mărimea lui l_p, la capătul melcului (în zona de omogenizare) — înclinarea față de abscisă a caracteristicii melcului se micșorează (fig. 6); prin aceasta se micșorează fluctuațiile de debit la o fluctuație dată a presiunii;

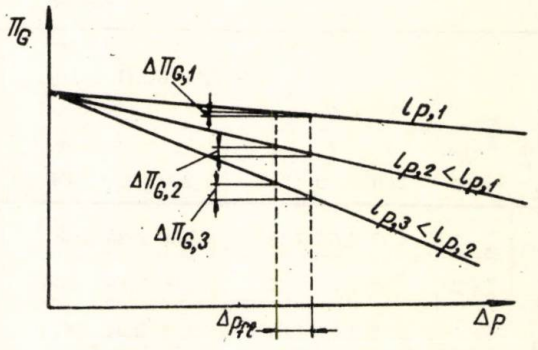


Fig. 6. — Efectul fluctuației presiunii $\Delta p_{fl} = \text{const.}$ asupra fluctuației debitului, $\Delta\Pi_G$, în funcție de valoarea lungimii relative de adîncime constantă, l_p.

— adîncimea la capătul melcului, $h_{p,n}$, se mărește, ceea ce permite mărirea corespunzătoare a debitului.

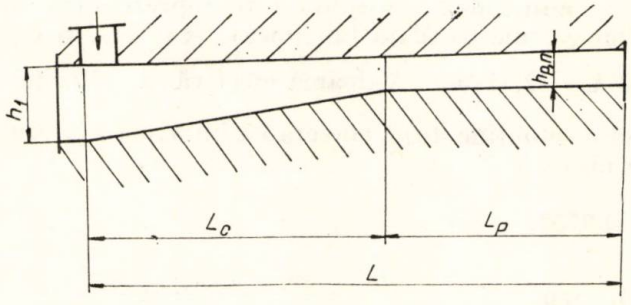


Fig. 7. — Secțiune axială printr-un melc cu două zone geometrice.

Pentru un melc cu o zonă de compresiune și o zonă plată (fig.7), care are $D = 0{,}1$ m; $\varphi = 17°40'$; $e_c = e_p = e \approx 0{,}1D$; $\delta = 0{,}025\ h$, adîncimea $h_{p,n}$ depinde de valorile lungimii medii de transfer termic, $\bar{L}_{tr}$, și de raportul de compresiune total $\varepsilon_{c,t}$. Spre a pune în evidență acest lucru, se consideră

$$\bar{L}_{tr} = \frac{1}{200} \ldots \frac{1}{300}\ [m] \quad \text{și} \quad \varepsilon_{c,t} = 2 \ldots 4.$$

Deoarece $\frac{\delta^2}{D}$ este neglijabil comparativ cu $\overline{\Psi}\,\overline{L}_{tr}$, iar $\delta = 0{,}025\ h_{p,n}$, din relaţia (17), pentru prima aproximaţie a lui h_p, rezultă

$$h'_p = \frac{2 \cdot \overline{\Psi} \cdot \overline{L}_{tr}}{2 \cdot C_p \cdot l_p + C_c \cdot l_c(\varepsilon_c + 1) + 0{,}05}. \tag{26}$$

Datorită căldurii care se pierde prin melc, se consideră $\overline{\Psi} = 0{,}9$. Cu aceste date, din relaţia (26) rezultă valorile înscrise în tabela 3.

Tabela 3

$$h'_p = \frac{1{,}8\ \overline{L}_{tr}}{2C_p \cdot l_p + C_c \cdot (1 - l_p) \cdot (\varepsilon_c + 1) + 0{,}05}, \text{ [mm]}$$

l_p		0			0,25			0,50			0,75		
ε \ L_{tr}[m]		1/200	1/250	1/300	1/200	1/250	1/300	1/200	1/250	1/300	1/200	1/250	1/300
2	$\zeta=1$	3,27	2,62	2,18	3,56	2,85	2,38	3,90	3,13	2,60	4,33	3,46	2,88
	$\zeta=2$	3,68	2,94	2,45	4,00	3,195	2,66	4,38	3,51	2,93	4,86	3,09	3,24
3	$\zeta=1$	2,47	1,97	1,64	2,81	2,24	1,87	3,26	2,62	2,18	3,90	3,13	2,60
	$\zeta=2$	2,77	2,21	1,85	3,15	2,52	2,10	3,67	2,93	2,44	4,38	3,51	2,93
4	$\zeta=1$	1,98	1,58	1,32	2,32	1,80	1,545	2,81	2,24	1,87	3,56	2,85	2,38
	$\zeta=2$	2,22	1,78	1,48	2,64	2,12	1,76	3,15	2,52	2,10	4,00	3,20	2,66

Pentru $\overline{L}_{tr} = \frac{1}{200}$ [m], de exemplu, dependenţa lui h'_p de lungimea relativă, l_p, a zonei cu adîncimea constantă este reprezentată în figura 8. Pentru $l_p = 0$ (melc conic pe toată lungimea); $\varepsilon = 3$; $\zeta = 1$ şi $\overline{L}_{tr} = \frac{1}{200}$ [m] s-a obţinut $h'_p = 2{,}47$ mm. Valoarea efectivă a adîncimii canalului la capătul melcului se obţine după corectarea lui h'_p cu ajutorul factorilor ξ''_p, ξ''_c şi γ. Se obţine:

$$\xi''_p = 1 - \frac{2{,}47 \times 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}9753,$$

$$\xi''_c = 1 - \frac{5{,}31 \times 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}9469,$$

$$\gamma = \frac{\zeta_p}{\zeta_c} \cdot \frac{\xi''_p}{\xi''_c} \cdot \frac{C_c}{C_p} \cdot \frac{\sin \varphi_c}{\sin \varphi_p} = \frac{1}{1} \cdot \frac{0{,}9753}{0{,}9469} \cdot \frac{0{,}9}{0{,}9} \cdot \frac{\sin 17°40'}{\sin 17°40'} = 1{,}03,$$

$$C_c = C_p = 1 - \frac{1 \cdot 0{,}1 \cdot D}{D} = 0{,}9,$$

$$\bar{h}_c \approx \frac{1}{2}(h'_p + h'_a) = 5{,}31 \times 10^{-3}\text{m},$$

unde adîncimea corespunzătoare primei aproximații în zona de alimentare, h'_a, rezultă din relația (18), $h'_a \approx 8{,}15$ mm.

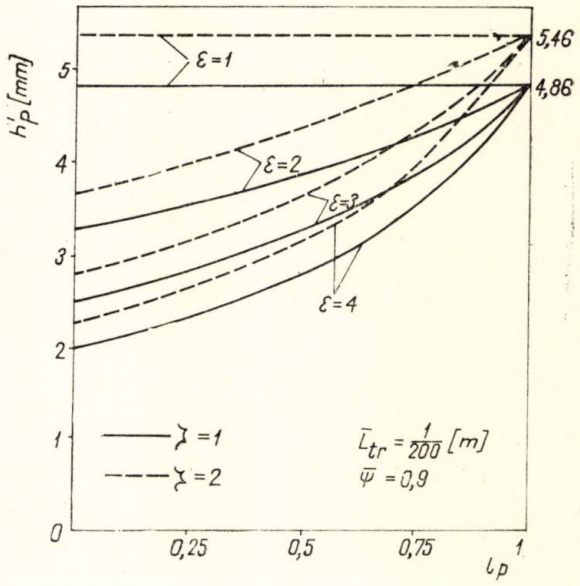


Fig. 8. — Dependența adîncimii la capătul melcului, h'_p, de lungimea relativă l_p pentru diferite valori ale raportului total de compresiune, ε.

În final (rel. (17))

$$h_p = \frac{2 \times 0{,}9 \times \frac{1}{200}}{0{,}9 \times 0{,}9469 \times \left(\frac{3}{1{,}03} + 1\right) + 0{,}05} = 2{,}66 \times 10^{-3}\text{m}$$

și

$$h_1 = h_a = 8{,}43 \text{ mm},$$

încît $\frac{h_a}{h_p} = 3{,}17$.

Primită la redacție la 24 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Jinescu, *Contribuții la teoria mașinii de extrudere cu un melc*, teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1971.
2. V. V. Jinescu, M. Renert, Bulet. Inst. politehnic București, **28**, *5*, 83 (1966).
3. V. V. Jinescu, Materiale Plastice, **9**, *8*, 422 (1972); **9**, *10*, 537 (1972); **10**, *12*, 644 (1973).
4. V. V. Jinescu, Kautschuk und Gummi Kunststoffe, **20**, *9*, 529 (1967).
5. — St. cerc. chimie, **21**, *4*, 473 (1973).
6. M. Renert, *Calculul și Construcția Utilajului Chimic*, vol. II, Ed. Did. și Pedagogică, București, 1971, p. 564.
7. A. Romanovski, Kautschuk und Gummi. Kunststoffe, **17**, *9*, *12*, 513 și 717 (1964).

Tovarășului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

MECANISME PSEUDOSPAȚIALE*)

de FR. KOVÁCS
Institutul politehnic Timișoara

Mecanismele pseudospațiale se compun din unul sau mai multe mecanisme sau lanțuri cinematice plane componente legate între ele prin conexiuni cu elemente având mișcare spațială.

Lucrarea prezintă structura și clasificarea acestor mecanisme ca și modalitățile de deducere a relațiilor care permit analiza lor cinematică și sinteza lor dimensională.

1. INTRODUCERE

Folosirea mecanismelor spațiale în construcția de mașini prezintă importante avantaje, legate de posibilitățile cinematice mari (generarea unor mișcări și traiectorii de mare varietate și complexitate cu ajutorul unor mecanisme de construcție relativ simplă) [1] [2] și de valoare ridicată a condițiilor de sinteză dimensională care se pot impune unor asemenea mecanisme [4].

În același timp însă, utilizarea mecanismelor spațiale este limitată de faptul că analiza cinematică, cinetostatica și sinteza dimensională a lor comportă calcule complicate.

Se pot imagina mecanisme spațiale, care sînt compuse la rîndul lor din unul sau mai multe mecanisme și lanțuri cinematice plane ale căror elemente sînt legate între ele prin conexiuni [3] cu mișcare spațială. Asemenea mecanisme prezintă avantajele susmenționate, cercetarea funcționării lor prin mijloace matematice fiind mult simplificată prin faptul că se poate face în etape, ținînd seama de structura amintită, unele etape avînd drept conținut soluționarea unor probleme de mecanisme plane.

Se propune introducerea denumirii de „pseudospațiale" pentru această categorie de mecanisme. Mecanismele pseudospațiale sînt o varietate a așa-ziselor mecanisme complexe, constînd din mai multe contururi de familii diferite. Analiza structurală a unor asemenea mecanisme se

*) Lucrare comunicată la Sesiunea științifică jubiliară a Universității Brașov, februarie 1974.

poate face cu ajutorul a mai multe metode [6], [7], [1], [8], care toate prezintă dezavantajul aprecierii greoaie și uneori neriguroase a „familiei" mecanismului.

În prima parte a prezentei lucrări se indică o nouă metodă de analiză structurală, specifică a mecanismelor pseudospațiale, folosindu-se noțiunea de conexiune [3], ocolind pe această cale necesitatea stabilirii familiei mecanismului.

Se stabilesc, de asemenea, două modalități principale de a compune asemenea mecanisme, de unde se derivă o clasificare a lor în două spețe. Se prezintă apoi căile de aplicare a relațiilor diferitelor conexiuni, analiza și sinteza dimensională a mecanismelor pseudospațiale.

2. STRUCTURA ȘI CLASIFICAREA MECANISMELOR PSEUDOSPAȚIALE

2.1. MECANISME PSEUDOSPAȚIALE DE SPEȚĂ 1

Mecanismele pseudospațiale de speța 1 constau din unul sau mai multe mecanisme plane, ale căror plane de mișcare pot avea poziții relative oarecare, unul sau mai multe elemente cu mișcare spațială și conexiuni care realizează legătura dintre mecanisme plane și elementele cu mișcare spațială componente. Fiecare mecanism plan este în parte desmodrom, deci mecanismul pseudospațial are un număr de elemente conducătoare mai mare sau cel puțin egal cu cel al mecanismelor plane componente.

Fie M_{M_i} gradul de mobilitate al mecanismului plan, M_i, L_{K_i} gradul de libertate al conexiunii, i, K_i, n_E numărul elementelor cu mișcare spațială considerate.

Cu acestea, gradul de mobilitate al unui mecanism pseudospațial de speța 1 va fi:

$$M = \sum M_{M_i} + \sum L_{K_i} + 6n_E. \tag{1}$$

Numărul elementelor conducătoare ale mecanismului pseudospațial este egal cu suma numărului de elemente conducătoare ale mecanismelor plane componente. Din acest motiv, în cazul mecanismelor pseudospațiale desmodrome trebuie să fie îndeplinită condiția

$$M = \sum M_{M_i}$$

sau

$$\sum L_K = -6n_e. \tag{2}$$

În figura 1, se prezintă schema cinematică a mecanismului pseudospațial de speța 1 a unui amestecător, care imprimă recipientului *5* o mișcare spațială.

Singurul mecanism plan component M_1 este un patrulater articulat plan format din elemente *0*, *1*, *2*, *3* și cuplele cinematice de clasa a V-a de rotație *A*, *B*, *C* și *D*, cu axele paralele. Elementul *5* — recipientul — este legat prin conexiuni $K_{B(-1)}$ de elementele 1, respectiv *3*, ale mecanis-

mului plan component și prin conexiunea $K_{A(-4)}$ de biela *4* a aceluiași mecanism.

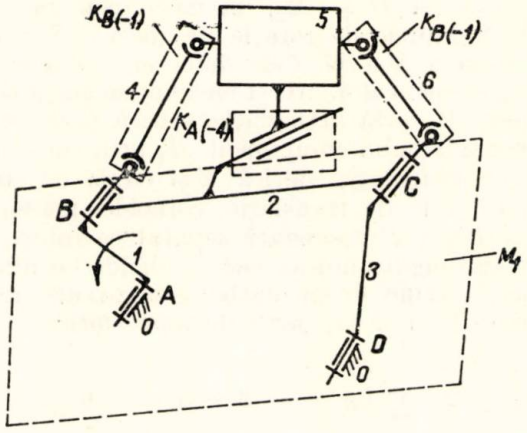


Fig. 1

Avînd $M_{M_1} = 1$, $\sum L_{K_i} = -1 - 1 - 4 = -6$ și $n_E = 1$, rezultă din relația (1), gradul de mobilitate

$$M = 1 - 6 + 6 = 1,$$

mecanismul fiind desmodrom, avînd un element motor.

În figura 2 este redat mecanismul pseudospațial de speța 1 a unui dispozitiv de rectificare a unei suprafețe riglate.

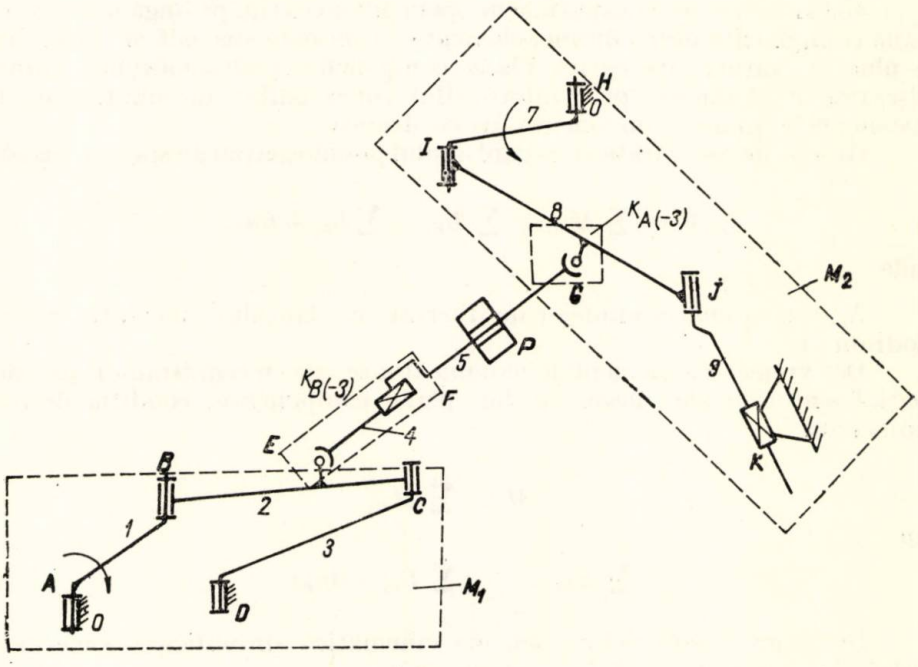


Fig. 2

Mecanismul are două mecanisme plane componente M_1, un patrulater articulat format din elementele *0*, *1*, *2* și *3* și cuplele de rotație de clasa a V-a *A*, *B*, *C* și *D* și M_2, un mecanism manivelă-piston *3* cu elementele *0*, *7*, *8*, *9* cuplele de rotație de clasa a V-a *H*, *I*, *J* și cupla de translație de clasa a V-a *K*. Cele două mecanisme componente sînt legate între ele prin elementul *5*. Acest element se leagă la biela *8* a mecanismului component M_2 prin articulația sferică *G* (o conexiune $K_{A(-3)}$), iar de biela 2 a mecanismului component M_1 prin conexiunea $K_{B(-3)}$ care conține elementul *4* articulația sferică *E* și cupla de translație de clasa a V-a *F*, a cărei direcție de translație coincide mereu cu direcția *EG*.

Piatra de rectificat *P* antrenată separat se rotește și translatează în jurul, respectiv în lungul unui ax care coincide cu direcția *EG* și care riglează o suprafață avînd drept curbe generatoare traiectoriile plane descrise de centrele *E* și *G* ale articulațiilor sferice.

Avînd

$$\sum M_{M_i} = 2, \quad \sum L_{K_i} = -3 - 3 = -6 \text{ și } n_E = 1$$

din relația (1) rezultă

$$M = 2 - 6 + 6 = 2,$$

mecanismul fiind desmodrom, avînd două elemente conducătoare.

2.2. MECANISME PSEUDOSPAȚIALE DE SPEȚA A 2-A

Mecanismele pseudospațiale de speța a 2-a conțin, pe lîngă mecanisme plane componente desmodrome, elemente cu mișcare spațială și conexiuni în plus și lanțuri cinematice plane componente nedesmodrome, cărora mișcarea se comunică prin intermediul conexiunilor susamintite de la mecanismele plane componente desmodrome.

Gradul de mobilitate al mecanismului pseudospațial de speța a 2-a este

$$M = \sum M_{M_i} + \sum L_{K_i} + \sum L_{L_i} + 6n_E, \tag{3}$$

unde

L_{L_i} este numărul gradelor de libertate ale lanțului cinematic nedesmodrom L_i.

De vreme ce elementele conducătoare ale mecanismului pseudospațial sînt cele ale mecanismelor plane componente, condiția desmodromei este

$$M = \sum M_{M_i}$$

sau

$$\sum L_{K_i} = -(\sum L_{L_i} + 6n_E). \tag{4}$$

În figura 3 este redată schema cinematică simplificată a mecanismului timoneriei de frînă la vagoane [9].

Mecanismul are ca și componente plane M_1, un mecanism piston-balansier format din elementele *0*, *1*, *2*, *3*, cuplele de rotație de clasa a V-a *B*, *C*, *D* și cupla de translație de clasa a V-a *C* și L_2, un lanț cinematic cu o articulație dublă de clasa a V-a *J*, cuplele de rotație *G*, *H*, *J*, *P*, *R*, *T* și elementele *5*, *6*, *7*, *8*, *9*, *10*. Mecanismul M_1 este mecanismul de comandă, conținînd un cilindru de forță *C* cu piston ca element conducător, iar L_2, cel de execuție, comandînd mișcarea sabotului *S*. L_2 nu are element conducător, mecanismul M_1 și lanțul cinematic L_2 cu planele de mișcare perpendiculare sînt legate între ele prin conexiunea $K_{B(-1)}$ conținînd elementul *4* și cuplele sferice, *E* și *F*.

La mecanismul de mai sus, $M_{M_1} = 1$, $L_{L_2} = 1$, $L_{K_B} = -1$, $n_E = 0$, deci gradul de mobilitate va fi după (3)

$$M = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Mecanismul avînd un singur element conducător, este desmodrom.

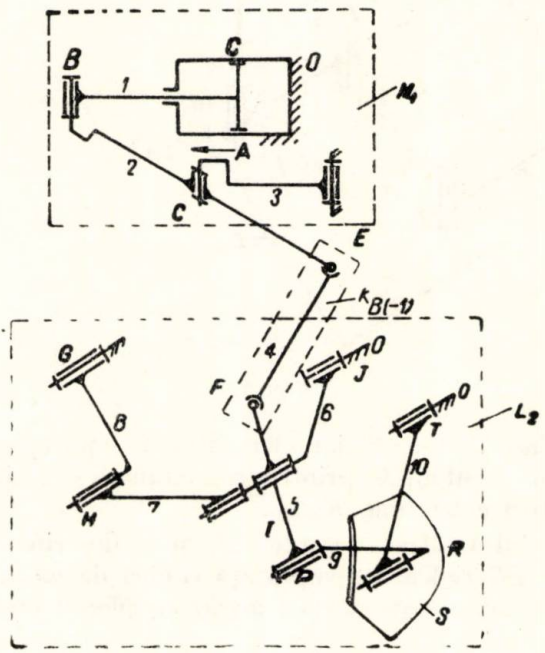


Fig. 3

În figura 4, se prezintă mecanismul pseudospațial de ghidare pe o suprafață conică a unui dispozitiv de sudare pe un contur eliptic.

Mecanismul are, ca și componente M_1, un mecanism manivelă piston format din elementele *0*, *1*, *2*, *3*, cuplele de rotație de clasa a V-a *A*, *B*, *C* și cupla de translație de clasa a V-a *D* și L_2, un lanț cinematic

cu 5 elemente (*0*, *6*, *7*, *8*, *9*), cu cuplele de rotaţie de clasa a V-a *H*, *I*, *J*, *N*, *P*. Mecanismul component M_1 este un elipsograf, iar lanţul L_2, un pantograf, planele de mişcare ale amîndorura fiind paralele. Mecanismul M_1 şi lanţul L_2 sînt legate prin conexiunea $K_{A(-5)}$ formată din cupla

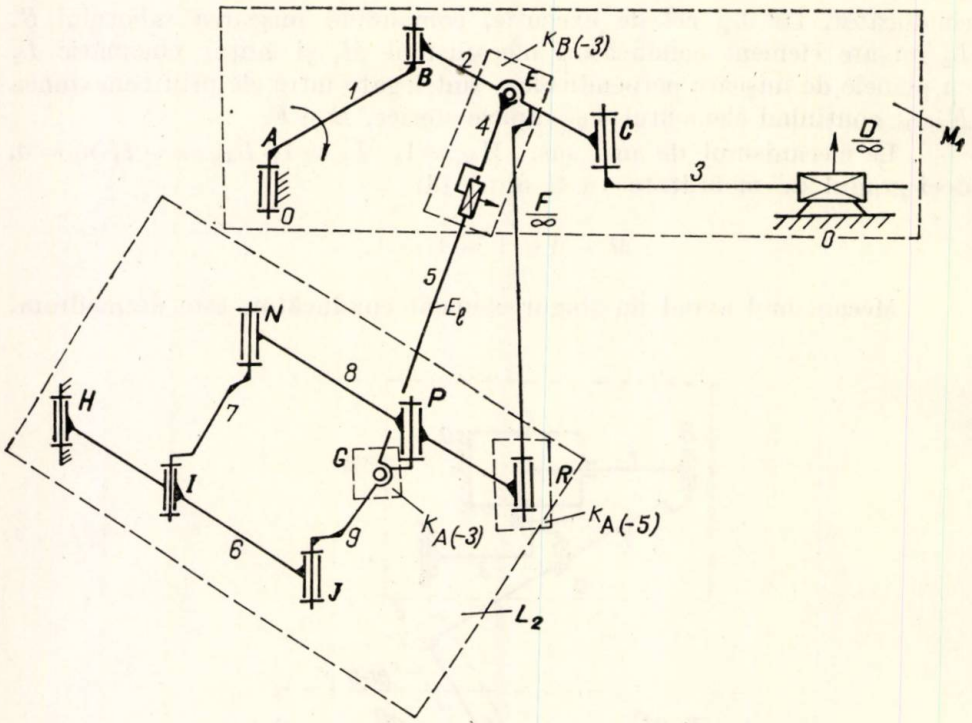


Fig. 4

cinematică de clasa a V-a *R*, iar elementul *5* — portelectrodul E_l — se leagă de elementul doi al lui M_1 printr-o conexiune $K_{B(-3)}$, iar de elementul *9* al lui L_2 printr-o conexiune $K_{A(-3)}$.

Prin montajul realizat, punctele *E* şi *G* descriu elipse omotetice paralele, dreapta *EG* riglează o suprafaţă conică de secţiune eliptică, iar portelectrodul E_l face mereu acelaşi unghi cu planul elipsei descrise de punctul *G*.

La mecanismul de mai sus, $M_{M_1} = 1$, $L_{L_2} = 5$, $\sum L_K = -5 - 3 - -3 = -11$, $n_E = 1$.

Cu acestea, gradul de mobilitate al mecanismului are valoarea după (3)

$$M = 1 + 5 - 11 + 6 = 1.$$

El avînd un singur element conducător, este desmodrom.

3. PRINCIPIILE ANALIZEI CINEMATICE ȘI SINTEZEI DIMENSIONALE A MECANISMELOR PSEUDOSPAȚIALE

Analiza cinematică și sinteza dimensională a mecanismelor pseudospațiale se efectuează în etape corespunzătoare structurii acestora.

În cazul mecanismelor pseudospațiale de speța 1, se rezolvă la început problemele legate de mecanismele plane desmodrome componente, apoi cele care privesc conexiunile conținute și, în sfîrșit, cele referitoare la elementele cu mișcare spațială care intră în componența mecanismului.

În cazul mecanismelor pseudospațiale de speța a 2-a, ordinea de soluționare a problemelor este similară, cu deosebirea că după rezolvarea celora care se referă la conexiuni, se studiază lanțurile cinematice plane componente.

Metodele de analiză cinematică și sinteză dimensională a mecanismelor și lanțurilor cinematice plane componente sînt cele cunoscute.

Se pot scrie relații de tipul celor prezentate în lucrările [3] și [5], între pozițiile relative ale elementelor între care se interpun conexiunil cu mișcare spațială. Ele vor prezenta particularitatea că elementele în cauză sînt fie amîndouă cu mișcare plană, fie una cu mișcare plană, iar cealaltă cu mișcare spațială.

Cunoscînd datele dimensionale ale conexiunilor cu mișcare spațială, cu ajutorul relațiilor susamintite se pot determina date poziționale ale unui element în funcție de cele cunoscute ale altui element, cu care este legat prin conexiunea în discuție (analiză cinematică).

Cunoscînd pozițiile relative ale celor două elemente în mai multe momente succesive, aceleași relații servesc pentru calculul datelor dimensionale ale conexiunilor (sinteză dimensională).

4. CONCLUZII

Mecanismele pseudospațiale au un cîmp de aplicație foarte larg, ele prezentînd toate avantajele mecanismelor spațiale cît și cel al unor posibilități de soluționare relativ simplă a problemelor legate de analiza cinetică și sinteza lor dimensională.

Metodele elaborate în [3], [5] se aplică conexiunilor spațiale componente, studiul celorlalte părți componente ale mecanismelor pseudospațiale realizîndu-se pe căile uzitate la mecanismele plane.

Primită la redacție la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Teoria mecanismelor spațiale*, Editura Academiei, R. S. România, București, 1972.
2. R. Beyer, *Technische Raumkinematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
3. F. Kovács, *Contribuții la elaborarea unei metode unitare de sinteză a mecanismelor*, Teză de doctorat, Timișoara, 1969.

4. F. Kovács, *Beitrag zu einer allgemeinen Theorie der Wertigkeitsbilanz ebener und räumlicher Getriebe*, Simpozionul internațional de mecanisme și metode de proiectare pe calculator, Vol. B, București, 1973.
5. F. Kovács, *Eine einheitliche Methode der Synthese ebener und räumlicher Getriebe*, Third World Congress on the TMM Proceedings D. Kupari 1971.
6. V. Manafu, *Teoria mecanismelor și mașinilor. Structura și cinematica mecanismelor*, Edit. tehnică, București, 1959.
7. N. I. Manolescu, *Contribuții la sinteza numerică și structurală a grupelor ASSUR*, Teză de doctorat, București, 1969.
8. P. Antonescu, *Extinderea formulei structurale Dobrovolski la mecanismele complexe de familie aparentă*, Simpozionul internațional de mecanisme și metode de proiectare pe calculator, București, 1973.
9. P. Antonescu, *Contribuții la analiza structurală și cinematică a mecanismelor de frînare a vagoanelor*, Simpozionul internațional de mecanisme și metode de proiectare pe calculator, București, 1973.
10. W. Rössner, *Zur Struktureller Ordnung der Getriebe. W. V. T.*, Universität Dresden *10* (1961).
11. W. Lichtenheldt, *Zur Systematik der Raumgetriebe. W. Z. T.*, Universität Dresden *2* (1963).

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

METODA TRANSFORMĂRILOR PROIECTIVE PENTRU SINTEZA MECANISMELOR PATRULATERE PLANE ARTICULATE PE CALCULATOR

de N. MANOLESCU, N. PANDREA, D. NICA
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se elaborează o nouă metodă pentru determinarea punctelor lui Burmester pe calculator, pe baza proprietăţilor proiective ale cubicelor.

Pentru aceasta se deduce o nouă formă de exprimare a cubicelor centrelor Γ_0 pe baza teoremei izoprodusului ariilor, stabilită în lucrare.

Aplicarea acestei metode duce la mărirea eficienţei în proiectare.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

1.1. STADIUL ACTUAL

Sinteza mecanismelor patrulatere plane articulate, pentru cinci poziţii impuse unei porţiuni din planul bielei, se reduce la determinarea punctelor lui Burmester, care rezultă după cum se ştie, la intersecţia curbelor centrelor. Dificultăţile de calcul care se întîmpină la rezolvarea sistemului de ecuaţii au condus la dezvoltarea unor metode care constau în reprezentarea grafică a curbelor centrelor ceea ce permite determinarea pe cale grafică a punctelor lui Burmester. Metodele grafice nu permit însă realizarea preciziei impuse de temă.

Pentru a se înlătura acest inconvenient s-au elaborat o serie de metode analitice pentru a determina punctele lui Burmester cu ajutorul calculatoarelor.

Astfel, F. Freudenstein şi G. Sandor în lucrarea [3] au elaborat o metodă bazată pe calculul algebric cu numere complexe, din care se desprinde un algoritm pentru programarea pe calculator.

Lucrările [2] [4] [5] [9] tratează de asemenea aceleaşi probleme. Într-o lucrare recentă [8], D. Perju elaborează o nouă metodă de aflare a punctelor lui Burmester, plecînd de la observaţia că dreptele paralele la o asimptotă intersectează curba centrelor numai în două puncte la distanţă finită.

În prezenta lucrare se va elabora o nouă metodă pentru determinarea curbelor centrelor și a punctelor lui Burmester pe baza „*teoremei izoprodusului ariilor*" ce va fi stabilită și a proprietăților proiective ale cubicelor.

1.2. FORMULAREA PROBLEMEI

Se consideră planul mobil p care se deplasează rămînînd suprapus peste planul fix P (fig. 1).

Se alege sistemul de referință fix $OXYZ$ astfel încît planul OXY să coincidă cu planul fix P și sistemul de referință mobil $oxyz$ astfel încît planul oxy să coincidă cu planul mobil p.

Poziția sistemului mobil față de sistemul fix se poate defini prin coordonatele (a, b) ale originii (0) și prin unghiul θ pe care axa ox îl face cu axa fixă OX (fig. 1).

În această poziție, un punct oarecare M are coordonatele (x,y) în raport cu planul oxy. O poziție oarecare a planului mobil va fi dată prin setul de valori a_i, b_i, θ_i și, corespunzător acestei poziții, punctul M din planul mobil va ocupa poziția M_i (fig. 2).

Fie (X_i, Y_i) coordonatele punctului M_i față de sistemul fix. Pentru patru poziții date ale planului mobil punctul din planul fix, care este egal depărtat de punctele M_i $(i = 1,2,3,4)$, este $C(X,Y)$.

Punctul C descrie, după cum se știe, față de planul fix [6], cubica (curba centrelor) Γ^0_{1234}.

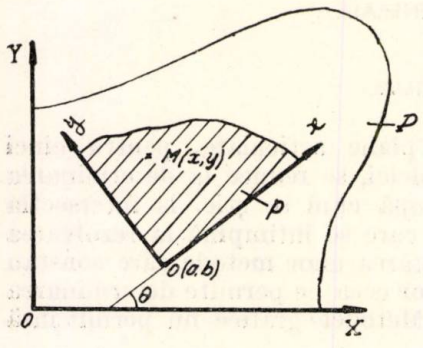


Fig. 1

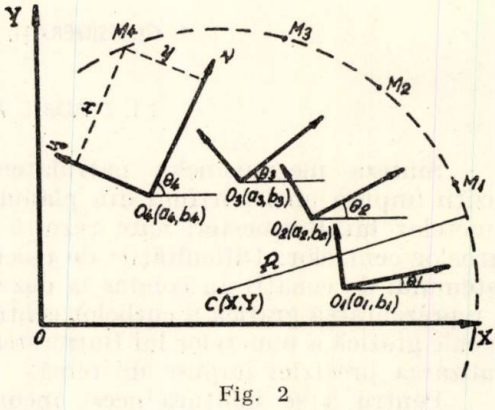


Fig. 2

Pentru cinci poziții în mod analog rezultă, după cum se știe, cubicele Γ^0_{1235}, Γ^0_{1245}, Γ^0_{1345}, Γ^0_{2345}. Cele cinci cubice se intersectează în 4,2,0, puncte reale (punctele lui Burmester).

1.3. POLII DE ROTAȚIE FINITĂ

Fie (X_{ij}, Y_{ij}) coordonatele polului P_{ij} față de sistemul de referință fix. Ținînd seama de relațiile de transformare

$$\begin{aligned} X_i &= a_i + x \cos \theta_i - y \sin \theta_i, \\ Y_i &= b_i + x \sin \theta_i + y \cos \theta_i, \end{aligned} \tag{1}$$

precum și de faptul că polul P_{ij} aparține și planului mobil în cele două poziții, rezultă

$$X_{ij} = a_i + x \cos \theta_i - y \sin \theta_i = a_j + x \cos \theta_j - y \sin \theta_j,$$
$$Y_{ij} = b_i + x \sin \theta_i + y \cos \theta_i = b_j + x \sin \theta_i + y \cos \theta_j. \tag{2}$$

Din relațiile (2), eliminînd coordonatele (x,y) se obțin coordonatele polului P_{ij} de rotație finită în planul fix,

$$X_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2} - \frac{b_i - b_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_i - \theta_j}{2},$$
$$Y_{ij} = \frac{b_i + b_j}{2} + \frac{a_i - a_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_i - \theta_j}{2}. \tag{3}$$

2. STABILIREA TEOREMEI IZOPRODUSULUI ARIILOR

TEOREMĂ. *Produsul ariilor a trei triunghiuri neadiacente, formate de polii de rotație finită și un punct de pe curba centrelor, este egal cu produsul ariilor celorlalte trei triunghiuri corespunzătoare ce se formează din contrapoli și același punct de pe curba centrelor.*

Fie P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34} cei șase poli de rotație finită care corespund la cele patru poziții date ale planului mobil.

Conform teoremei izovizibilității [6], dintr-un punct al curbei centrelor, segmentele obținute prin unirea a doi poli, respectiv a celor doi contrapoli, se văd sub unghiuri egale (fig. 3).

Dacă C este un punct al curbei centrelor, din teorema izovizibilității rezultă egalitatea

$$\sphericalangle P_{12} C P_{23} = \sphericalangle P_{14} C P_{34} = \varphi = \varphi_{13}. \tag{4}$$

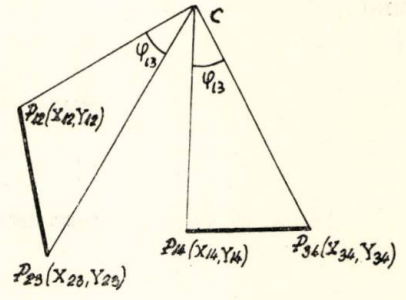


Fig. 3

Fie S_{213}, S_{413} ariile triunghiurilor $P_{12}\,CP_{23}$; $P_{14}\,CP_{34}$.

Ținînd seama de egalitățile

$$S_{213} = \frac{CP_{12} \cdot CP_{23} \sin \varphi_{13}}{2}, \tag{5}$$

$$S_{413} = \frac{CP_{14} \cdot C\,P_{34} \sin \varphi_{13}}{2}, \tag{6}$$

rezultă

$$\frac{S_{213}}{S_{413}} = \frac{CP_{12} \cdot CP_{23}}{CP_{14} \cdot CP_{34}}. \tag{7}$$

În mod analog se mai pot obține relațiile

$$\frac{S_{412}}{S_{312}} = \frac{CP_{14} \cdot CP_{24}}{CP_{13} \cdot CP_{23}}, \tag{8}$$

$$\frac{S_{314}}{S_{214}} = \frac{CP_{13} \cdot CP_{34}}{CP_{12} \cdot CP_{24}}. \tag{9}$$

Din produsul relațiilor (7) (8) (9) rezultă, după simplificări,

$$S_{213} \cdot S_{412} \cdot S_{314} = S_{413} \cdot S_{312} \cdot S_{214}, \tag{10}$$

ceea ce reprezintă „*teorema izoprodusului areolar*".

3. DETERMINAREA ECUAȚIEI CURBEI CENTRELOR PE BAZA TEOREMEI IZOPRODUSULUI ARIILOR

Aria S_{213} a trîunghiului $P_{12}\ C\ P_{23}$, ținînd seama de notațiile din figura 3, se poate exprima prin relația

$$S_{213} = \pm \frac{1}{2} \Delta_{213}, \tag{11}$$

unde

$$\Delta_{213} = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_{21} & Y_{21} & 1 \\ X_{23} & Y_{23} & 1 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Dacă se va considera prin Δ_{kij} expresia

$$\Delta_{kij} = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_{ki} & Y_{ki} & 1 \\ X_{kj} & Y_{kj} & 1 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

atunci, din relația (10), ținînd seama de (12) și (13), rezultă ecuația cubicei :

$$\Gamma^0_{1234} = \Delta_{213} \cdot \Delta_{412} \cdot \Delta_{314} - \Delta_{413} \cdot \Delta_{312} \cdot \Delta_{214} = 0. \tag{14}$$

În general se va obține pentru cubica Γ^0_{1234} relația

$$\Gamma^0_{ijkl} = \Delta_{jik} \cdot \Delta_{lij} \cdot \Delta_{kil} - \Delta_{lik} \cdot \Delta_{kij} \cdot \Delta_{jil} = 0, \tag{15}$$

unde $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ și $i \neq j \neq k \neq l$.

4. STABILIREA METODEI TRANSFORMĂRILOR PROIECTIVE PENTRU DETERMINAREA PUNCTELOR BURMESTER

Se consideră cubicele Γ_{1234}, Γ_{1235} și ecuațiile omogene corespunzătoare care se obțin din relația (15) considerînd

$$\Delta_{kij} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_{ki} & Y_{ki} & 1 \\ X_{kj} & Y_{kj} & 1 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Rezultă

$$\Gamma^0_{1234} \equiv \Delta_{213}\ \Delta_{412}\ \Delta_{314} - \Delta_{413}\ \Delta_{312}\ \Delta_{214} = 0, \tag{17}$$

$$\Gamma^0_{1235} \equiv \Delta_{213}\ \Delta_{512}\ \Delta_{315} - \Delta_{513}\ \Delta_{312}\ \Delta_{215} = 0. \tag{18}$$

Se consideră transformarea proiectivă:

$$\xi = \Delta_{213} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_{21} & Y_{21} & 1 \\ X_{23} & Y_{23} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\eta = \Delta_{312} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_{31} & Y_{31} & 1 \\ X_{32} & Y_{32} & 1 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

$$\zeta = \Delta_{123} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_{12} & Y_{12} & 1 \\ X_{13} & Y_{13} & 1 \end{vmatrix}.$$

Dacă se notează

$$\begin{aligned} A_{11} &= Y_{21} - Y_{23} \ ; \ A_{12} = X_{23} - X_{21}, \\ A_{21} &= Y_{31} - Y_{32} \ ; \ A_{22} = X_{32} - X_{31}, \\ A_{31} &= Y_{12} - Y_{13} \ ; \ A_{32} = X_{13} - X_{12}, \\ A_{13} &= X_{21}\ Y_{23} - X_{23}\ Y_{21}, \\ A_{23} &= X_{31}\ Y_{32} - X_{32}\ Y_{31}, \\ A_{33} &= X_{12}\ Y_{13} - X_{13}\ Y_{12}, \end{aligned} \tag{20}$$

relațiile (19) devin

$$\begin{aligned} \xi &= A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z, \\ \eta &= A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z, \\ \zeta &= A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z. \end{aligned} \tag{21}$$

Relațiile (21) cu ajutorul matricei

$$(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{22}$$

se scriu astfel

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Rezultă

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (\alpha) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \tag{24}$$

unde

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = (A)^{-1}. \tag{25}$$

Ținînd seama de relațiile (25), rezultă

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} X_{31} & -X_{21} & -X_{32} \\ Y_{31} & -Y_{21} & -Y_{32} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

unde

$$\delta = \begin{vmatrix} X_{12} & X_{23} & X_{13} \\ Y_{12} & Y_{23} & Y_{13} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Astfel, relaţiile (24) devin :

$$\begin{aligned} \delta \cdot X &= X_{31}\xi - X_{21}\eta - X_{32}\zeta, \\ \delta \cdot Y &= Y_{31}\xi - Y_{21}\eta - Y_{32}\zeta, \\ \delta \cdot Z &= \quad \xi - \quad \eta - \quad \zeta. \end{aligned} \tag{28}$$

Se foloseşte în continuare notaţia

$$|ij\ kl\ mn| = \begin{vmatrix} X_{ij} & Y_{ij} & 1 \\ X_{kl} & Y_{kl} & 1 \\ X_{mn} & Y_{mn} & 1 \end{vmatrix} \tag{29}$$

Ţinînd seama de relaţiile (16) (28) (29), rezultă

$$\Delta_{314} = \frac{1}{\delta}(\beta_2\eta + \beta_3\zeta), \tag{30}$$

$$\Delta_{214} = \frac{1}{\delta}(\beta_4\xi + \beta_6\zeta), \tag{31}$$

$$\Delta_{412} = \frac{1}{\delta}(\beta_7\xi + \beta_8\eta + \beta_9\zeta), \tag{32}$$

$$\Delta_{413} = \frac{1}{\delta}(\beta_{10}\xi + \beta_{11}\eta + \beta_{12}\zeta), \tag{33}$$

unde

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -|21\ 31\ 34|\,;\ \beta_3 = -|32\ 31\ 34|, \\ \beta_4 &= \ \ |31\ 21\ 24|\,;\ \beta_6 = -|32\ 21\ 24|, \\ \beta_7 &= \ \ |31\ 41\ 42|\,;\ \beta_8 = -|21\ 41\ 42|, \\ \beta_9 &= -|32\ 41\ 42|\,;\ \beta_{10} = \ \ |31\ 41\ 43|, \\ \beta_{11} &= -|21\ 41\ 43|\,;\ \beta_{12} = -|32\ 41\ 43|. \end{aligned} \tag{34}$$

Introducînd expresiile (19) (30) (31) (32) (33) în ecuaţia cubicei (17) se obţine ecuaţia

$$\xi(\beta_7\xi + \beta_8\eta + \beta_9\zeta)(\beta_2\eta + \beta_3\zeta) - \eta(\beta_{10}\xi + \beta_{11}\eta + \beta_{12}\zeta)(\beta_4\xi + \beta_6\zeta) = 0. \tag{35}$$

Dacă în ecuaţia (35) se face $\zeta = 1$ şi se dezvoltă, rezultă ecuaţia transfomată a cubicei (Γ^0_{1234}) :

$$\eta^2(\gamma_1\xi + \gamma_2) + \eta(\gamma_3\xi^2 + \gamma_4\xi + \gamma_5) + \gamma_6\xi^2 + \gamma_7\xi = 0, \tag{36}$$

unde

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \beta_2\beta_8 - \beta_4\beta_{11}; & \gamma_5 &= -\beta_6\beta_{12},\\
\gamma_2 &= -\beta_6\beta_{11}; & \gamma_6 &= \beta_3\beta_7,\\
\gamma_3 &= \beta_2\beta_7 - \beta_4\gamma_{11}; & \gamma_7 &= \beta_3\beta_9,\\
\gamma_4 &= \beta_2\beta_9 + \beta_3\beta_8 - \beta_4\beta_{12} - \beta_6\beta_{10}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Din relațiile (34), (36), (37), înlocuind indicele 4 cu 5, β_i cu β'_i, γ_i cu γ'_i, rezultă ecuația transformată a cubicei Γ^0_{1235} și anume :

$$\eta^2(\gamma'_1\xi + \gamma'_2) + \eta(\gamma'_3\xi^2 + \gamma'_4\xi + \gamma'_5) + \gamma'_6\xi^2 + \gamma'_7\xi = 0. \tag{38}$$

Se elimină prin metodea Cauchy [1] necunoscuta η din ecuațiile (36) (38) și rezultă realizantul :

$$\begin{aligned}
&-[(\gamma_1\xi+\gamma_2)(\gamma'_6\xi^2+\gamma'_7\xi) - (\gamma'_1\xi+\gamma'_2)(\gamma_6\xi^2+\gamma_7\xi)]^2 +\\
&+[(\gamma_1\xi+\gamma_2)(\gamma'_3\xi^2+\gamma'_4\xi+\gamma'_5) - (\gamma'_1\xi+\gamma'_2)(\gamma_3\xi^2+\gamma_4\xi+\gamma_5]\times\\
&\times[(\gamma_3\xi^2+\gamma_4\xi+\gamma_5)(\gamma'_6\xi^2+\gamma'_7\xi) - (\gamma'_3\xi^2+\gamma'_4\xi+\gamma'_5)(\gamma_6\xi^2+\gamma_7\xi)]=0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Dacă se fac notațiile :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \gamma_1\gamma'_6 - \gamma_6\gamma'_1,\\
\delta_2 &= \gamma_2\gamma'_6 + \gamma_1\gamma'_7 - \gamma_6\gamma'_2 - \gamma_7\gamma'_1,\\
\delta_3 &= \gamma_2\gamma'_7 - \gamma_7\gamma'_2,\\
\delta_4 &= \gamma_1\gamma'_3 - \gamma_3\gamma'_1,\\
\delta_5 &= \gamma_2\gamma'_3 + \gamma_1\gamma'_4 - \gamma_3\gamma'_2 - \gamma_4\gamma'_1,\\
\delta_6 &= \gamma_2\gamma'_4 + \gamma_1\gamma'_5 - \gamma_4\gamma'_2 - \gamma_5\gamma'_1,\\
\delta_7 &= \gamma_2\gamma'_5 - \gamma_5\gamma'_2,\\
\delta_8 &= \gamma_3\gamma'_6 - \gamma_6\gamma'_3,\\
\delta_9 &= \gamma_3\gamma'_7 + \gamma_4\gamma'_6 - \gamma_7\gamma'_3 - \gamma_6\gamma'_4,\\
\delta_{10} &= \gamma_4\gamma'_7 + \gamma_5\gamma'_6 - \gamma_7\gamma'_4 - \gamma_6\gamma'_5,\\
\delta_{11} &= \gamma_5\gamma'_7 - \gamma_7\gamma'_5,
\end{aligned} \tag{40}$$

precum și

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \delta_4\delta_8,\\
\omega_2 &= \delta_4\delta_9 + \delta_5\delta_8 - \delta_1^2,\\
\omega_3 &= \delta_4\delta_{10} + \delta_5\delta_9 + \delta_6\delta_8 - 2\delta_1\delta_2,\\
\omega_4 &= \delta_4\delta_{10} + \delta_5\delta_9 + \delta_6\delta_8 - 2\delta_1\delta_2,\\
\omega_5 &= \delta_4\delta_{11} + \delta_5\delta_{10} + \delta_6\delta_9 + \delta_7\delta_8 - \delta_2^2 - 2\delta_1\delta_3,\\
\omega_6 &= \delta_6\delta_{11} + \delta_7\delta_{10} - \delta_3^2,\\
\omega_7 &= \delta_7\delta_{11},
\end{aligned} \tag{41}$$

atunci ecuația (39), după simplificarea cu ξ, devine

$$\omega_1\xi^6 + \omega_2\xi^5 + \omega_3\xi^4 + \omega_4\xi^3 + \omega_5\xi^2 + \omega_6\xi + \omega_7 = 0. \tag{42}$$

Soluția $\xi = 0$ corespunde polului P_{23} care este punct de intersecție a celor două cubice dar care nu este punct Burmester. Ceilalți doi poli P_{12}, P_{13}, care, de asemenea, sînt puncte de intersecție ale celor două cubice, prin transformarea făcută devin puncte la infinit.

Punctele Burmester se vor determina rezolvînd ecuația (42).

Această ecuație va admite în mod sigur două rădăcini complexe, care de fapt corespund punctelor ciclice din planul OXY. Aceste puncte în planul proiectiv transformat, potrivit cu relațiile (21) au coordonatele omogene :

$$\begin{aligned} \xi' &= A_{11} + iA_{12}\,; \quad \xi'' = A_{11} - iA_{12}, \\ \eta' &= A_{12} + iA_{22}\,; \quad \eta'' = A_{21} - iA_{22}, \\ \zeta' &= A_{31} + iA_{32}\,; \quad \zeta'' = A_{31} - iA_{32}. \end{aligned} \tag{43}$$

De aici rezultă că valorile complexe neomogene,

$$\xi_1 = \frac{A_{11} + iA_{12}}{A_{31} + iA_{32}}; \qquad \xi_2 = \frac{A_{11} - iA_{12}}{A_{31} - iA_{32}}, \tag{44}$$

sînt soluțiile ecuației (42).

Pentru aflarea coordonatei η se elimină η^2 din relațiile (36) (38) și rezultă

$$\eta = -\frac{\delta_1\xi^3 + \delta_2\xi^2 + \delta_3\xi}{\delta_4\xi^3 + \delta_5\xi^2 + \delta_6\xi - \delta_7}. \tag{45}$$

Cu soluțiile reale deduse din ecuația (42) pentru ξ, respectiv din (45) pentru η, și făcînd $\zeta = 1$ se deduc coordonatele omogene X, Y, Z cu ajutorul relațiilor (28). Soluțiile neomogene vor fi date de relațiile :

$$X = \frac{X_{31}\xi - X_{21}\eta - X_{32}}{\xi - \eta - 1}; \qquad Y = \frac{Y_{31}\xi - Y_{21}\eta - Y_{32}}{\xi - \eta - 1}. \tag{46}$$

5. CONCLUZII

5.1. Ecuația (42) a cărei rezolvare, ținînd seamă de relațiile (44), are marele avantaj că reduce gradul ecuației de intersecție a cubicelor (17) și (18) de la 9 la 6 cu evidenta posibilitate deci a rezolvării ei cu ajutorul calculatorului.

Este clar că planul de calcul al acestei metode este laborios (vezi relațiile (20) ; (30) — (34) ; (37) ; (39) — (42)).

Munca însă este compensată de posibilitatea elaborării unui algoritm de calcul, valabil pentru orice caz pus în practica proiectantului :

Teorema „izoprodusului ariilor" (care după cum vom arăta în alte lucrări are deosebite posibilităţi de utilizare în diferite cazuri particulare) a permis iniţierea acestei metode ca o completare a celei prezentate în linii generale în [6] de primul autor.

5.2. *Algoritmul* determinării coordonatelor X, Y ale punctelor Burmester are următoarea succesiune de calcul :

Se determină :

— coordonatele polilor de rotaţie finită cu formulele (3),
— coeficienţii A_{ij} cu relaţiile (20),
— coeficienţii β_i, β'_i cu relaţiile (34),
— coeficienţii γ_i, γ'_i cu relaţiile (37),
— coeficienţii δ_i cu relaţiile (40),
— coeficienţii ω_i cu relaţiile (41),
— rădăcinile ξ ale ecuaţiei (42),
— valorile η cu relaţia (45),
— soluţiile neomogene X, Y (coordonatele punctelor Burmester) rezultă din relaţiile (46).

Programul stă la dispoziţia celor interesaţi.

Primită la redacţie la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. E. Arghiriade, A. Dragomir, P. Dragomir, *Algebră*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964, p. 262—280.
2. A. E. Dijksman, *Calculation an Construction of the Burmester Points for Five Positions of a Moving Plane*, Transactions of the A. S. M. E., Jurnal of Engineering for Industry, February, 1969, p. 66—74.
3. F. Freudenstein, G. Sandor, *On the Burmester Points of a Plane*, *Transactions of the A.S.M.E.*, Journal of Applied Mechanics, March 1961, p. 41—49.
4. R. R. Kaufman, *Singular Solutions in Burmester Theory*, Transactions of the A.S.M.E., Journal of Engineerng for Industry, May 1973, p. 572—576.
5. R. R. Keller, *Sketching Rules for the Curves of Burmester Mechanism Synthesis*, *Transactions of the A.S.M.E.*, *Journal* of Engineering for Industry May 1965, p. 155—160.
6. N. Manolescu, Fr. Kovács, A. Oränescu, *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970, p. 305—370.
7. N. Pandrea, *Contribuţii la studiul mecanismelor spaţiale cu ajutorul teoriei şuruburilor*, Teză de doctorat, Bucureşti, aprilie 1973.
8. D. Perju, *A New Analitical Method to Establish Points on the Curves of Dimensional Synthesis and to determine Burmester Points*, I F T o M M International Symposium on Linkages and Computer Design Methods, Bucharest, Romania, Iune 7—13, 1973, p. 485—501.
9. F. E. I. Primerose, F. Freudenstein, N. G. Sandor, *Finite Burmester Theory in Plane Kinematics*, *Transactions of A.S.M.E.*, Journal of Applied Mechanics, December 1964, p. 683—693.
10. G. Vrînceanu, *Geometrie analitică şi proiectivă*, Editura tehnică, Bucureşti, 1954, p. 246—253.

Tovarășului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

DEPENDENȚA UZARE-FIABILITATE PENTRU O CUPLĂ DE FRECARE PISTON-CILINDRU

de D. PAVELESCU

Institutul politehnic București

În continuarea lucrărilor [2], [3], în care s-au stabilit ecuațiile de regresie ale vitezelor de uzare pentru o cuplă segment-cilindru, funcție de duritatea suprafețelor și viteza relativă, precum și durabilitatea optimă și ponderea de influență a parametrilor considerați asupra vitezei de uzură, autorul prezintă cîteva aspecte privind dependența durabilitate-fiabilitate, pentru aceeași cuplă de frecare și o serie de compresoare. Concluzia este: se poate determina o fiabilitate minimă, cunoscînd viteza de uzare.

După cum se cunoaște, determinarea fiabilității unei mașini urmărește stabilitatea probabilității ca acea mașină să prezinte siguranță în funcționare o periodă impusă, în condiții cerute [1], [4]. Problema poate fi considerată și la scara unei mulțimi de mașini în ipoteza că ele funcționează în aceleași condiții din punctul de vedere al parametrilor externi (presiune, temperatură, viteză, mediu, întreținere etc.) cît și a parametrilor interni (materiale, stare de suprafață, duritate, ungere etc.). Se pot admite și alte ipoteze privind natura defecțiunilor, modul de apariție a acestora etc.

În același timp, fiabilitatea unei singure mașini este dependentă de fiabilitatea organelor de mașini componente (lagăre de alunecare sau de rostogolire, angrenaje, dispozitive de etanșare, etc.). Interesează deci fiabilitatea fiecărei cuple de frecare în parte.

În cele ce urmează ne vom ocupa de o cuplă de frecare segment-cilindru (fontă-fontă, F_c-35), căreia, în lucrările precedente [2], [3], i-am stabilit ecuațiile de regresie ale vitezelor de uzare ale ambelor suprafețe, în funcție de duritatea acestora și de viteza relativă; spre exemplu:

Segment:

$$V_{u_s} = (-21{,}280 - 0{,}0632\ HB_s + 0{,}2401\ HB_c + \\ + 24{,}689\ V_m)\cdot 10^{-3}\ [\text{mg/h}] \qquad (1)$$

Cămașa cilindrului

$$V_{u_c} = (10{,}5056 + 0{,}268\ HB_s - 0{,}0662\ HB_c + 3{,}9273\ V_m)\cdot 10^{-3}[\text{mg/h}] \qquad (2)$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975, P. 417–422

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA 1948

pentru durităţile medii :

— Segment $HB_{s1} = 165$ şi $HB_{s2} = 220$,

— Cămaşa $HB_{c1} = 170$ şi $HB_{c2} = 242$

şi pentru vitezele relative : $V_{m1} = 1{,}25$ [m/s] ; $V_{m2} = 2{,}00$[m/s].

Totodată, a fost obţinută durabilitatea optimă : 11940 ore (segment) şi 27860 ore (cămaşă) pentru combinaţia HB_{s2}, HB_{c1}, V_{m1} [3].

Facem următoarele precizări :

Metoda statistică utilizată are la bază determinări experimentale şi se pretează pentru un număr mic de combinaţii (8) şi, respectiv, de experimentări (24). În lucrarea [3] s-a putut demonstra că metoda celor mai mici pătrate a fost justificată şi că cei trei parametri consideraţi (HB_s, HB_c şi V_m) sînt parametrii, cu ponderea cea mai mare (99 %) prin prisma dispersiei valorilor vitezei de uzare (stabilită pe baza coeficienţilor de determinaţie multiplă).

Valorile de mai sus au fost obţinute cu probabilitatea $P = 97{,}5\,\%$.

Dacă se cunoaşte durabilitatea, se poate pune întrebarea, cum poate fi dependenţa durabilitate-fiabilitate ?

Atît durabilitatea cît şi fiabilitatea sînt funcţii statistice care pot fi considerate cu aceeaşi probabilitate. Ambele, ca funcţii de viteza de uzare, pot fi aproximate satisfăcător de către o distribuţie normală (Gaussiană) :

$$f_{(T)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(T-m)^2}{\sigma^2}}, \tag{3}$$

unde :

T este durata de viaţă ; σ — abaterea standard ;

$m_0 = \dfrac{T}{N_0}$ — durata medie de viaţă ; N_0 — numărul total de elemente considerate iniţial·

Viteza de uzare este o variabilă aleatoare atît prin prisma fenomenului de măsură a uzurii, cît şi prin prisma fenomenului propriu-zis al uzării (desprinderii particulelor de uzură). Coeficienţii din ecuaţiile vitezei de uzare (1) şi (2) sînt de asemenea aleatori, depinzînd de valorile vitezelor de uzare măsurate.

În ipoteza unanim acceptată pentru cazul distribuţiei de mai sus şi anume că în perioda respectivă nu se efectuează înlocuiri sau reparaţii, atunci, pentru aceeaşi cuplă de frecare (în cazul de faţă, cupla segment/cilindru), în perioada de durabilitate optimă, obţinută prin intermediul vitezei de uzare, *poate* exista şi siguranţă în exploatare (fiabilitate) cu aceeaşi probabilitate. Nu există siguranţă deplină în perioada de durabilitate maximă deoarece fiabilitatea nu depinde numai de uzare.

Dacă se compară curba tip de evoluţie în timp a intensităţii de defectare $\lambda(T)$, exprimată ca număr relativ de defectări pe unitatea de timp şi curba de evoluţie în timp a uzurii (fig.1) rezultă următoarele :

Deşi fiabilitatea nu este funcţie numai de uzare, sînt distincte trei zone semnificative, *în care uzarea este fenomen predominant.*

Astfel, zona I, de defectare timpurie, în care curba (a), $\lambda(T)$ scade continuu, este dependentă de calitatea rodajului și a montajului; această zonă corespunde zonei de uzare inițială (de rodaj) (b), cu mențiunea că simpla alură a acestei curbe nu poate da indicații privind calitatea rodajului.

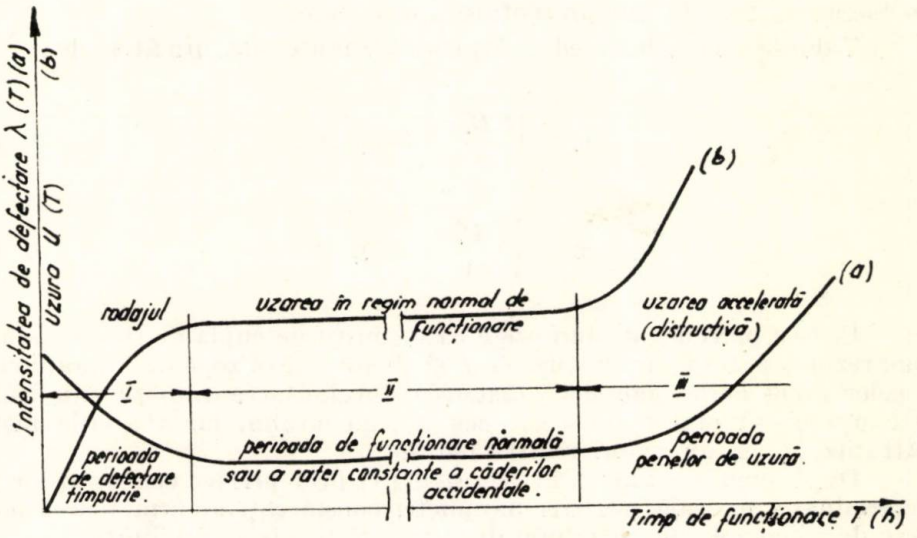


Fig. 1

Zona a II-a, a perioadei de funcționare normală (a) sau a ratei constante a căderilor accidentale [1] corespunde perioadei de „uzare normală" (b). În ambele cazuri, extinderea acestei zone este în strînsă dependență de calitatea montajului, a rodajului (zona I), precum și a materialelor, durității suprafețelor, ungerii, întreținerii etc. Este zona în care funcționarea cuplei este determinată pentru valoarea durabilității și a fiabilității.

Principial, fiabilitatea scade cu creșterea timpului de funcționare, dar ea poate fi sporită prin elemente tribologice cunoscute: calitatea materialelor și a suprafețelor, ungere cu aditivi etc. elemente care pot extinde această zonă. În același timp, uzura crește cu o rată care poate fi practic constantă; viteza de uzare poate fi redusă cu aceleași elemente de antiuzare.

În Zona a III-a, a „penelor de uzură" pentru curba (a), $\lambda(T)$ și, respectiv, a „uzării distructive" pentru curba (b), $U(T)$, ambele curbe devin repede crescătoare.

În cele de mai sus s-a presupus că prima defectare apare la timpul $T = D_0$(durabilitatea optimă, egală cu m_0). Desigur că, pentru agregatul considerat (un compresor frigorific, funcționînd cu aer), *coeficientul de disponibilitate*, care exprimă probabilitatea ca acest agregat să se afle în situația de a-și îndeplini rolul său funcțional, este mai mic ca unitatea ($K_d < 1$) deoarece, alături de timpul propriu-zis de funcționare D_0, trebuie acceptat și timpul T_m necesar unor *operații de mentenanță*, pentru

atingerea perioadelor optime menționate : 11940 ore (segment) și 27860 ore (cămașă). Ne referim la schimbarea uleiului, schimbarea segmenților, opriri-porniri etc.

Pentru calculul funcției (3), σ (abaterea standard) se obține prin calcularea în prealabil a vitezelor de uzare cu ecuațiile (1) și (2) și compararea cu datele experimentale care au dus la scrierea acestor ecuații. În lucrările [2], [3] sînt prezentate aceste date.

Valorile abaterilor medii pătratice obținute sînt următoarele :

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{D_s^2}{4}} = 309, \ [\text{h}], \tag{4}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{D_c^2}{4}} = 660, \ [\text{h}]. \tag{5}$$

Pentru perechea de suprafețe care constituie cupla de frecare, după cum rezultă și din figura 2 (curbele *1* și *2*) nu există zonă de suprapunere a celor două curbe gaussiene deoarece durabilitatea cămășii cilindrului este apreciabil mai mare decît cea a segmentului, iar abaterile medii pătratice σ_s, σ_c au valori relativ reduse.

După cum s-a arătat în lucrarea [3] prin prisma coeficienților de determinație parțială, cei trei parametri considerați au următoarea ponderе de influență asupra vitezei de uzare, respectiv durabilității :

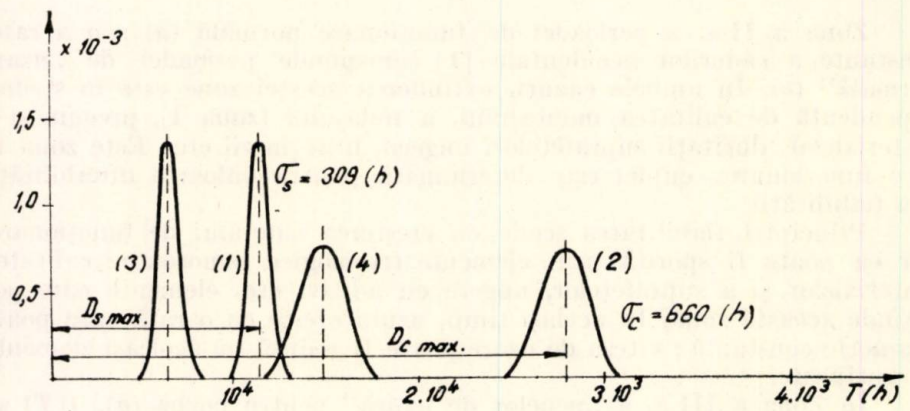


Fig. 2

Segment : 55 %(V_m) ; 32 %(HB_c) ; 12 %(HB_s),

Cămașă : 40 %(HB_c) ; 33,2 %(HB_s) ; 25 %(V_m),

iar combinația : HB_{s_1}, HB_{c_2}, V_{m_2} a condus la durabilitatea minimă : 6230 ore (segment) și 14810 ore (cămașă).

Pe figura 2, curbele de distribuție *3* și *4* se vor deplasa spre stînga fără a avea de asemenea zone de suprapunere.

Menţinerea unui parametru constant, de exemplu viteza (V_{m_1}) şi modificarea durităţilor cămăşii şi segmentului, în limitele amintite, va conduce atît la deplasarea curbelor, cît şi la modificarea formei (amplitudinei) prin schimbarea abaterilor medii pătratice.

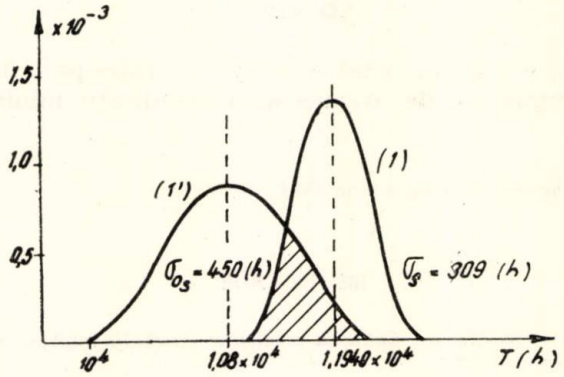


Fig. 3

Spre deosebire de compresorul considerat, o serie de compresoare prezintă însă propria ei fluctuaţie statistică datorită: abaterilor de la dimensiunile proiectate ale cuplei segment-cilindru (la care ne referim în principal), abaterilor de la durităţile prescrise (cu influenţă mare după cum s-a văzut), abaterilor de montaj etc. Aceste abateri conduc pentru fiecare suprafaţă (segment şi, respectiv, cilindru) la alte două distribuţii gaussiene, curbe reale ale durabilităţii medii a cuplei segment şi cilindru, deplasate faţă de cele calculate datorită valorilor diferite m_0 (D_0 şi D_0').

În figura 3 s-a considerat numai cazul curbelor de durabilitate mai mică a segmentului (1 — primul caz şi *1'* din lotul de 10 compresoare segmenţii prezintă o fiabilitate mai mică decît a cămăşilor cilindrilor):

$$D_s = 11{,}940 \text{ [h] cu } \sigma_s = 309\text{[h]} \text{ şi } D_s' = 10800 \text{ [h] cu } \sigma_{0_s} = 450 \text{ [h]}$$

Desigur, cazul ideal este cel în care curbele reale se plasează în dreapta curbelor calculate sau cînd ele se suprapun complet. În cazul normal, zona haşurată (de suprapunere parţială a curbelor) va da indicaţii asupra cazurilor în care sînt respectate prevederile din proiectare.

Pentru a determina fiabilitatea trebuie avute în vedere condiţiile tehnologice ale uzinei producătoare.

În cazul considerat, probabilitatea diferenţei

$$\sigma_{dif} = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_{0s}^2} = 545\text{[h]} \tag{6}$$

poate fi estimată prin evaluarea suprafeţei comune, diferenţa medie fiind

$$\text{Dif} = 11940 - 10800 = 1140 \text{ [h]}. \tag{7}$$

Atunci

$$z = \frac{0 - 1140}{545} = -2{,}1.$$

Din tabelele A.1 anexă lucrării [1] rezultă că suprafaţa mai mare ca 0 este 0,98214, astfel încît fiabilitatea este de 98,21%.

CONCLUZII

Stabilirea pe cale statistică a vitezei de uzare permite determinarea durabilităţii optime, şi, de asemenea, a fiabilităţii minime a cuplei de frecare.

Primită la redacţie la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. JURAN, F. M. GRYNA Jr., *Calitatea produselor* (trad. lb. engleză, SUA), Edit. tehnică, Bucureşti, 1973.
2. D. PAVELESCU, *Determination of the equation of the rate of wear and of the life of a ring-cylinder friction pair*, Méc. Appliquée, **17**, *6*, 1363—1376 (1972).
3. D. PAVELESCU, M. MUŞAT, *On the determination of the order and magnitude of parameters in the friction-wear process of a piston-cylinder pair*, Mec. Appliquée, **19**, *1*, 137—147 (1974).
4. M. RENERT, *Fiabilitatea utilajului chimic*, note de curs, Edit. Inst. politehnic Bucureşti, 1974.
5. I. MARINESCU şi colab., *Elemente de statistică matematică şi aplicaţiile ei*, Edit. ştiinţifică, Bucureşti, 1966, p. 215.

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

REPREZENTAREA PLANĂ A MECANISMELOR TRIDIMENSIONALE

de CHR. PELECUDI
Institutul politehnic Bucureşti

Se dezvoltă o metodă directă şi eficace pentru determinarea sau verificarea poziţiilor într-un mecanism spaţial. Conturul poligonal al mecanismului este desfăşurat în plan şi aceasta are avantajul că permite stabilirea mărimilor componentelor versorilor axelor şi vectorilor de poziţie pe axele triedrului de bază. Se arată condiţiile de satisfacere a ecuaţiilor de poziţii. Pentru setul ecuaţiilor de rotaţii se execută construcţii grafice uşor de utilizat.

Calculul numeric al poziţiilor şi deplasărilor punctelor şi corpurilor dintr-un mecanism tridimensional este foarte dificil deoarece trebuie rezolvate mai multe ecuaţii algebrice neliniare. Diversele metode de rezolvare, prin reducere, prin iteraţie, prin liniarizare etc. cer, pe lîngă un volum mare de calcule şi localizarea rădăcinilor, eliminarea rădăcinilor fictive introduse prin prelucrarea ecuaţiilor, stabilirea convergenţelor etc. De aceea, o reprezentare plană a lanţurilor spaţiale de corpuri legate prin cuple generale cilindrice este necesară atît pentru verificări simple, cît şi pentru determinările aproximative ale poziţiilor, care apoi pot fi îmbunătăţite pe cale analitică.

Întrebuinţînd schematizarea lanţurilor cinematice sub forma unor poligoane spaţiale cu laturi perpendiculare între ele, vor trebui reprezentate în planurile de proiecţie, orizontal şi vertical, punctele şi dreptele contururilor respective. Fie în acest sens schema mecanismului spaţial 5 C (fig. 1) care poate fi secţionat în două lanţuri deschise conform parcurgerii sale directe şi inverse şi care pot fi reprezentate separat în plan (fig. 2 ; 3).

Pentru lanţul din dreapta (fig. 2) se întrebuinţează planul orizontal H_0 perpendicular pe $a \times a$ $\bar{e}_0$ şi care conţine latura $a_0 = A_0^* A_0$, iar planul vertical V_1 este perpendicular pe normala $\bar{n}_0$ şi conţine latura $s_1 = A_1' \mathcal{A}_1'$. Versorii $\bar{e}_0$ şi $\bar{e}_1$ sînt paraleli cu planul vertical V_1, astfel încît prin proiecţiile lor e_0' şi e_1' pe acest plan, apar în adevărată mărime şi formează între ele unghiul α_0 (în sensul $\bar{n}_0$), sau între $-e_0'$ şi e_1' unghiul $\pi - \alpha_0$. Linia de pămînt H_0V_1 este perpendiculară pe planul $\bar{n}_0\bar{e}_0$. Conturul poligonal spaţial (fig. 1) apare în proiecţia orizontală prin $A_0\ \mathcal{A}_0\ B_0\mathcal{B}_0\ C_0\mathcal{C}_0$, iar

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975, P. 423–439

în proiecția verticală prin $A_1'\mathcal{A}_1'\ B_1'\ \mathcal{B}_1'\ C_1'\ \mathcal{C}_1'$ (fig. 2). Numai laturile a_0 și s_1, situate în planul orizontal și respectiv în planul vertical, apar în adevărată mărime, celelalte laturi ale conturului spațial prezentînd proiecții deformate. Urmînd ca latura $a_1 = \mathcal{A}_1 B_1$ să apară în proiecție în adevărată mărime se schimbă planul orizontal din H_0 în H_1 astfel ca această dreaptă să devină paralelă cu noul plan. Totodată noua linie de pămînt V_1H_1 este perpendiculară pe planul $\bar{n}_0\bar{e}_1$. În planul orizontal H_1 apar prin proiecții în adevărată mărime versorii n_0 și n_1 între care se găsește unghiul θ_1 (în sensul $\bar{e}_1$) sau între $-n_0$ și n_1 unghiul $\pi - \theta_1$. Ordonatele (depărtările) punctelor în noul plan orizontal H_1 sînt aceleași cu cele din vechiul plan orizontal H_0. Dar cotele acelorași puncte în planul vertical V_1 sînt diferite la schimbarea planurilor orizontale, Noua reprezentare a lanțului cinematic este redată prin $\mathcal{A}_1'\ B_1'\ \mathcal{B}_1'\ C_1'\mathcal{C}_1'$ în planul V_1 și prin $\mathcal{A}_1\ B_1\ \mathcal{B}_1\ C_1\ \mathcal{C}_1$ în planul H_1. Se poate continua prin schimbarea planului vertical din V_1 în V_2 pentru ca latura $s_2 = B_2'\mathcal{B}_2'$ să devină paralelă cu noul plan și astfel proiecția sa să o redea în adevărată mărime. De data aceasta se păstrează aceleași cote în cele două planuri verticale V_1 și V_2 și se schimbă ordonatele din planul orizontal H_1. Linia de pămînt H_1V_2 este perpendiculară pe planul $\bar{e}_1\bar{n}_1$. În noul plan vertical V_2, apar prin proiecțiile e_1' și e_2' de adevărată mărime versorii $\bar{e}_1'$ și $\bar{e}_2'$ între care se găsește unghiul α_1 sau între $-e_1'$ și e_2' unghiul $\pi - \alpha_1$. Pentru noua reprezentare a lanțului cinematic avem conturul $B_1\ \mathcal{B}_1\ C_1\mathcal{C}_1$ în planul H_1 și

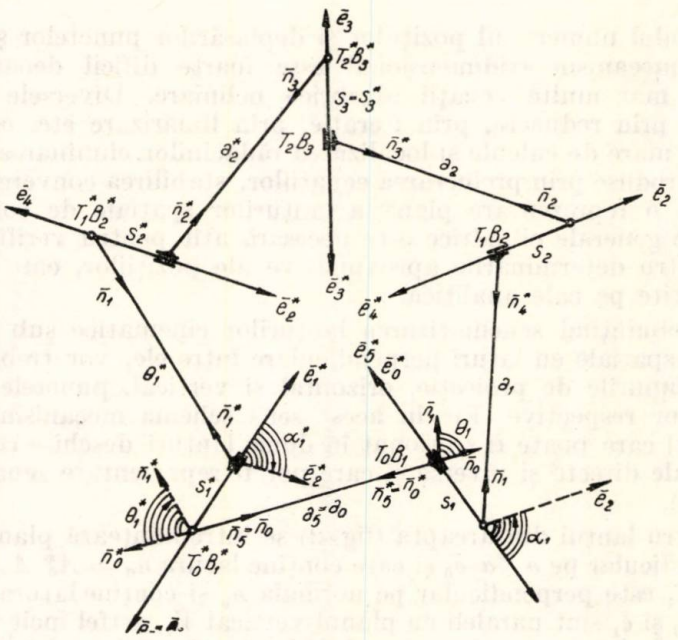


Fig. 1

$B_2'\ \mathcal{B}_2'\ C_2'\ \mathcal{C}_2'$ în planul V_2. În același fel se poate continua pentru oricîte laturi ale conturului poligonal. Se poate accepta că poligonul lanțului spațial este înscris pe niște planuri înclinate în spațiu $V_1 \perp \bar{n}_0$, $H_1 \perp \bar{e}_1$,

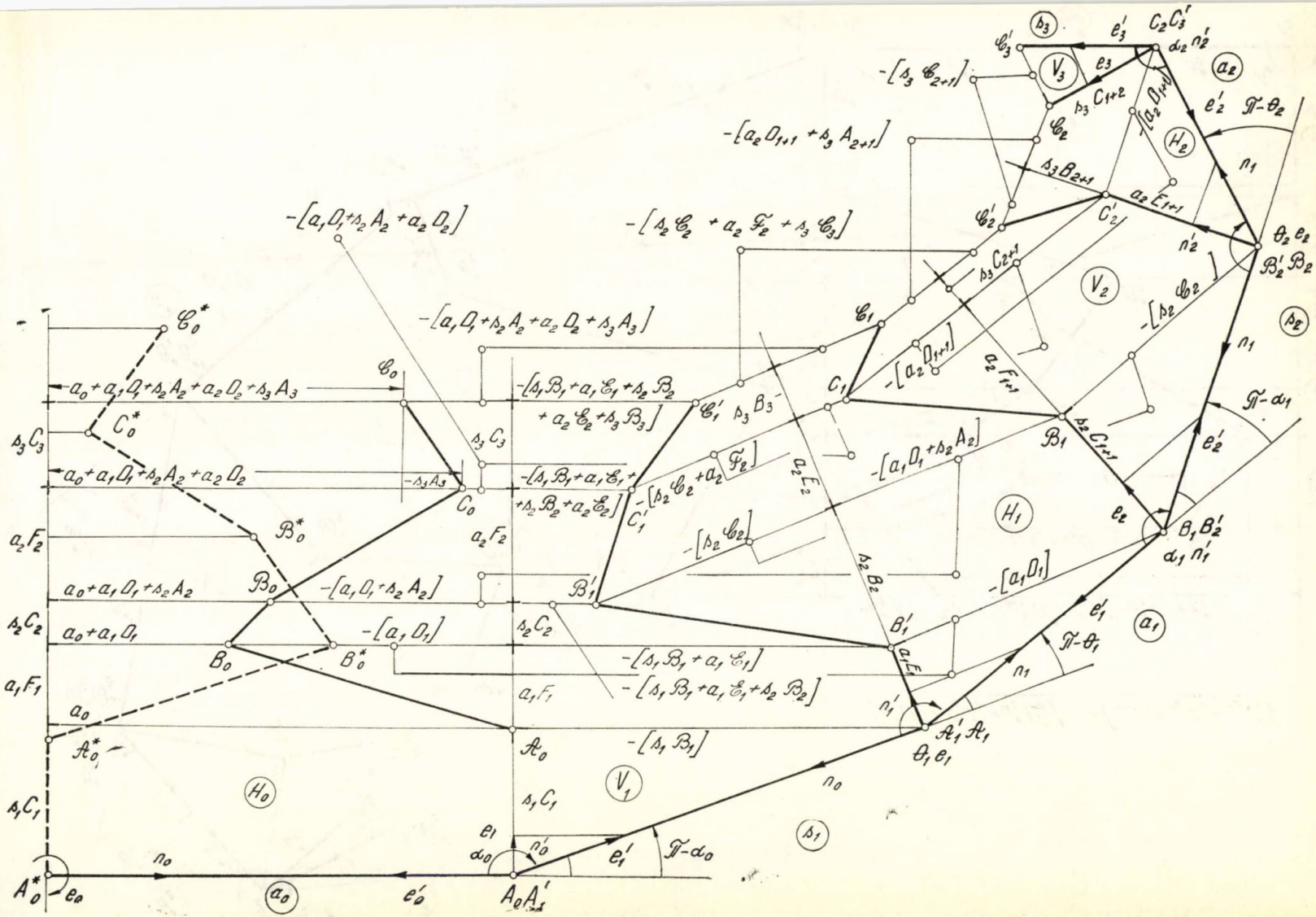
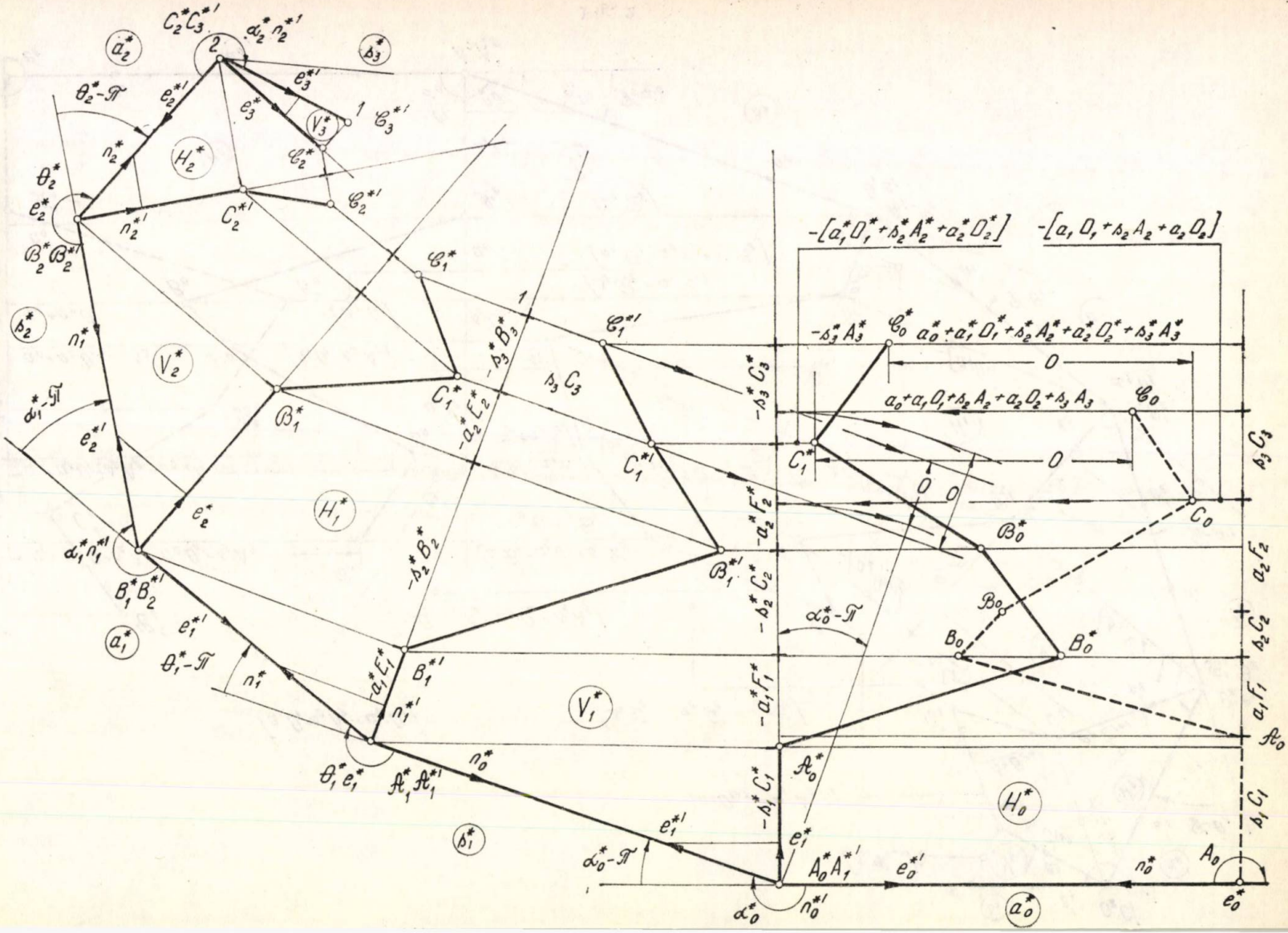


Fig. 2



$C_2^*C_3^{*\prime}$
$\alpha_2^* n_2^{*\prime}$
a_2^*
s_3^*
$\theta_2^*-\pi$
$e_2^{*\prime}$
$e_3^{*\prime}$
e_3^*
V_3^*
$\mathcal{C}_3^{*\prime}$
n_2^*
H_2^*
$\mathcal{C}_2^*$
θ_2^*
e_2^*
$n_2^{*\prime}$
$C_2^{*\prime}$
$\mathcal{C}_2^{*\prime}$
$\mathcal{B}_2^*\mathcal{B}_2^{*\prime}$
$\mathcal{C}_1^*$
s_2^*
n_1^*
V_2^*
$-s_3^*B_3^*$
s_3C_3
$\mathcal{C}_1^{*\prime}$
$\alpha_1^*-\pi$
$\mathcal{B}_1^*$
C_1^*
$-a_2^*E_2^*$
$e_2^{*\prime}$
$C_1^{*\prime}$
H_1^*
e_2^*
$\alpha_1^*n_1^{*\prime}$
$-s_2^*B_2^*$
$\mathcal{B}_1^{*\prime}$
$B_1^*B_2^{*\prime}$
a_1^*
$e_1^{*\prime}$
$\theta_1^*-\pi$
n_1^*
$-a_1^*E_1^*$
$B_1^{*\prime}$
$n_1^{*\prime}$
V_1^*
$\theta_1^*e_1^*$
$\mathcal{A}_1^*\mathcal{A}_1^{*\prime}$
n_0^*
s_1^*
$e_1^{*\prime}$
$\alpha_0^*-\pi$
α_0^*
$n_0^{*\prime}$
$-[a_1^*D_1^*+s_2^*A_2^*+a_2^*D_2^*]$
$-[a_1D_1+s_2A_2+a_2D_2]$
$-s_3^*A_3^*$
$\mathcal{C}_0^*$
$a_0^*+a_1^*D_1^*+s_2^*A_2^*+a_2^*D_2^*+s_3^*A_3^*$
0
$a_0+a_1D_1+s_2A_2+a_2D_2+s_3A_3$
$\mathcal{C}_0$
$-s_3^*C_3^*$
C_1^*
0
0
0
$-a_2^*F_2^*$
C_0
$\mathcal{B}_0^*$
$-s_2^*C_2^*$
$\alpha_0^*-\pi$
$\mathcal{B}_0$
B_0
B_0^*
$-a_1^*F_1^*$
$\mathcal{A}_0$
$\mathcal{A}_0^*$
$-s_1^*C_1^*$
H_0^*
e_1^*
$A_0^*A_1^{*\prime}$
$e_0^{*\prime}$
n_0^*
A_0
e_0^*
a_0^*
s_3C_3
a_2F_2
s_2C_2
a_1F_1
s_1C_1

$V_2 \perp \bar{n}_1$, $H_2 \perp \bar{e}_2$, $V_3 \perp \bar{n}_2$ etc., care, prin rabatere față de linia de intersecție (pămînt) dintre două planuri consecutive, redau reprezentarea plană.

Un mare avantaj al acestei reprezentări este faptul că segmentele absciselor, ordonatelor sau cotelor diverselor puncte sînt legate de valorile componentelor $A_iB_iC_i$ $\mathcal{B}_i$ $\mathcal{C}_i$ D_i E_i F_i $\mathcal{E}_i$ $\mathcal{F}_i$ [1] ale versorilor $\bar{e}_i$ și $\bar{n}_i$. Astfel, în reprezentarea H_2V_3 punctul $\mathcal{C}$ are cotă $-s_3\bar{\bar{\alpha}}_2 = -s_3\mathcal{C}_{2+1}$, ordonata 0 și abscisa $s_3\bar{\alpha}_2 = s_3 C_{1+2}$, iar punctul C are cota, ordonata și abscisa nule. În reprezentarea H_2V_2 punctul $\mathcal{C}$ are aceeași cotă $-s_3\mathcal{C}_{2+1}$, ordonata $-[a_2\bar{\theta}_2 + s_3\bar{\alpha}_2\bar{\bar{\theta}}_2] = -[a_2 D_{1+1} + s_3 A_{2+1}]$ și abscisa $a_2\theta_2 - s_3\bar{\alpha}_2\bar{\bar{\theta}}_2 = [a_2E_{1+1} + s_3B_{2+1}]$, iar punctul C are cota nulă, ordonata $-a_2\bar{\bar{\theta}}_2 = -[a_2 D_{1+1}]$ și abscisa $a_2\bar{\theta}_2 = a_2 E_{1+1}$. Prin notația X_{i+j} se înțelege faptul că în expresia componentei X_i indicii elementelor cresc cu j unități.

Pentru lanțul stîng, invers (fig. 3), reprezentarea plană se face în același fel. La aceasta se întrebuințează planul orizontal H_0^*, perpendicular pe axa $\bar{e}_0^*$ care conține latura $a_0^* = A_0A_0^*$. Cele două planuri H_0 și H_0^* se intersectează de pe muchia $a_0 = a_0^*$ și formează între ele unghiul $\alpha_0 = \alpha_0^*$. Planul vertical V_1^* este perpendicular pe direcția $\bar{n}_0^*$ și conține latura $s_1^* = A_1^{*\prime}\mathcal{A}_1^{*\prime}$. Se continuă deci cu planurile $V_1^* \perp \bar{n}_0^*$, $H_1^* \perp \bar{e}_1^*$, $V_2^* \perp \bar{n}_1^*$, $H_2^* \perp \bar{e}_2^*$ etc. În reprezentarea executată, unghiurile de încrucișare ca și unghiurile de rotație apar mai mari de 180°, astfel că absciselе diferitelor puncte pe diverse linii de pămînt sînt negative. Spre exemplu, în reprezentarea $H_2^*\ V_3^*$ punctul $\mathcal{C}^*$ are cota $-s_3^*\bar{\bar{\alpha}}_2^* = -s_3^*\mathcal{C}_{2+1}^*$, ordonata 0, dar abscisa $-s_3^*\bar{\alpha}_2^* = -s_3^*C_{1+2}^*$. Același punct $\mathcal{C}^*$, în reprezentarea $H_2^*V_2^*$ are aceeași cotă $-s_3^*\mathcal{C}_{2+1}^*$ ordonata $-[a_2^*\ \bar{\theta}_2^* + s_3^*\ \bar{\alpha}_2^*\ \bar{\bar{\theta}}_2^*] = -[a_2^*D_{1+1}^* + s_3^*A_{1+1}^*]$, iar abscisa $-a_2^*\bar{\bar{\theta}}_2^* + s_3^*\bar{\alpha}_2^*\bar{\bar{\theta}}_2^* = -[a_2^*\ E_{1+1}^* + s_3^*B_{2+1}^*]$. Punctul C^*, în aceeași reprezentare $H_2^*V_2^*$ are cota nulă, ordonata $-a_2^*\ \theta_2^* = -[a_2^*D_{2+1}^*]$ și abscisa $-a_2^*\bar{\bar{\theta}}_2^* = -a_2^*E_{1+1}^*$.

Din aproape în aproape se ajunge la valorile coordonatelor punctelor C și $\mathcal{C}$ în reprezentările $H_0V_1H_1$ și ale punctelor $\bar{\mathcal{C}}^*$ și C în reprezentările $H_0^*\ V_1^*\ H_1^*$ cu ajutorul cărora se stabilesc condițiile grafice corespunzătoare ecuațiilor de poziții în mecanismele tridimensionale. La mecanismul 5 C aceste ecuații [1], [5] sînt:

$$\begin{aligned} A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) &= A_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*), \\ B_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) &= C_3^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*), \\ C_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) &= B_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*); \end{aligned} \tag{1}$$

$$a_0 + a_1D_1 + s_2A_2 + a_2D_2 + s_3\ A_3 + a_2^*D_2^* + s_2^*A_2^* + a_1^*D_1^* = 0,$$

$$a_1E_1 + s_2B_2 + a_2E_2 + s_3B_3 + a_2^*F_2^* + D_2^*C_2^* + a_1^*F_1^* + s_1^*C_1^* = 0,$$

$$s_1C_1 + a_1F_1 + s_2C_2 + a_2F_2 + s_3C_3 + a_2^*E_2^* + s_2^*B_2^* + a_1^*E_1^* + 0. \tag{2}$$

Avînd în vedere ordonatele din planurile H_0 și H_0^* dreptele $C_0\ \mathcal{C}_0^*$ și $C_0^*\mathcal{C}_0$ trebuie să fie paralele cu liniile de pămînt. În acest caz prima

ecuație din setul de rotații și prima ecuație din setul de translații sînt verificate. Deci depărtările între punctele C_0^* și $\mathscr{C}_0$ sau între $\mathscr{C}_0^*$ și C_0 trebuie să fie nule (fig. 4;5), adică

$$\Delta C_0^* \mathscr{C}_0 \parallel \Delta C_0 \mathscr{C}_0^* \parallel H_0 V_1 \parallel H_0^* V_1^*. \tag{3}$$

Pentru a satisface a doua ecuație din setul de rotații ca și a doua ecuație din setul de translații se ține seama de abscisele de pe liniile de pămînt H_1V_1 și $H_0^*V_1^*$ (fig. 4). În acest sens pe o dreaptă paralelă cu linia H_1V_1 adică rotită cu $\pi - \alpha_0$ față de linia H_0V_1, se înscriu abscisele punctelor C_0^* și $\mathscr{C}_0^*$ de pe linia $H_0^*V_1^*$ și abscisele punctelor C_1 și $\mathscr{C}_1$ de pe linia H_1V_1. Dacă aceste abscise sînt egale, ceea ce impune ca pe dreapta auxiliară Δ punctele C_1 și $\mathscr{C}_0^*$ sau C_0^* și $\mathscr{C}_1$ să corespundă, ecuațiile de mai sus sînt satisfăcute, adică

$$\Delta C_1 = \Delta \mathscr{C}_0^*; \quad \Delta C_0^* = \Delta \mathscr{C}_1. \tag{4}$$

De asemenea, ultimele ecuații, atît din setul de rotații, cît și din setul de translații, sînt verificate în baza unor construcții grafice asemănătoare, care au în vedere abscisele de pe liniile de pămînt $H_1^*V_1^*$ și H_0V_1 (fig. 3 ; 5). Pentru aceasta se întrebuințează dreapta auxiliară Δ^* paralelă cu linia de pămînt $H_1^*V_1^*$, astfel că face cu linia $H_0^*V_1^*$ unghiul $\alpha_0^* - \pi$ (fig. 5). Cu ajutorul unor arcuri de cerc aducem segmentele absciselor punctelor C_0 și $\mathscr{C}_0$ de pe linia H_0V_1 pe dreapta Δ^*, iar prin proiecție ortogonală înscrie pe aceeași dreaptă Δ^* segmentele absciselor punctelor C_1^* și $\mathscr{C}_1^*$ de pe linia $H_1^*V_1^*$. Pe dreapta auxiliară Δ^* punctele C_0 și $\mathscr{C}_1^*$ sau C_1^* și $\mathscr{C}_0$ trebuie să coincidă, adică

$$\Delta^* C_0 = \Delta^* \mathscr{C}_1^*, \quad \Delta^* C_1^* = \Delta^* \mathscr{C}_0. \tag{5}$$

Verificări suplimentare se pot face cu ajutorul ecuațiilor reciproce de poziții [5], adică :

$$A_3(\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = A_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*),$$

$$\mathscr{B}_3(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\theta_1\theta_2) = \mathscr{C}_3^*(\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_2^*), \tag{6}$$

$$\mathscr{C}_3(\alpha_1\alpha_2\theta_2) = \mathscr{B}_3^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_1^*\theta_2^*);$$

$$a_0 + a_1D_1 + s_2A_2 + a_2D_2 + s_3A_3 + a_2^*D_2^* + s_2^*A_2^* + a_1^*D_1^* = 0,$$

$$s_1\mathscr{B}_1 + a_1\mathscr{E}_1 + s_2\mathscr{B}_2 + a_2\mathscr{E}_2 + s_3\mathscr{B}_3 + a_2^*\mathscr{F}_2^* + s_2^*\mathscr{C}_2^* + a_1^*\mathscr{F}_1^* + s_1^*\mathscr{C}_1^* = 0, \tag{7}$$

$$s_1\mathscr{C}_1 + a_1\mathscr{F}_1 + s_2\mathscr{C}_2 + a_2\mathscr{F}_2 + s_3\mathscr{C}_3 + a_2^*\mathscr{E}_2^* + s_2^*\mathscr{B}_2^* + a_1^*\mathscr{E}_1^* + s_1^*\mathscr{B}_1^* = 0$$

și care diferă de cele anterioare (1,2) numai prin ultimele două ecuații atît din setul de rotație, cît și din setul de translație. Se întrebuințează în acest sens segmentele P și $\mathscr{P}$ (fig. 4), care reprezintă cotele punctelor

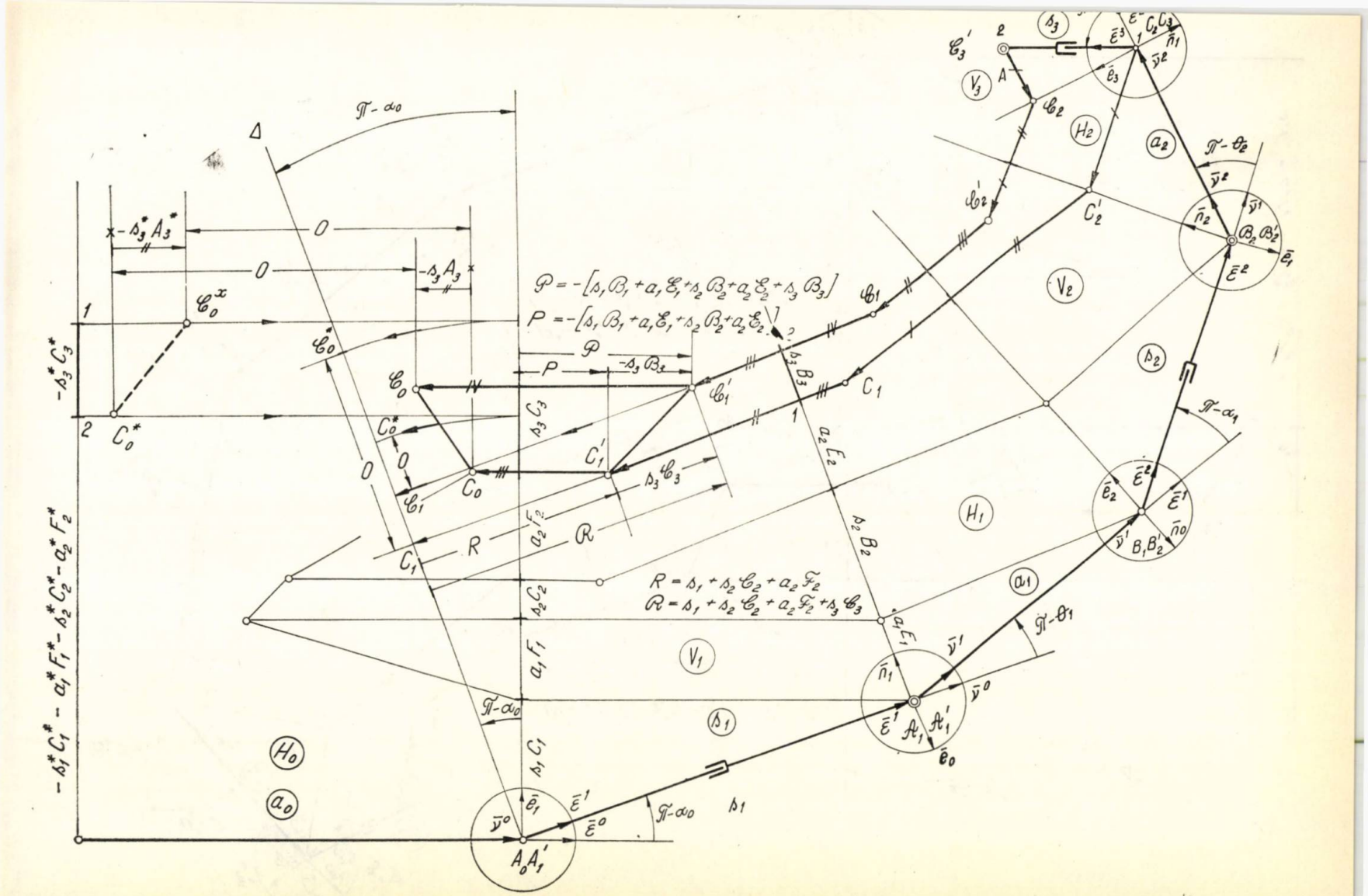
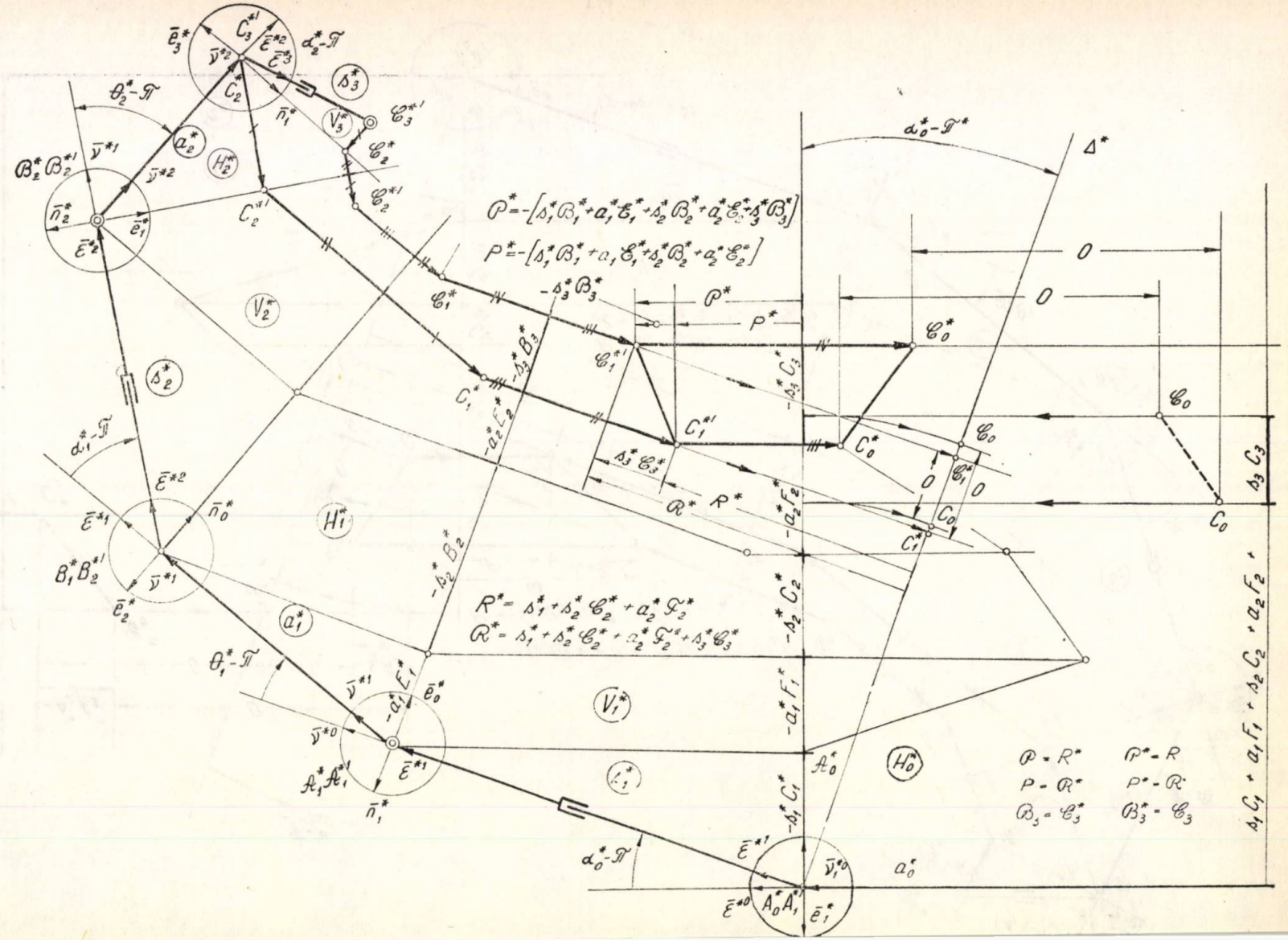

$\pi - \alpha_0$
Δ
$-s_3^* A_3^*$
$-s_3 A_3$
$P = -[s_1 B_1 + a_1 E_1 + s_2 B_2 + a_2 E_2 + s_3 B_3]$
$P = -[s_1 B_1 + a_1 E_1 + s_2 B_2 + a_2 E_2]$
$R = s_1 + s_2 G_2 + a_2 F_2$
$R = s_1 + s_2 G_2 + a_2 F_2 + s_3 G_3$
$-s_3^* C_3^*$
$-s_1^* C_1^* - a_1^* F_1^* - s_2^* C_2^* - a_2^* F_2^*$
H_0
a_0
V_1
s_1
a_1
H_1
V_2
s_2
a_2
H_2
V_3
s_3
$\pi - \alpha_1$
$\pi - \beta_1$
$\pi - \beta_2$

Fig. 4



$\mathcal{P}^* = -[s_1^*\mathcal{B}_1^* + a_1^*\mathcal{E}_1^* + s_2^*\mathcal{B}_2^* + a_2^*\mathcal{E}_2^* + s_3^*\mathcal{B}_3^*]$
$P^* = -[s_1^*\mathcal{B}_1^* + a_1\mathcal{E}_1^* + s_2^*\mathcal{B}_2^* + a_2^*\mathcal{E}_2^*]$
$R^* = s_1^* + s_2^*\mathcal{C}_2^* + a_2^*\mathcal{F}_2^*$
$\mathcal{R}^* = s_1^* + s_2^*\mathcal{C}_2^* + a_2^*\mathcal{F}_2^* + s_3^*\mathcal{C}_3^*$
$\mathcal{P} = R^*$ $\mathcal{P}^* = R$
$P = \mathcal{R}^*$ $P^* = \mathcal{R}$
$\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_3^*$ $\mathcal{B}_3^* = \mathcal{C}_3$
$s_1C_1 + a_1F_1 + s_2C_2 + a_2F_2 +$
s_3C_3
Δ^*
$\alpha_0^* - \pi^*$
$\theta_2^* - \pi$
$\alpha_1^* - \pi$
$\theta_1^* - \pi$
$\alpha_0^* - \pi$
$\mathcal{B}_2^*\mathcal{B}_2^{*1}$
$B_1^*B_2^{*1}$
$A_1^*A_1^{*1}$
$A_0^*A_1^{*1}$
a_2^*
a_1^*
a_0^*
s_2^*
s_3^*
H_2^*
H_1^*
H_0^*
V_2^*
V_1^*
V_3^*
$\mathcal{A}_1^*$
$\mathcal{A}_0^*$
$\mathcal{C}_1^*$
$\mathcal{C}_1^{*1}$
$\mathcal{C}_2^*$
$\mathcal{C}_2^{*1}$
$\mathcal{C}_3^{*1}$
$\mathcal{C}_0^*$
$\mathcal{C}_0$
C_1^*
C_1^{*1}
C_2^*
C_2^{*1}
C_3^{*1}
C_0^*
C_0
C_1^*
$\mathcal{P}^*$
P^*
$\mathcal{R}^*$
R^*
0
0
0
0
$-s_3^*B_3^*$
$-s_3^*C_3^*$
$-a_2^*E_2^*$
$-a_2^*F_2^*$
$-s_2^*B_2^*$
$-s_2^*C_2^*$
$-a_1^*E_1^*$
$-a_1^*F_1^*$
$-s_1^*C_1^*$
$s_3^*\mathcal{C}_3^*$

C_1' și $\mathcal{C}_1'$ din planul V_1 față de linia de pământ H_0V_1, precum și cotele R și $\mathcal{R}$ ale acelorași puncte față de dreapta auxiliară Δ și care sînt totodată complementare celor față de linia H_1V_1. În același fel avem segmentele P^* și $\mathcal{P}^*$ (fig. 5), care reprezintă cotele punctelor $C_1^{*\prime}$ și $\mathcal{C}_1^{*\prime}$ din planul V_1^* față de linia de pământ $H_0^*V_1^*$. Totodată, prin R^* și $\mathcal{R}^*$ se notează cotele acelorași puncte $C_1^{*\prime}$ și $\mathcal{C}_1^{*\prime}$ față de dreapta auxiliară Δ^*, complementare celor față de linia $H_1^*V_1^*$.

La ecuațiile centrale din seturile de translații și rotații corespund egalitățile segmentelor:

$$\mathcal{P}\mathcal{C}_1' = R^*C_1^{*\prime}; \quad PC_1' = \mathcal{R}^*\mathcal{C}_1^{*\prime}. \tag{8}$$

De asemenea, egalitățile segmentelor

$$\mathcal{P}^*\mathcal{C}_1^{*\prime} = RC_1' \text{ și } P^*C_1^{*\prime} = \mathcal{R}\mathcal{C}_1' \tag{9}$$

corespund ultimilor ecuații din seturile de rotație și de translație.

Reprezentarea plană a mecanismelor spațiale sugerează construcții grafice directe ale funcțiunilor A, B, C, D, E, F, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Segmentele grafice reprezentative ale acestor funcțiuni sînt utile la verificarea ecuațiilor de rotații, deoarece sînt dependente numai de unghiurile α și θ și sînt independente de lungimile a și s.

Pentru construcția poligonului funcțional se păstrează unghiurile dintre liniile de pământ, dar se trasează toate concurente într-un punct 0 (fig. 6—11). Deci se construiesc niște raze polare care formează între ele unghiurile consecutive $\pi - \alpha_0$, $\pi - \theta_1$, $\pi - \alpha_1$, $\pi - \theta_2$ etc. Pentru funcțiunile A_i B_i C_i $\mathcal{B}_i$ $\mathcal{C}_i$ ultima rază polară formează cu precedenta unghiul $\frac{\pi}{2} - \alpha_{i-1}$ (fig. 6, 7, 8), iar pentru funcțiunile D_i E_i F_i $\mathcal{E}_i$ $\mathcal{F}_i$ aceleași raze formează unghiul $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ (fig. 9, 10, 11).

Din punctul X_3 poziționat pe ultima rază polară prin distanța egală cu unitatea față de originea 0 se duce perpendiculara pe raza polară precedentă, marcîndu-se pe aceasta punctele confundate $Y_3 \equiv Z_{33}$ (fig. 6). În triunghiul dreptunghic format se observă

$$X_3Z_{33} = \mathcal{B}_{1+3} = \mathcal{C}_{2+2}, \; OZ_{33} = C_{1+3}. \tag{10}$$

Din punctul Y_3 se duce perpendiculara pe raza polară Z_{23} și se prelungește cu segmentul $\mathcal{C}_{2+2}$ pînă în X_2. Deci

$$Y_3Z_{23} = A_{2+2}; \; OZ_{23} = B_{2+2}; \; Z_{23}X_2 = \mathcal{C}_{2+2}. \tag{11}$$

În continuare, din X_2 se duce perpendiculara pe raza polară Z_{22} prelungindu-se cu segmentul A_{2+2} pînă în Y_2 și așa mai departe:

$$\begin{aligned}
&X_2Z_{22} = \mathcal{B}_{2+2} = \mathcal{C}_{3+1}; \; OZ_{22} = C_{2+2}; \; Z_{22}Y_2 = A_{2+2},\\
&Y_2Z_{12} = A_{3+1}; \; OZ_{12} = B_{3+1}; \; Z_{12}X_1 = \mathcal{C}_{3+1},\\
&X_1Z_{11} = \mathcal{B}_{3+1} = \mathcal{C}_4; \; OZ_{11} = C_{3+1}; \; Z_{11}Y_1 = A_{3+1},\\
&Y_1Z_{01} = A_4; \; OZ_{01} = B_4; \; Z_{01}X_0 = \mathcal{C}_4,\\
&X_0Z_{00} = \mathcal{B}_4; \; OZ_{00} = C_4;
\end{aligned} \tag{12}$$

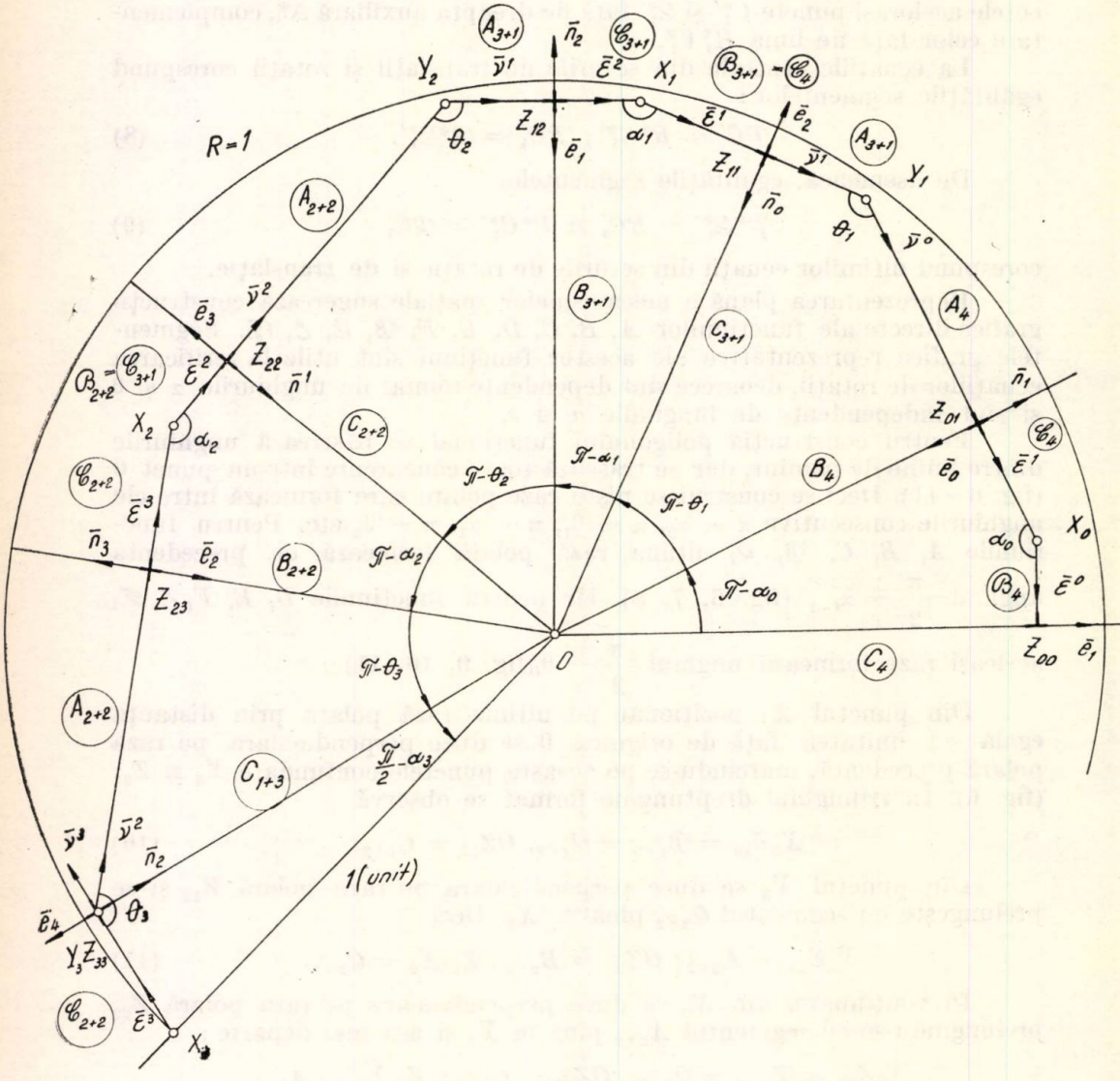


Fig. 6

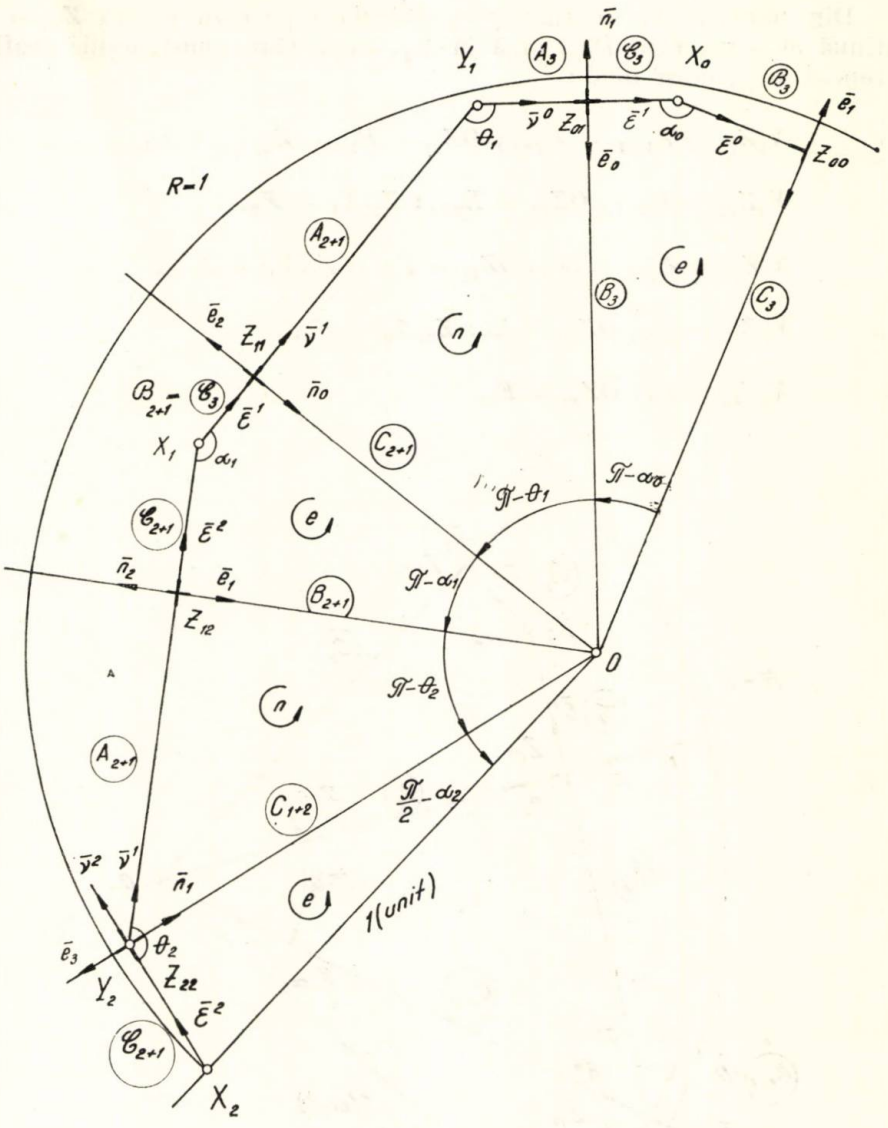


Fig. 7

Determinările funcţiunilor inferioare A_3 B_3 C_3 $\mathcal{B}_3$ $\mathcal{C}_3$ (fig. 7) şi A_2 B_2 C_2 $\mathcal{B}_2$ $\mathcal{C}_2$ (fig. 8) se face prin construcţii grafice reduse faţă de cele anterioare.

În cealaltă situaţie se porneşte de la punctul Y_3 situat pe ultima rază polară la depărtarea egală cu unitatea faţă de originea 0 şi se duce perpendiculara pe raza polară anterioară (fig. 9). Însemnînd pe aceasta punctele comune $X_2 \equiv Z_{23}$, avem

$$Y_3Z_{23} = D_{1+2},\ OZ_{23} = E_{1+2}. \tag{13}$$

Din punctul X_2 se duce perpendiculara pe raza polară Z_{22} și se continuă cu segmentul D_{1+2} pînă în Y_2; după care construcțiile grafice se repetă în același mod:

$$X_2Z_{22} = \mathscr{E}_{1+2} = \mathscr{F}_{2+1};\ OZ_{22} = F_{1+2};\ Z_{22}Y_2 = D_{1+2},$$

$$Y_2Z_{12} = D_{2+1};\ OZ_{12} = E_{2+1};\ Z_{12}X_1 = \mathscr{F}_{2+1}, \tag{14}$$

$$X_1Z_{11} = \mathscr{E}_{2+1} = \mathscr{F}_3;\ OZ_{11} = F_{2+1};\ Z_{11}Y_1 = D_{2+1},$$

$$Y_2Z_{10} = D_3;\ OZ_{01} = E_3;\ Z_{01}X_0 = \mathscr{F}_3,$$

$$X_0Z_{00} = \mathscr{E}_3;\ OZ_{00} = F_3.$$

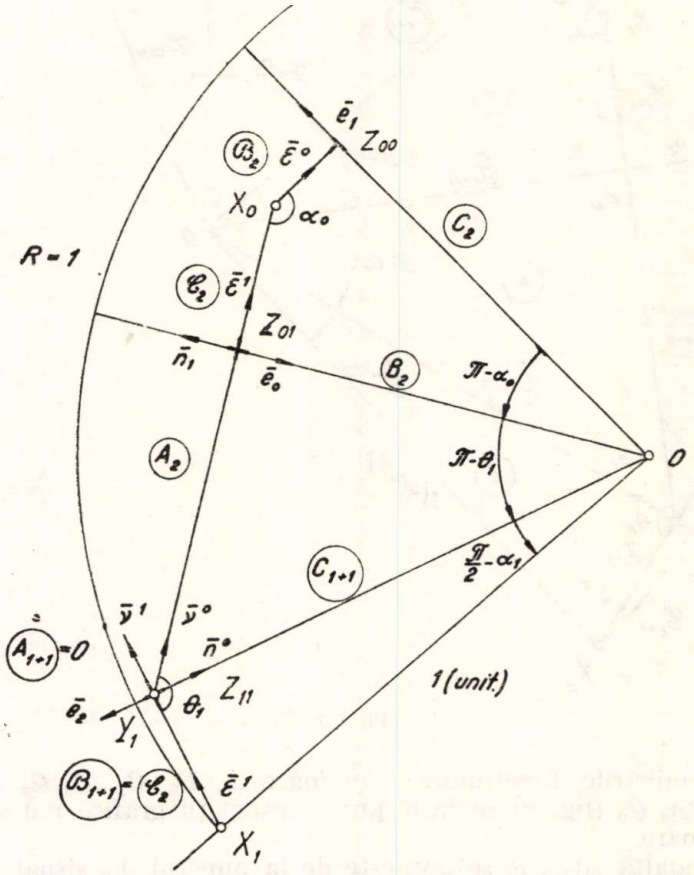


Fig. 8

Pentru funcțiunile inferioare D_2 E_2 F_2 $\mathscr{E}_2$ $\mathscr{F}_2$ (fig. 10) și, respectiv, D_1 E_1 F_1 $\mathscr{E}_1$ $\mathscr{F}_1$ (fig. 11) construcțiile grafice se execută în mod asemănător.

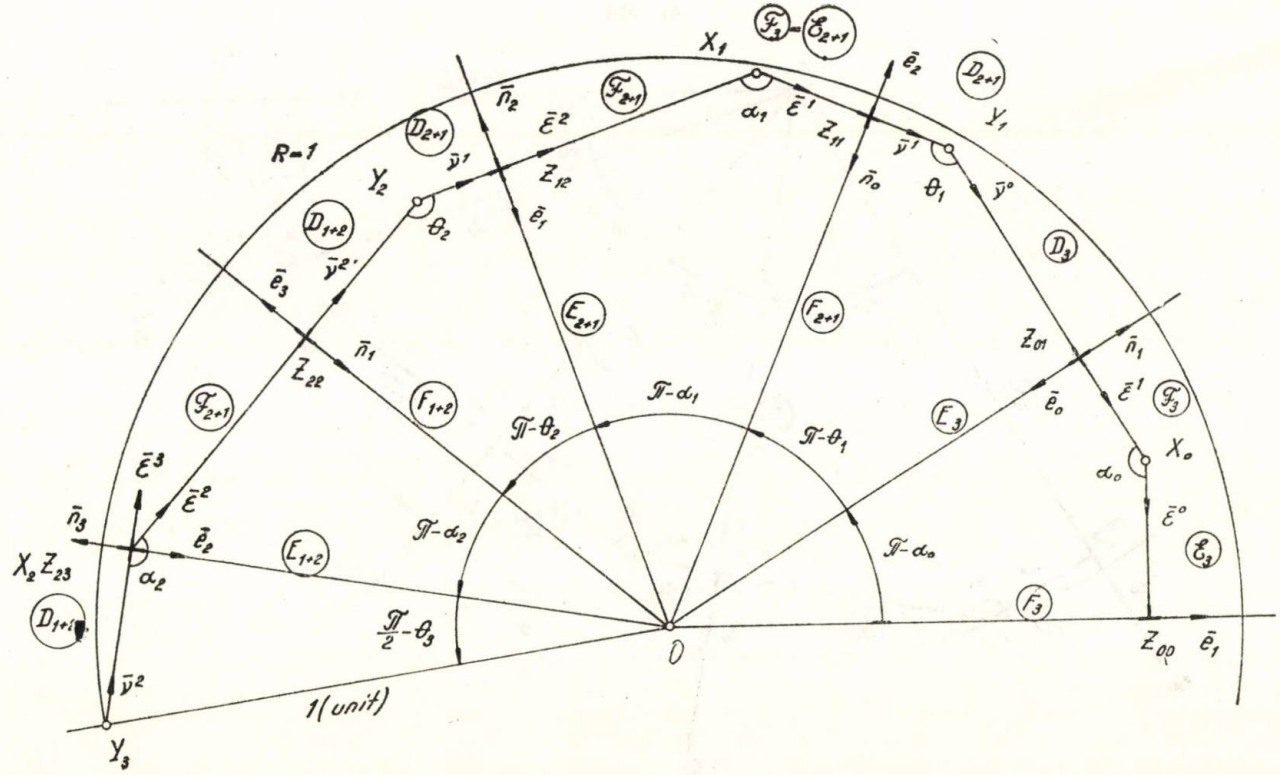


Fig. 9

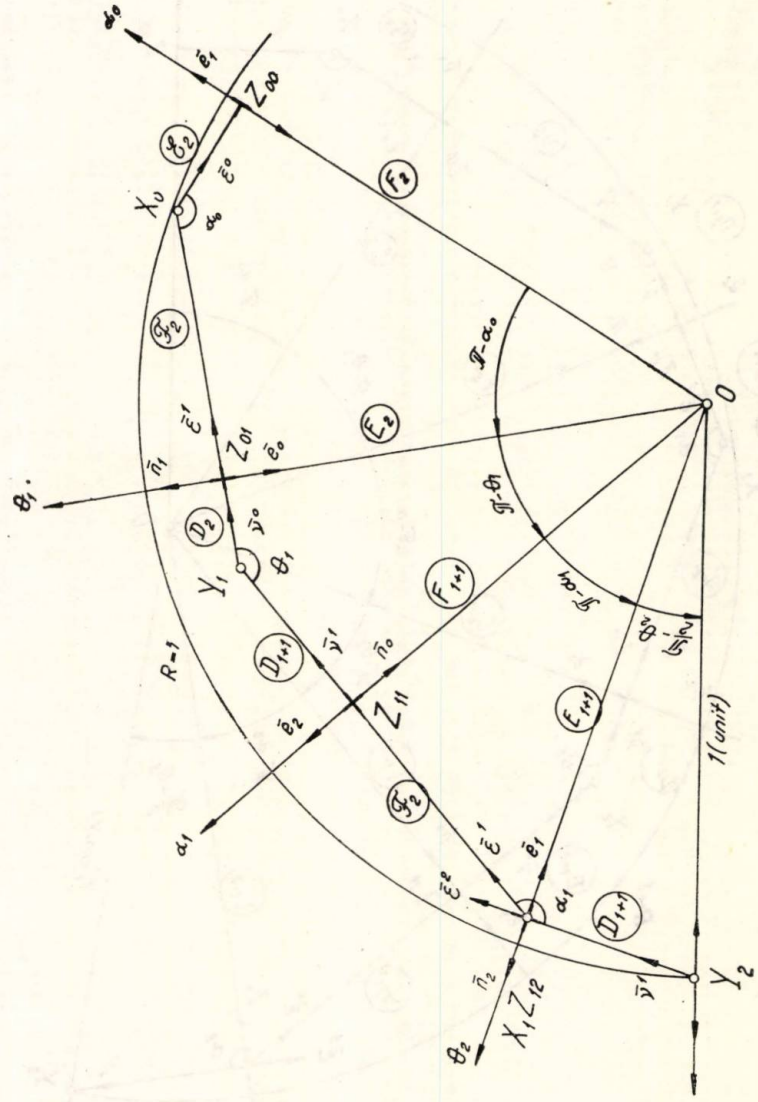


Fig. 10

O observație importantă se referă la faptul că poligonul funcțiunilor se desfășoară în interiorul cercului unitate, deoarece fiecare funcțiune în parte este mai mică decît unitatea.

O altă observație importantă stabilește semnele segmentelor reprezentative ale funcțiilor. În acest scop se au în vedere direcțiile și sensurile versorilor $\bar{e}_i$, $\bar{e}_{i+1}$ și a versorilor reciproci $\bar{\varepsilon}^i$, $\bar{\varepsilon}^{i+1}$ (fig. 12), precum și direcțiile și sensurile versorilor $\bar{n}_{i-1}$, $\bar{n}_i$ și a versorilor reciproci $\bar{\nu}^{i-1}$, $\bar{\nu}^i$ (fig. 12). Acești versori se definesc prin :

$$\sin \alpha_i \bar{\varepsilon}^i = \bar{e}_i - \cos \alpha_i \bar{e}_{i+1}; \quad \sin \alpha_i \bar{\varepsilon}^{i+1} = \bar{e}_{i+1} - \cos \alpha_i \bar{e}_i, \tag{15}$$

$$\sin \theta_i \bar{\nu}^{i-1} = \bar{n}_{i-1} - \cos \theta_i \bar{n}_i; \quad \sin \theta_i \bar{\nu}^i = \bar{n}_i - \cos \theta_i \bar{n}_{i-1},$$

$$\sin \alpha_i \bar{e}_i = \bar{\varepsilon}^i + \cos \alpha_1 \bar{\varepsilon}^{i+1}; \quad \sin \alpha_i \bar{e}_{i+1} = \bar{\varepsilon}^{i+1} + \cos \alpha_i \bar{\varepsilon}^i,$$

$$\sin \theta_i \bar{n}_{i-1} = \bar{\nu}^{i-1} + \cos \theta_i \bar{\nu}^i; \quad \sin \theta_i \bar{n}_i = \bar{\nu}^i + \cos \theta_i \bar{\nu}^{i-1} \tag{16}$$

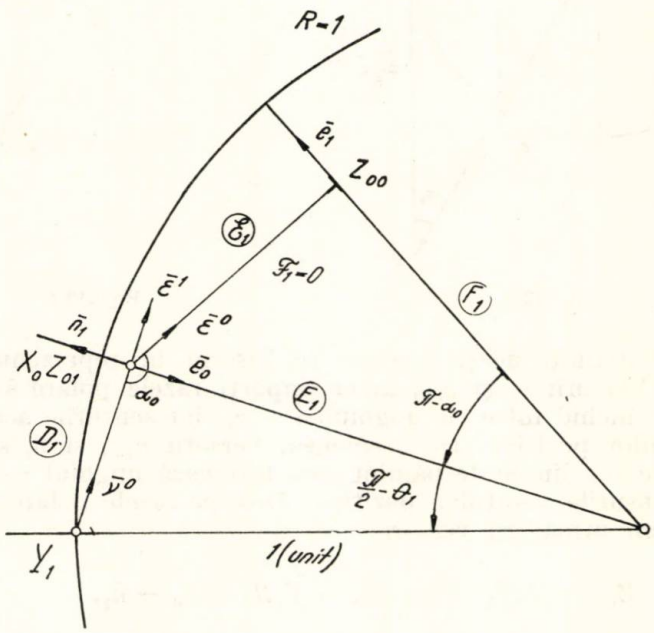


Fig. 11

și prezintă următoarele relații :

$$\bar{e}_i \times \bar{\varepsilon}^{i+1} = \bar{\varepsilon}^i \times \bar{e}_{i+1} = \bar{n}_i,$$

$$\bar{e}_i \bar{e}_{i+1} = \cos \alpha_i; \quad \bar{\varepsilon}^i \bar{\varepsilon}^{i+1} = -\cos \alpha_i, \tag{17}$$

$$\bar{e}_i^2 = 1; \quad \bar{\varepsilon}^{i2} = 1,$$

$$\bar{n}_{i-1} \times \bar{\nu}^i = \bar{\nu}^{i-1} \times \bar{n}_i = \bar{e}_i,$$

$$\bar{n}_{i-1} \cdot \bar{n}_i = \cos \theta_i; \quad \bar{\nu}^{i-1} \bar{\nu}^i = -\cos \theta_i, \tag{18}$$

$$\bar{n}_i^2 = 1, \quad \bar{\nu}^{i2} = 1.$$

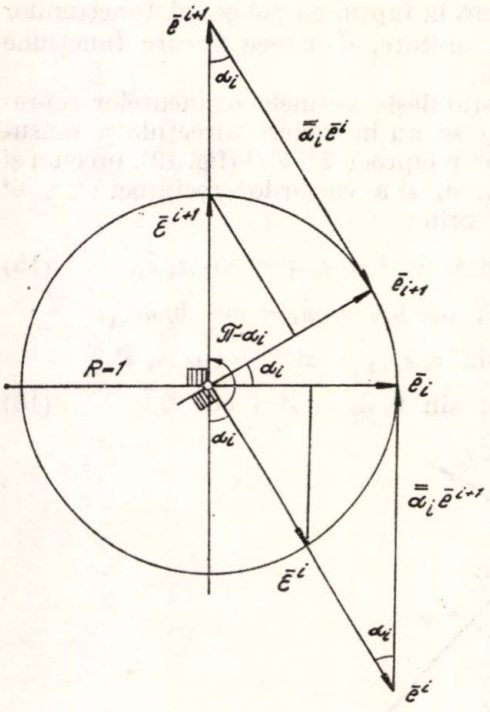


Fig. 12 *a*

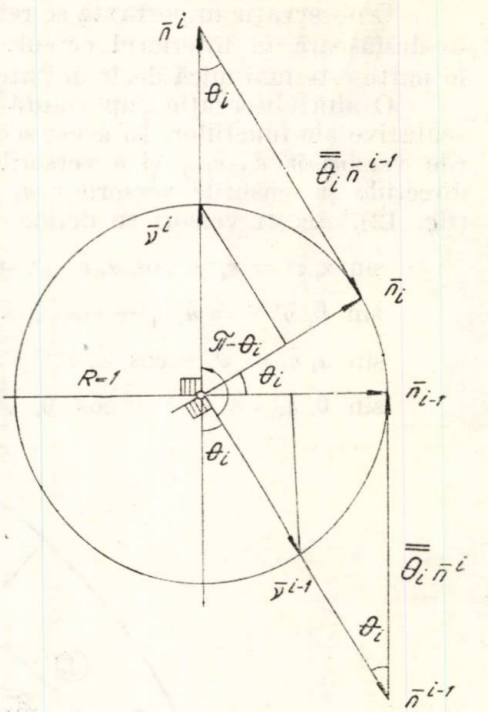


Fig. 12 *b*

Astfel definiţi aceşti vectori se înscriu în reprezentările grafice anterioare. Versorii $\bar{e}_i$ şi $\bar{e}_{i+1}$ au ca suporţi razele polare sau liniile de pământ care închid între ele unghiul $\pi - \alpha_i$, iar sensurile acestora corespund rotaţiilor pozitive. De asemenea, versorii n_{i-1} şi n_i se înscriu pe razele polare sau liniile de pământ care formează unghiul $\pi - \theta_i$ păstrînd totodată sensurile rotaţiilor pozitive. Deci pe razele polare şi liniile de pământ avem următorii versori:

$$
\begin{aligned}
&Z_{00} - H_0V_1 - \bar{e}_1;\ Z_{01} - V_1H_1 - \bar{e}_0 - \bar{n}_1,\\
&Z_{11} - H_1V_2 - \bar{n}_0 - \bar{e}_2;\ Z_{12} - V_2H_2 - \bar{e}_1 - \bar{n}_2,\\
&Z_{22} - H_2V_3 - \bar{n}_1 - \bar{e}_3;\ Z_{23} - V_3H_3 - \bar{e}_2 - \bar{n}_3,\\
&Z_{33} - H_3V_4 - \bar{n}_2 - \bar{e}_4;\ Z_{34} - V_4H_4 - \bar{e}_3 - \bar{n}_4.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Pe laturile poligonului funcţional (fig. 6—11) se înscriu în vîrfurile X_i versorii $\bar{\varepsilon}^i$ şi $\bar{\varepsilon}^{i+1}$, iar în vîrfurile Y_i versorii $\bar{\nu}^{i-1}$ şi $\bar{\nu}^i$. Pe latura $X_i\,Y_i$, perpendiculară pe raza polară Z_{ii}, se găsesc versorul $\bar{\varepsilon}^i$ care formează cu $\bar{e}_{i+1}$ unghiul negativ de 90° şi versorul $\bar{\nu}^i$ care este rotit pozitiv cu unghiul de 90° faţă de versorul $\bar{n}_{i-1}$. Trebuie să se verifice că între $\bar{\varepsilon}^i$ şi $\bar{\varepsilon}^{i+1}$ există unghiul $\pi - \alpha_i$, iar între $\bar{\nu}^{i-1}$ şi $\bar{\nu}^i$ se află unghiul $\pi - \theta_i$.

De asemenea, se verifică faptul că pe latura $X_{i-1}Y_i$, perpendiculară pe raza polară $Z_{i-1,i}$, apare versorul $\bar{\nu}^{i-1}$, care face unghiul de rotație negativ de 90° cu $\bar{n}_i$ precum și versorul $\bar{\varepsilon}_i$, care este rotit cu unghiul pozitiv de 90° față de $\bar{e}_{i-1}$. Deci pe laturile poligonului funcțional avem următorii versori:

$$\begin{aligned}
&Y_1X_1 \perp Z_{11} - \bar{e}_2 = i\bar{\varepsilon}^1;\ \bar{\nu}^1 = i\bar{n}_0,\\
&Y_2X_2 \perp Z_{22} - \bar{e}_3 = i\bar{\varepsilon}^2;\ \bar{\nu}^2 = i\bar{n}_1,\\
&Y_3X_3 \perp Z_{33} - \bar{e}_4 = i\bar{\varepsilon}^3;\ \bar{\nu}^3 = i\bar{n}_2,\\
&X_0Y_1 \perp Z_{01} - \bar{\varepsilon}^1 = i\bar{e}_0;\ \bar{n}_1 = i\bar{\nu}^0,\\
&X_1Y_2 \perp Z_{12} - \bar{\varepsilon}^2 = i\bar{e}_1;\ \bar{n}_2 = i\bar{\nu}^1,\\
&X_2Y_3 \perp Z_{23} - \bar{\varepsilon}^3 = i\bar{e}_2;\ \bar{n}_3 = i\bar{\nu}^2
\end{aligned} \tag{20}$$

(în care $i = \sqrt{-1}$ este operatorul rotației plane pozitive de 90°).

Dacă parcurgînd poligonul funcțional de la X_i sau Y_i către Z_0 laturile sale corespund ca orientare versorilor lor ε și ν, segmentele și funcțiile respective au valori pozitive. Desigur, cînd una din laturi se parcurge în sens contrar versorului său aceasta este negativă. Pe razele polare dacă segmentele orientate OZ corespund cu versorii $\bar{e}$ și $\bar{n}$ exteriori sînt pozitive și negative în caz contrar. Mai precis, componentele pozitive $C - F$ de pe razele polare Z_{ii} sînt în sensul versorilor $\bar{e}$, iar componentele $B - E$ de pe razele polare $Z_{i,i-1}$ sînt pozitive, dacă sînt în sensul versorilor $\bar{n}$.

În vîrfurile conturului poligonal al mecanismului desfășurat (fig. 4) se așează conform acelorași reguli versorii $\bar{e}$, $\bar{n}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\nu}$. Pe liniile de pămînt se înscriu versorii $\bar{e}$ și $\bar{n}$ (19), pe laturile s versorii $\bar{\varepsilon}$, iar pe laturile a versorii $\bar{\nu}$ (20). La conturul poligonal stîng, stelat, versorii $\bar{e}^*$ și $\bar{n}^*$ apar inversați din cauza schimbării unghiurilor $\alpha_i^* - \pi$ și $\theta_i^* - \pi$, dar versorii $\bar{\varepsilon}^*$ și $\bar{\nu}^*$ se stabilesc în același fel (fig. 5). Contururile poligonale $\mathcal{C}_3' \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_2' \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_1' \mathcal{C}_0$ și $C_3' C_2 C_2' C_1 C_1' C_0$ ca și respectivele lor stelate (fig. 4,5) sînt parcurse în sens contrar versorilor $\bar{\varepsilon}$ și $\bar{\nu}$ și au deci laturile negative. Pe liniile de pămînt componentele $C - F$ sînt pozitive deoarece sînt în sensul versorilor $\bar{e}$, iar componentele $B - E$ sînt tot pozitive fiind în sensul versorilor $\bar{n}$ (fig. 4). Componentele stelate $C^* - F^*$ ca și $B^* - E^*$ sînt însă negative fiind contrare fiecare versorilor $\bar{e}^*$ și $\bar{n}^*$ (fig. 5).

Primită la redacție la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, *Teoria mecanismelor spațiale*, București, Edit. Acad. București, 1972.
2. CHR. PELECUDI, *Cuple multiaxe în mecanismele mono și bi contururi tridimensionale*, St. cerc. mec. apl., *5* (1970).
3. CHR. PELECUDI, *Contribuții la studiul matriceal al mecanismelor spațiale*, St. cerc. mec. apl., 6 (1970).
4. CHR. PELECUADI, *Determinarea matriceală a deplasărilor în mecanismele spațiale*, St. cercet. mec. apl., *1* (1971).
5. CHR. PELECUDI, ADRIANA MARINESCU, *Same transformations of the position functions of three-dimensional multiplets*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *1* (1973).

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

STAREA DE EFORTURI UNITARE ÎN ÎNVELIŞUL SFERIC DE SĂGEATĂ MICĂ ÎNCĂRCAT CU SARCINI LOCALE

de M. RENERT[1], GABRIELA NUCĂ[1], V. CHIRIAC[1], E. FISCHER[2], D. FLONDOR[1]

În lucrare se tratează teoretic şi se verifică experimental starea de eforturi în învelişul sferic de săgeată mică, modelul fiind un fund de recipient sub presiune de formă semielipsoidală. Rezultă o corespondenţă destul de bună între rezultatele experimentale şi săgeţile calculate cu relaţia (51).

Se consideră învelişul sferic de săgeată mică, încărcat cu patru sarcini dispuse echidistant, la cota α_s a centrului o al suprafeţei după care această sarcină se aplică (fig. 1), considerată ca un pătrat curbiliniu,

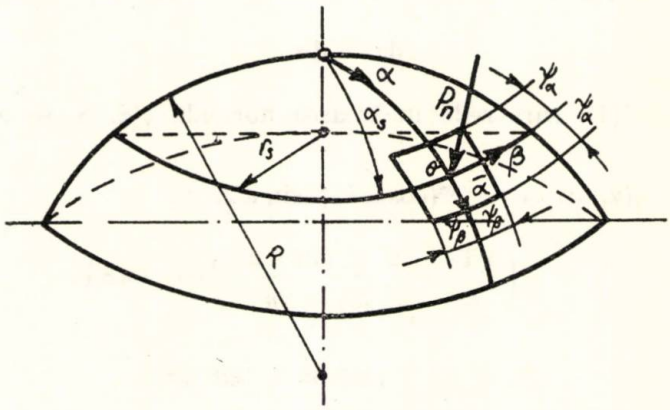


Fig. 1

de laturi $2R\psi_\alpha = 2r_s\psi_\beta$. Încărcarea normală în cuprinsul acestui pătrat se consideră a fi

$$q(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\alpha) \cos 4n\beta, \tag{1}$$

[1]) Institutul politehnic Bucureşti

[2]) Institutul de proiectări de uzine chimice, Centrul de calcul

unde coordonatele $\bar{\alpha}$ se măsoară în sistemul a cărui origine se află în o:

$$\bar{\alpha} = \alpha - \alpha_s. \tag{2}$$

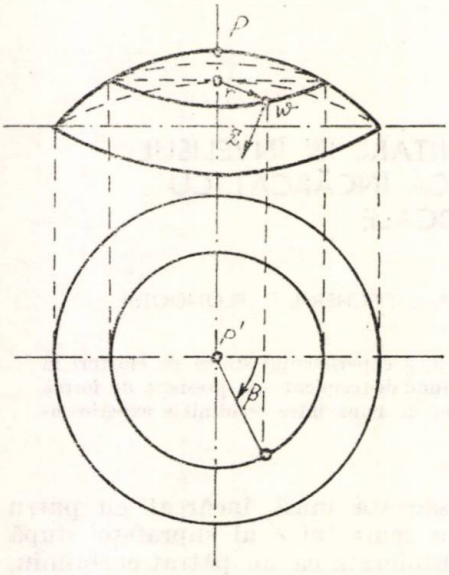


Fig. 2

După cum se ştie [1], [2], metrica învelişului sferic de săgeată mică poate fi aproximată prin metrica plăcii plane (fig.2), unde se poate nota

$$r = r_0\alpha, \tag{3}$$

cu

$$r_0 = \sqrt{R\delta}\,/\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}, \tag{4}$$

axa coordonatelor α avînd originea în polul P al învelişului, respectiv în centrul P' al plăcii.

În sistemul de coordonate (α, β), pentru centrul o al suprafeţei în cuprinsul căreia se aplică sarcina se poate scrie

$$r_s = r_0\alpha_s. \tag{5}$$

De remarcat că, în conformitate cu relaţia de transformare (2),

$$\mathrm{d}\bar{\alpha} = \mathrm{d}\alpha. \tag{6}$$

Expresia (1), care redă încărcarea normală $q(\bar{\alpha}, \beta)$ se explicitează sub forma

$$q(\bar{\alpha}, \beta) = \Lambda e^{-\omega\bar{\alpha}}(\cos\omega\bar{\alpha} + \sin\omega\bar{\alpha}) \times$$

$$\times\left(\frac{4\Psi_\beta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n\Psi_\beta}{n}\cos 4n\beta\right), \tag{7}$$

în care

$$\Phi_1 = \Lambda e^{-\omega\bar{\alpha}}(\cos\omega\bar{\alpha} + |\sin\omega\bar{\alpha}|) \tag{8}$$

reflectă variaţia încărcării după axa α, unde, după cum se vede $\Phi_1 \to 0$ cînd $\bar{\alpha} \to \infty$. Relaţia (8) poate fi scrisă şi sub forma

$$\Phi_1 = \Lambda e^{-\omega|\bar{\alpha}|}(\cos\omega\bar{\alpha} + \sin\omega|\bar{\alpha}|). \tag{8 bis}$$

Factorul

$$\Phi_2 = \frac{4\Psi_\beta}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n\Psi_\beta}{n}\cos 4n\beta \tag{9}$$

reflectă variaţia încărcării după axa β (fig. 3).

Termenul $4\Psi_\beta/\pi$ este cel pentru care, în dezvoltarea Fourier, $n = 0$.

Mărimile Λ și ω din relația (8) urmează a fi determinate astfel încît aceasta să reflecte cît mai corect și variația sarcinilor după axa α (respectiv $\bar{\alpha}$) (fig. 4):

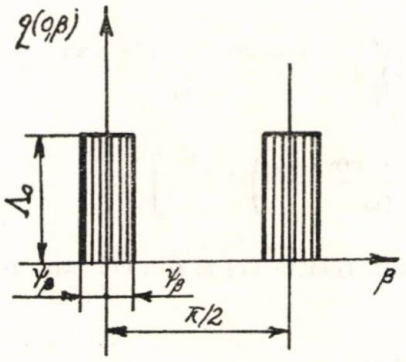


Fig. 3

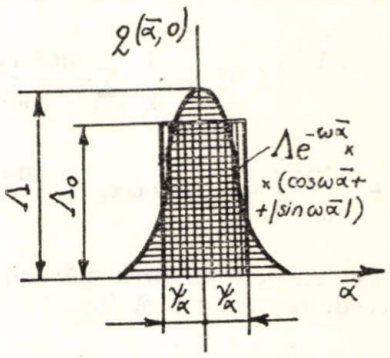


Fig. 4

$$P_n = 4 \int_{\bar{\alpha}=0}^{\Psi_\alpha} \int_{\beta=0}^{\Psi_\beta} q(\bar{\alpha}, \beta) \mathrm{d}A, \tag{10}$$

în care P_n este încărcarea normală locală și

$$\mathrm{d}A = r \cdot \mathrm{d}\beta \cdot \mathrm{d}r = r_0 \cdot \alpha \cdot \mathrm{d}\beta \cdot r_0 \cdot \mathrm{d}\alpha = r_0^2 \cdot \alpha \cdot \mathrm{d}\beta \cdot \mathrm{d}\alpha, \tag{11}$$

unde s-a ținut seama de relația (3) și s-a considerat metrica plăcii plane. Ținînd seama de relațiile (2) și (6), expresia ((11) pentru elementul de arie ia forma

$$\mathrm{d}A = r_0^2(\bar{\alpha} + \alpha_s) \cdot \mathrm{d}\beta \cdot \mathrm{d}\bar{\alpha}. \tag{12}$$

Cu utilizarea relațiilor (7) și (12) se obține

$$P_n = 4 \int_{\bar{\alpha}=0}^{\bar{\alpha}_\Psi} \int_{\beta=0}^{\Psi_\beta} \left[\Lambda \mathrm{e}^{-\omega\bar{\alpha}} (\cos \omega\bar{\alpha} + \sin \omega\bar{\alpha}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{4\Psi_\beta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n\Psi_\beta}{n} \cos 4n\beta \right) \right] \cdot r_0^2(\bar{\alpha} + \alpha_s) \mathrm{d}\beta \cdot \mathrm{d}\alpha =$$

$$= 4\Lambda r_0^2 \int_{\bar{\alpha}=0}^{\bar{\alpha}_\Psi} \int_{\beta=0}^{\Psi_\beta} \left[\mathrm{e}^{-\omega\bar{\alpha}} (\cos \omega\bar{\alpha} + \sin \omega\bar{\alpha}) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{4\Psi_\beta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n\Psi_\beta}{n} \cos 4n\beta \right) \right] \cdot (\bar{\alpha} + \alpha_s) \mathrm{d}\beta \cdot \mathrm{d}\alpha, \tag{13}$$

cu observația că mărimea α_s este dată (constantă).

Aici

$$\bar{\alpha}_\Psi = \frac{R}{r_0}\Psi_\alpha. \tag{14}$$

După efectuarea integrării se obţine din relaţia (13)

$$P_n = \frac{4\Lambda r_0^2}{\pi}\left(4\Psi_\beta^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 4n\Psi_\beta}{n^2}\right)\left[\alpha_s \cdot \frac{1 - e^{-\omega\bar{\alpha}\Psi}\cdot\cos\omega\bar{\alpha}\Psi}{\omega} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\omega\bar{\alpha}\Psi}}{\omega}\left(-\bar{\alpha}_\Psi\cos\omega\bar{\alpha}_\Psi + \frac{\sin\omega\bar{\alpha}_\Psi - \cos\omega\bar{\alpha}_\Psi}{2\omega}\right) + \frac{1}{2\omega^2}\right]. \tag{15}$$

Pentru determinarea mărimii Λ din relaţia (7) şi din celelalte relaţii ce preced, se observă că (fig. 4)

$$\Lambda_0 \cdot \Psi_\alpha = \Lambda\int_{\bar{\alpha}=0}^{\bar{\alpha}_\Psi} e^{-\omega\alpha}(\cos\omega\bar{\alpha} + \sin\omega\bar{\alpha})\cdot d\bar{\alpha} =$$

$$= \Lambda\frac{1 - e^{-\omega\bar{\alpha}_\Psi}\cdot\cos\omega\bar{\alpha}_\Psi}{\omega},$$

de unde urmează

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{\omega\cdot\Psi_\alpha}{1 - e^{-\omega\bar{\alpha}_\Psi}\cdot\cos\omega\bar{\alpha}_\Psi}. \tag{16}$$

La valoare $k = \dfrac{\Lambda}{\Lambda_0}$ *impusă*, relaţia (16) permite determinarea mărimii ω (ecuaţie transcedentă în ω).

Ecuaţia de echilibru a învelişului considerat este [1], [3]

$$\nabla^2\nabla^2 w + w = \frac{R^2}{E\delta}Z, \tag{17}$$

unde

$$Z = q(\bar{\alpha}, \beta), \tag{18}$$

q fiind dat de relaţia (7) şi

$$\nabla^2 = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]. \tag{19}$$

În consecinţă, ecuaţia (17) se poate scrie

$$\nabla^2\nabla^2 w + w = \frac{R^2}{E\delta}q. \tag{20}$$

Ca soluție a acestei ecuații (neomogene) se admite

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) \cdot \cos 4n\beta = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\alpha) \cdot \cos 4n\beta, \tag{21}$$

funcțiile w_0, w_1,... urmînd a fi determinate.

Pentru $n = 0$, ecuația (21) se reduce la

$$\nabla^2\nabla^2 w_0 + w_0 = \frac{R^2}{E\delta} \cdot \frac{4\Psi_\beta}{\pi} \Lambda e^{-\omega\bar{\alpha}} \cdot (\cos \omega\bar{\alpha} + \sin \omega\bar{\alpha}). \tag{22}$$

Ecuația omogenă corespunzătoare

$$\nabla^2\nabla^2 w_0 + w_0 = 0 \tag{23}$$

se descompune în ecuațiile de ordinul doi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_0}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dw_0}{d\alpha} + i w_0 = 0, \\ \frac{d^2 w_0}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dw_0}{d\alpha} - i w_0 = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Soluțiile ecuației (24_2) sînt

$$\begin{aligned} I_0(\alpha\sqrt{i}) = \text{ber } \alpha + i \text{ bei } \alpha, \\ K_0(\alpha\sqrt{i}) = \text{ker } \alpha + i \text{ kei } \alpha \end{aligned} \tag{25}$$

și ale ecuației (24_1)

$$\begin{aligned} \bar{I}_0(\alpha\sqrt{i}) = \text{ber } \alpha - i \text{ bei } \alpha, \\ \bar{K}_0(\alpha\sqrt{i}) = \text{ker } \alpha - i \text{ kei } \alpha, \end{aligned} \tag{26}$$

unde funcțiile ber, bei, ker și kei au semnificația cunoscută [4]. După trecerea de la forma complexă a soluțiilor la forma reală se obține, ca soluție a ecuației omogene (23), de rang n = 0,

$$\begin{aligned} w_0 = A(\text{ber } \alpha - \text{bei } \alpha) + B(\text{ker } \alpha - \text{kei } \alpha) + \\ + C(\text{ber } \alpha + \text{bei } \alpha) + D(\text{ker } \alpha + \text{kei } \alpha) \end{aligned} \tag{27a}$$

sau, după regrupare,

$$w_0 = C_1 \text{ ber } \alpha + C_2 \text{ bei } \alpha + C_3 \text{ ker } \alpha + C_4 \text{ kei } \alpha. \tag{27b}$$

Deoarece funcţiile ker α şi kei α conţin funcţia ln α, şi $w \to 0$ cînd $\alpha \to 0$, ele nu se reţin. Rămîne

$$w_0 = C_1 \operatorname{ber} \alpha + C_2 \operatorname{bei} \alpha, \tag{27c}$$

unde C_1 şi C_2 sînt constante de integrare. Dacă se consideră termenii pînă la gradul 6 inclusiv[4], funcţiile berα şi beiα se exprimă sub forma

$$\begin{aligned} \operatorname{ber}\alpha &= 1 - \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2}, \\ \operatorname{bei}\alpha &= \frac{\alpha^2}{2^2} - \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Ecuaţia omogenă de rang n

$$\nabla^2 \nabla^2 w_n + w_n = 0 \tag{29}$$

se descompune în

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 w_n}{\mathrm{d}\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}w_n}{\mathrm{d}\alpha} + \left(\mathrm{i} - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) w_n = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}^2 w_n}{\mathrm{d}\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}w_n}{\mathrm{d}\alpha} - \left(\mathrm{i} + \frac{n^2}{\alpha^2}\right) w_n = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Substituţia de variabilă $x = \sqrt{\mathrm{i}} \cdot \alpha$, adică

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{\mathrm{i}}}, \tag{31}$$

în ecuaţia (30_1) dă

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_n}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}w_n}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) w_n = 0. \tag{32}$$

Substituţia

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{-\mathrm{i}}} \tag{31 bis}$$

în ecuaţia (30_2) duce tot la ecuaţia (32). Soluţia acestei ecuaţii este

$$w_n = A J_n(x) + B Y_n(x), \tag{33}$$

adică, ţinînd seamă de relaţiile (32) şi (33),

$$w_n = A_1 J_n(\alpha\sqrt{\mathrm{i}}) + A_2 J_n(\alpha\sqrt{-\mathrm{i}}) + B_1 Y_n(\alpha\sqrt{\mathrm{i}}) + B_2\ Y_n(\alpha\sqrt{-\mathrm{i}}), \tag{34}$$

unde A_1, A_2 şi B_1, B_2 sînt constante de integrare.

[4] În condiţiile problemei, $\alpha_{max} \approx 0{,}75$ şi erorile ε rezultă, pentru seria ber α, $\varepsilon_1 < 10^{-6}$, iar pentru seria bei α, $\varepsilon_2 \ll 10^{-6}$.

Ca și la stabilirea expresiei (27c) pentru soluția ecuației (23) de rangul 0, se reține

$$w_n = A_1[\mathrm{Re}J_n(\alpha\sqrt{\mathrm{i}}) + \mathrm{Im}\,J_n(\alpha\sqrt{\mathrm{i}}) +$$

$$+ A_2[\mathrm{Re}\,J_n(\alpha\sqrt{-\mathrm{i}}) + \mathrm{Im}\,J_n(\alpha\sqrt{-\mathrm{i}})]. \tag{35}$$

Se poate arăta că

$$\mathrm{Re}\,J_n(\alpha\sqrt{\mathrm{i}}) + \mathrm{Im}\,J_n(\alpha\sqrt{\mathrm{i}}) \approx \frac{\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}}{2^2 \cdot n!} \cdot \alpha^n \tag{36}$$

și

$$\mathrm{Re}\,J_n(\alpha\sqrt{-\mathrm{i}}) + \mathrm{Im}\,J_n(\alpha\sqrt{-\mathrm{i}}) \approx \frac{\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}}{2^2 \cdot n!} \cdot \alpha^n. \tag{37}$$

În consecință, explicitarea expresiei (35) pentru w_n dă

$$w_n = \frac{A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}}{2^2 \cdot n!} \cdot \alpha^n. \tag{38}$$

★

Drept soluție particulară a ecuației neomogene de rang $n = 0$ (22), se caută o soluție de forma

$$w_0^* = a_0^{(0)} + a_1^{(0)}\bar{\alpha} + a_2^{(0)}\bar{\alpha}^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{m_0} a_i^{(0)}\bar{\alpha}^i, \tag{39}$$

urmînd să fie determinați coeficienții α_i și numărul necesar de termeni ai dezvoltării, m_0, să fie stabilit. Se reamintește că, potrivit relației (6), $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\bar{\alpha}$. Ținînd seamă de expresia (39), membrul din stînga al ecuației (22) devine, după efectuarea derivărilor,

$$\nabla^2\nabla^2 w_0^* + w_0^* = \frac{a_1^{(0)}}{\bar{\alpha}^3} + \frac{3 \cdot 3 \cdot a_3^{(0)}}{\bar{\alpha}} +$$

$$+ (2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot a_4^{(0)} + a_0^{(0)}) + (3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a_5^{(0)} + a_1^{(0)})\,\bar{\alpha} +$$

$$+ 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot a_6^{(0)} + a_2^{(0)})\,\bar{\alpha}^2 + (5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot a_7^{(0)} + a_3^{(0)})\,\bar{\alpha}^3 + \ldots \tag{40}$$

Pe de altă parte, știind că

$$e^{-\omega\bar{\alpha}}(\cos\omega\bar{\alpha}+\sin\omega\bar{\alpha})=1-\frac{2}{2!}(\omega\bar{\alpha})^2+\frac{2^2}{3!}(\omega\bar{\alpha})^3-$$

$$-\frac{2^2}{4!}(\omega\bar{\alpha})^4+\frac{2^3}{6!}(\omega\bar{\alpha})^6-\ldots \tag{41}$$

și punînd ecuația neomogenă sub forma

$$\nabla^2\nabla^2 w_0^*+w_0^*=A_0^* e^{-\omega\bar{\alpha}}(\cos\omega\bar{\alpha}+\sin\omega\bar{\alpha}), \tag{42}$$

unde

$$A_0^*=\frac{R^2}{E\delta}\cdot\frac{4\Psi_\beta}{\pi}\cdot\Lambda, \tag{43}$$

se obține prin egalarea coeficienților din relațiile (40) și (41)

$$a_1^{(0)}=0; \qquad a_3^{(0)}=0;$$

$$a_4^{(0)}=\frac{A_0^*-a_0^{(0)}}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}; \qquad a_5^{(0)}=0; \tag{44}$$

$$a_6^{(0)}=-\frac{\frac{2}{2!}A_0^*\omega^2+a_2^{(0)}}{4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}; \qquad a_7^{(0)}=\frac{\frac{2^2}{3!}A_0^*\cdot\omega^3}{5\cdot 5\cdot 7\cdot 7};$$

urmînd ca mărimile a_0 și a_2 să fie determinate. Dacă se admite că $a_0=a_2=0$, limitînd numărul termenilor din dezvoltarea (39) la $m_0=6$, urmează

$$w_0^*=a_4^{(0)}\bar{\alpha}^4+a_6^{(0)}\bar{\alpha}^6. \tag{45}$$

Relațiile (44) arată că, dacă $A_0^*=0$ — adică dacă lipsește încărcarea suprafeței învelișului, conform relației (45),

$$w_0^*\equiv 0,$$

așa cum este normal. Cînd $A_0^*\neq 0$, se obține din relațiile (44) și (43)

$$a_4=\frac{A_0^*}{2^2\cdot 4^2}=\frac{1}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{R^2}{E\delta}\cdot\frac{4\Psi_\beta}{\pi}\cdot\Lambda;$$

$$a_6=-\frac{2}{2!}\cdot\frac{1}{4^2\cdot 6^2}\cdot A_0^*\cdot\omega^2=-\frac{1}{4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{R^2}{E\delta}\cdot\frac{4\Psi_\beta}{\pi}\cdot\Lambda\omega^2. \tag{46}$$

★

Pentru ecuația neomogenă de rang n

$$\nabla^2 \nabla^2 w_n + w_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{R^2}{E\delta} \cdot \Lambda e^{-\omega\bar{\alpha}} (\cos \omega \bar{\alpha} + \sin \omega \bar{\alpha}) \times$$

$$\times \frac{\sin 4n \Psi_\beta}{n} \cdot \cos 4n \beta \tag{47}$$

se caută o soluție particulară de forma

$$w_n^* = \cos 4n \beta \sum_{i=0}^{m_n} a_i^{(n)} \cdot \bar{\alpha}^i. \tag{48}$$

Situația este cu totul analogă celei întîlnite la rezolvarea ecuației (42). Dacă se ține seama de expresiile (44) pentru coeficienți, unde acum în loc de A_0^* trebuie introdus

$$A_n^* = \frac{R^2}{E\delta} \cdot \frac{2\Lambda}{\pi} \cdot \frac{\sin 4n \Psi_\beta}{n} \tag{49}$$

și, limitînd dezvoltarea la termenul de gradul 6,

$$w_n^* = a_4^{(n)} \cdot \bar{\alpha}^4 + a_6^{(n)} \cdot \bar{\alpha}^6. \tag{50}$$

Rezultă astfel că soluția ecuației (20))

$$w = w_0 + w_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} w_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^*$$

se exprimă sub forma (vezi rel. (27c), (39), (35) și (50)

$$w = C_1 \left(1 - \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2}\right) + C_2 \left(\frac{\alpha^2}{2^2} - \frac{\alpha^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\right) +$$

$$+ \frac{A_0^*}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \bar{\alpha}^4 - \frac{A_0^* \cdot \omega^2}{4^2 \cdot 6^2} \cdot \bar{\alpha}^6 +$$

$$+ \frac{A}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{n!} \alpha^n + \frac{\beta}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n!} \alpha^n +$$

$$+ \bar{\alpha}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^* \cos 4n\beta}{2^2 \cdot 4^2} - \bar{\alpha}^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^* \omega^2 \cdot \cos 4n\beta}{4^2 \cdot 6^2}, \tag{51}$$

unde C_1, C_2, A și B sînt constante de integrare.

1) Cînd $q = 0$, deci $\Lambda = 0$, adică $A_0 = A_n = 0$, trebuie că $w = 0$. Aceasta înseamnă că

$$C_1 = C_2 = 0. \tag{52}$$

2) Pentru $\alpha = \alpha_s$, $\bar{\alpha} = 0$ şi $\dfrac{dw}{d\alpha} = \dfrac{dw}{d\bar{\alpha}} = 0.$

3) Pentru $\alpha = \alpha_c$, unde α_c corespunde conturului învelişului, $w = 0$. Rezultă astfel, pentru A şi B, expresiile :

$$B = \frac{\left(A_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos 4n\beta\right)\left[\dfrac{(\alpha_c - \alpha_s)^6}{4 \cdot 6^2} \cdot \omega^2 - \dfrac{(\alpha_c - \alpha_s)^4}{4^2}\right]}{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{4}}{n!} \alpha_c^n - \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{4}}{(n-1)!} \cdot \alpha_s^{n-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{n\pi}{4}}{(n-1)!} \cdot \alpha_s^{n-1}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{n\pi}{4}}{n!} \cdot \alpha_c^n}, \tag{54}$$

$$A = -B \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{4}}{(n-1)!} \cdot \alpha_s^{n-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \dfrac{n\pi}{4}}{(n-1)!} \cdot \alpha_s^{n-1}}. \tag{55}$$

★

Fie

$$\Psi = -\frac{E\delta r_0^2}{R} \nabla^2 F \tag{56}$$

funcţia eforturilor unitare, unde mărimea F este definită prin relaţia

$$w = \nabla^2 \nabla^2 F. \tag{57}$$

Urmează

$$w = -\frac{R}{E\delta r_0^2} \nabla^2 \Psi \tag{58, a}$$

sau

$$\nabla^2 \Psi = -\frac{E\delta r_0^2}{R} w. \tag{58, b}$$

În aceste relații, operatorul ∇^2 este definit prin relația (19). Se pune problema determinării funcției Ψ, astfel încît relațiile (58) să fie satisfăcute, dată fiind expresia (51) a deplasărilor w. Se ajunge la

$$\Psi_n = K\alpha^{n+2} + L\bar{\alpha}^6 \cos 4n\beta + M\bar{\alpha}^8 \cos 4n\beta, \tag{59}$$

unde

$$K = -\frac{E\delta r_0^2}{R(n+2)^2}\left(\frac{A}{4}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n!} + \frac{\beta}{4}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\right),$$

$$L = -\frac{E\delta r_0^2}{R(36-16\,n^2)}\cdot\frac{A_n^*}{64}, \tag{60}$$

$$M = +\frac{E\delta r_0^2}{R(64-16\,n^2)}\cdot\frac{A_n^*\omega^2}{576},$$

astfel încît

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n, \tag{61}$$

Mai precis

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n, \tag{62}$$

unde

$$\Psi_0 = -\frac{E\delta r_0^2}{36\,R} a_4^{(0)}\bar{\alpha}^6 - \frac{E\delta r_0^2}{64\,R} a_6^{(0)}\bar{\alpha}^8.$$

Funcția w fiind cunoscută (relația (51)), se pot obține prin derivare momentele care încarcă învelișul. Funcția Ψ fiind și ea cunoscută (relația (62)), se pot determina eforturile unitare normale, astfel încît starea de eforturi unitare poate fi determinată prin calcul [1, 3, 5].

★

Pentru verificarea acestor rezultate teoretice, s-au făcut determinări experimentale pe un model de fund de recipient sub presiune de formă semielipsoidală, cu dimensiunile conform figurii 5. Modelul a fost construit din policlorură de vinil dură, cu un modul de elasticitate de 20.000 daN/cm².

În ceea ce privește geometria, criteriile de similitudine sînt coordonatele nedimensionale α_S, α_C, mărimea ω și extinderile plăcuțelor de rigidizare Ψ_α, Ψ_β, exprimate în radiani. Din punct de vedere al încărcării, criteriul de similitudine este Λ/E.

Prin îngrădirea conturului fundului a fost simulată îmbinarea fixă a acestuia cu corpul recipientului, iar încărcarea corespunzătoare celei

din timpul exploatării a fost realizată prin greutăţi de aceeaşi mărime aplicate pe cele patru reazeme. Săgeţile corespunzătoare punctelor de măsurare au fost determinate cu ajutorul comparatoarelor.

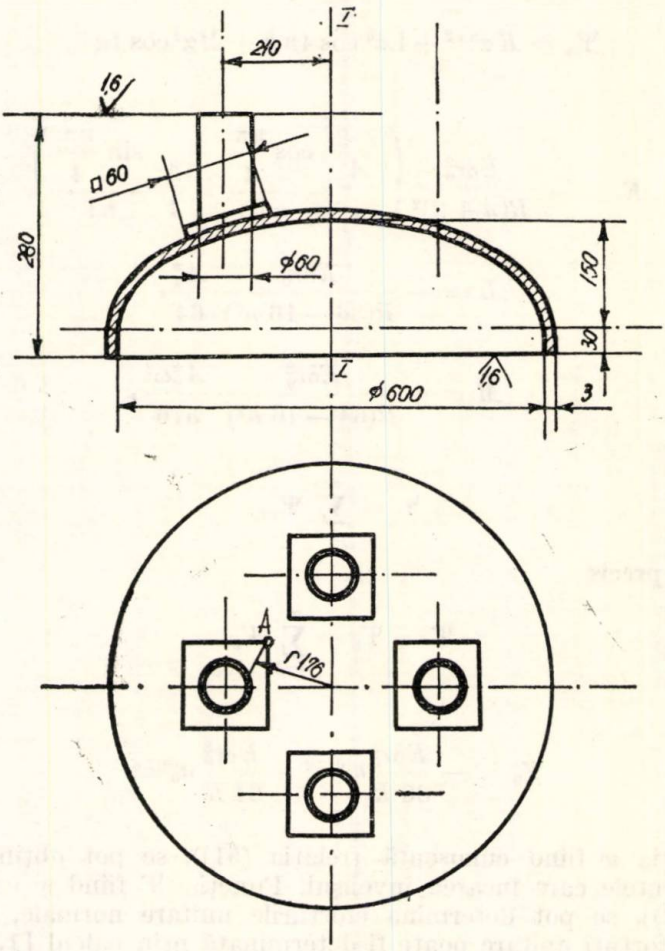


Fig. 5

Datele caracteristice ale modelului sînt :

— $r = 300$ mm ;

— $R = 2r$ (raza calotei sferice de înclinare mică cu care se asimilează profilul eliptic — aproximare permisă în cazul în care picioarele reazemelor se află întotdeauna în interiorul cilindrului de rază egală cu 0,86 r[5] [1]) ;

— $\delta = 3$ mm ;

— $\Psi_\alpha = \Psi_\beta = 0{,}0633$;

— $\mu = 0{,}354$; $E = 20.000$ daN/cm².

[5] În aceste condiţii, încărcarea locală, după verticală, realizată experimental, poate fi considerată, cu aproximaţie, ca încărcare normală a învelişului.

Pentru punctul A, ale cărui coordonate sînt $r = 176$ mm; $\alpha = 7{,}45$; $\beta = \Psi_\beta$, s-au obținut rezultatele înscrise în tabela 1.

Tabela 1

Încărcarea reazemului P [daN]	Săgeata w [cm]		Săgeata corectată w^* [cm]
	Măsurată	Calculată	
1	2	3	4
20	0,020	0,0393	0,01965
40	0,047	0,0786	0,0393
60	0,066	0,1179	0,05895
80	0,080	0,1572	0,0786

Calculele de determinare a săgeții w (coloana 3, tab. 1) au fost efectuate la centrul de calcul al Institutului de proiectări pentru uzine chimice (IPUC).

Se constată că săgețile calculate cu formula (51), reprezintă, cu aproximație destul de bună, dublul celor măsurate. Aceasta se datorește faptului că zonele din dreptul reazemelor au fost prevăzute cu plăcuțe de rigidizare de grosime egală cu grosimea fundului, calculele teoretice fiind făcute fără luarea în considerație a acestora. Pentru a ține cont de rigidizarea locală datorită acestor plăcuțe, notînd

$$\delta_{tot} = \delta + \delta_{pl}, \tag{63}$$

unde δ_{tot} este grosimea ce rezultă prin însumarea grosimii fundului δ și a grosimii plăcuței de rigidizare, δ_{pl}, se introduce coeficientul de corecție

$$k_w = \frac{\delta}{\delta_{tot}}, \tag{64}$$

astfel încît valoarea corectată w^* a săgeții este

$$w^* = k_w \cdot w. \tag{65}$$

Valorile w^* astfel calculate, corespund satisfăcător cu valorile măsurate ale săgeții (coloana 4, tab. 1).

Primită la redacție la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. V. S. Vlasov, *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik*, Berlin, Akademie — Verlag, 1958.
2. W. Zerna, *Zur neueren Entwicklung der Schalentheorie*, ZAMM, **41**, *3*, 7—101 (1961).
3. D. Timoşenko, S. Woinowski-Krieger, *Theory of plates and shells*, New-York, Mc. Graw-Hill, 1960.
4. A. Gray, G. B. Matthews, *Funcţiile Bessel şi aplicaţiile lor în fizică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1958.
5. P. P. Bijlaard, *Computation of stresses from local loads in spherical pressure vessels or pressure vessel heads*, Welding Research Bulletin, *34*, 591 (1967).

STUDII

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

UNELE ASPECTE ALE FRECĂRII ŞI UZĂRII CUPLELOR FIR-CAPTATOR ÎN TRACŢIUNEA ELECTRICĂ. II

de C. STĂNESCU[1], GH. ŞERBAN[2], B. DIMITROV[2]

Lucrarea este o continuare a articolului apărut în revista ,,St. cerc. mec. apl.,'' 5 (1971). Se prezintă două instalaţii de modelare a funcţionării contactelor electrice alunecătoare. Cu ajutorul acestora se urmăresc comportarea unor cuple de frecare de alunecare în prezenţa curentului electric, precum şi influenţa variaţiei diferiţilor parametri mecanici şi electrici asupra intensităţii uzării acestora.

1. ASPECTE TEORETICE

Uzarea contactelor electrice mobile este un proces de mare complexitate. Unele cercetări tribologice preliminare efectuate, în absenţa curentului electric, în cadrul Centrului de mecanică a solidelor din Bucureşti, au pus în evidenţă severitatea condiţiilor de funcţionare ale cuplei piesă de contact-fir [9]. Prezenţa curentului electric în zona de contact accelerează procesul de uzare. Uzarea mecanică propriu-zisă are un rol secundar în comparaţie cu cea electrică [6]. Totuşi, procesul uzării mecanice poate influenţa desfăşurarea uzării totale, mai ales la densităţi de curent scăzute [3].

Contactele electrice alunecătoare se caracterizează prin presiuni de contact relativ scăzute. Acest fapt are drept rezultat obţinerea unor valori mici pentru suprafaţa de contact reală. Densităţile de curent calculate pentru suprafaţa aparentă de contact au un caracter mai mult informativ. De fapt, densităţile de curent reale sînt de ordinul 10^3—10^4 A/cm^2, iar concentrările mari de energie în microzonele de contact pot avea ca rezultat : topirea, evaporarea şi chiar ionizarea materialelor metalice. Mişcarea relativă de alunecare a contactului electric micşorează suprafaţa reală de contact, mărind solicitarea electrică în microzone [1], [8]; pe de altă parte aceasta duce la îmbunătăţirea funcţionării cuplei datorită micşorării duratei contactului şi a răcirii zonei de contact [6].

[1]) Institutul politehnic Bucureşti
[2]) Centrul de mecanică a solidelor

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 3, 1975 P. 455–463

În interiorul microzonelor care compun suprafaţa de contact reală se realizează nu numai contactul metal-metal. Prezenţa peliculelor de lubrifiant şi apă au ca efect apariţia fenomenelor de coroziune electrochimică, în completarea efectelor coroziunii atmosferice [2]. Structurile de reacţie formate sînt rău conducătoare de electricitate, ceea ce provoacă apariţia unor tensiuni de contact de ordinul volţilor [3]. În funcţie de intensitatea curentului pot lua naştere arcuri electrice între piesele care compun cupla de frecare.

Contactele electrice alunecătoare se caracterizează prin condiţii de lubrifiere dificile [10]. Severitatea condiţiilor de lucru este deosebit de mare în cazul contactelor electrice aeriene ale vehiculelor de transport în comun : troleibuze, tramvaie, trenuri.

În prezenta lucrare se va urmări în special modelarea contactelor electrice alunecătoare pe instalaţii de laborator.

2. INSTALAŢII DE LABORATOR ŞI METODE DE LUCRU

Cercetările de laborator au fost făcute cu ajutorul a două instalaţii experimentale. În figurile 1 şi 2 se prezintă vederea şi, respectiv, schema principalei instalaţii de studiu.

Fig. 1. — Vederea generală a instalaţiei pentru studiul uzării contactelor electrice alunecătoare.

Cupla de frecare utilizată este de tipul III-l-a [7]. Epruveta (*1*) are funcţie de piesă de contact (captator), iar firul electric este modelat de epruveta mobilă (*2*), fixată pe periferia discului din material izolator (*3*), cu ajutorul unor ghiare de prindere (*3a*) (vezi fig. 3). Discul izolator

(*3*) montat pe arborele (4) este antrenat în mișcare de rotație de către motorul electric (*5*), prin intermediul reductorului (*6*) și a roților de curea (*7*). Se obțin trei trepte de viteză periferică, respectiv de : 2,75 ; 5,50 și 11,00 m/s.

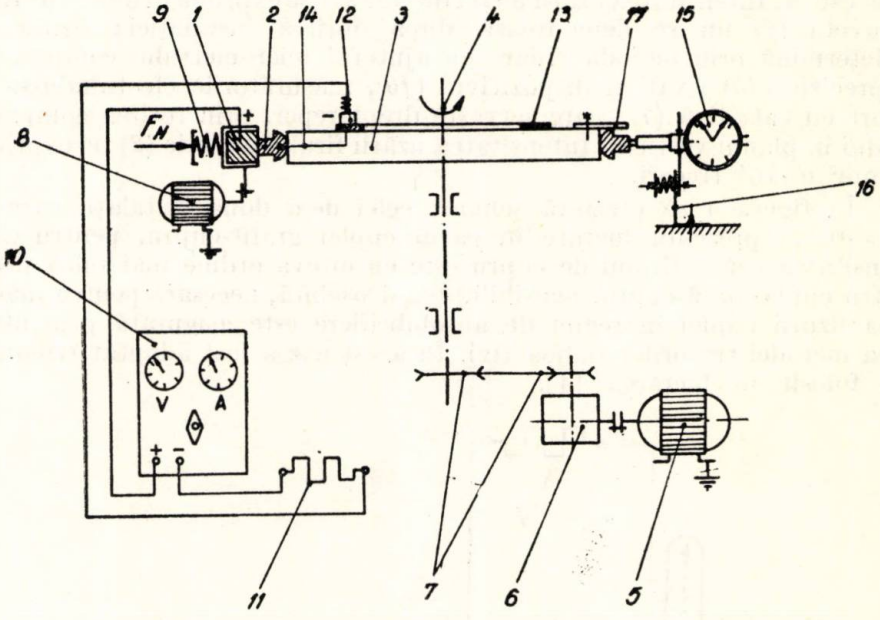


Fig. 2. — Schema funcțională a instalației din figura 1.

Epruveta (*1*) execută o mișcare rectilinie-alternativă (cursa = 2 mm) pe suprafața epruvetei mobile (*2*), perpendicular pe planul de rotație al discului (*3*), antrenarea epruvetei (*1*) făcîndu-se prin intermediul unui

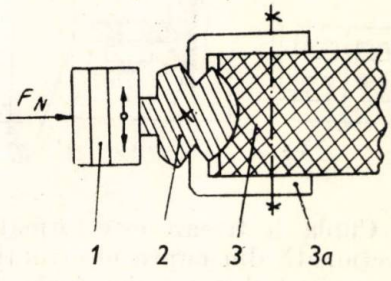


Fig. 3. — Detaliu al cuplei de frecare, instalația din figura 1.

excentric de către motorul (*8*). Forța normală (F_N) de încărcare a cuplei de frecare se aplică cu ajutorul resortului tarat (*9*). Ungerea cuplei se face cu o pîslă imbibată cu lubrifiant, care se află în contact cu epruveta (*2*).

Cupla de frecare este alimentată cu curent continuu de la redresorul (*10*), în circuitul electric fiind montată și rezistența de sarcină (*11*), care poate lua diferite valori în funcție de densitatea de curent necesară. Epru-

veta (*1*) este legată la masa instalaţiei. Alimentarea cu curent electric a epruvetei (*2*) se face cu ajutorul periei, (*12*), a inelului colector (*13*) şi a clemei de legătură (*14*).

Măsurarea uzurii epruvetei (*1*) se face gravimetric, după demontarea acesteia. Intensitatea uzării piesei de contact se exprimă în $mm^3/10^3$ Km. Epruveta (*2*) nu se demontează după oprirea instalaţiei; uzura sa se determină prin metoda liniară cu ajutorul micrometrului comparator de precizie (*15*) fixat în dispozitivul (*16*), măsurătorile efectuîndu-se în raport cu cala fixă (*17*) care serveşte drept reper, prin rotirea comparatorului în planul vertical. Intensitatea uzării firului electric (*2*) se exprimă în $mm^3/m \cdot 10^4$ treceri.

În figura 4 se prezintă schema celei de-a doua instalaţii care se foloseşte în prezenta lucrare în cazul cuplei grafit-cupru, pentru care intensitatea uzării firului de cupru este cu cîteva ordine mai mică decît pentru cupla fontă-cupru. Sensibilitatea deosebită, necesară pentru măsurarea uzurii cuplei în regim de autolubrifiere este asigurată prin utilizarea metodei trasorilor radioactivi. În acest caz a fost adoptat tribometrul folosit în lucrarea [4].

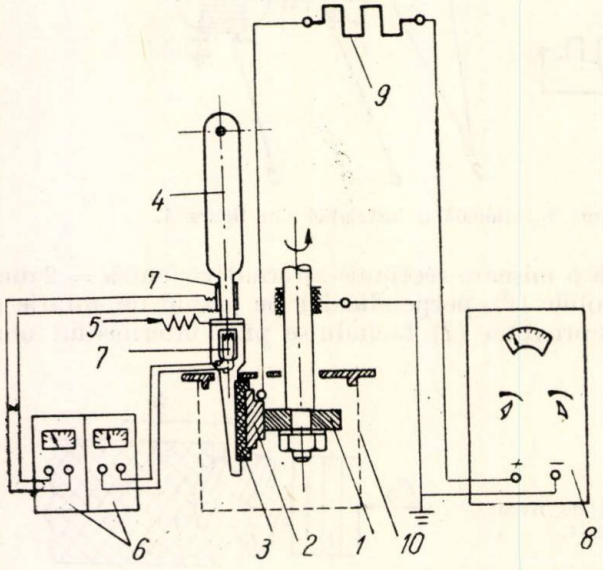


Fig. 4. — Instalaţia pentru măsurarea uzurii contactelor electrice alunecătoare prin metoda radioizotopilor.

Cupla de frecare este formată din epruveta mobilă tip cilindru (*1*) confecţionată din cupru electrolitic cu 1% indiu*) şi montată pe arborele principal al instalaţiei şi din epruveta fixă tip ştift (*2*) confecţionată din grafit, care este fixată în carcasa din material izolator (*3*) şi apoi montată în braţul flexibil (*4*). Presiunea de contact este asigurată de resortul tarat (*5*), iar măsurarea forţelor normală şi de frecare se face cu ajutorul tensometrelor (*6*) şi a mărcilor tensometrice (*7*). Pentru alimentarea cu curent continuu a zonei de contact a cuplei de frecare se

*) Elementul trasor — indiul — a fost inclus prin turnare în cupru.

utilizează redresorul (*8*) și rezistența de sarcină (*9*). Funcționarea cuplei de frecare în regim de autolubrifiere are loc într-un spațiu închis (*10*), colectarea uzurii făcîndu-se într-o pungă de celuloză, iar intensitatea uzării epruvetei de cupru se determină prin metoda radiometrică descrisă în lucrarea [*5*]. Tribometrul a funcționat într-o nișă specială, pentru a evita infectarea radioactivă prin răspîndirea uzurii libere în atmosferă.

Prin urmare, în ambele instalații s-a folosit cuprul electrolitic pentru confecționarea epruvetei mobile care modelează firul electric. Pentru confecționarea epruvetelor piesă de contact (captator) s-au utilizat următoarele materiale :

— fontă cenușie (F_c), material similar cu cel folosit în lucrarea [9];

— aliaj de aluminiu (AT—Si5—Cu20), cu duritatea HB = = 120 daN/mm² și structura constînd din amestecul : soluție solidă $\alpha + Al_2Cu + Si$;

— aliaj de aluminiu (AT—Si12), cu duritatea $HB = 55$ daN/mm² și structura de siluminiu eutectic conținînd cristale grosiere de siliciu înglobate în masa de aluminiu;

— electrografit (EGR) sinterizat și impregnat cu masă plastică;

— electrografit (MGR) sinterizat cu cupru, neimpregnat.

Greutatea specifică a materialelor utilizate la confecționarea cuplei de frecare este dată în tabela 1.

Tabela 1

Greutatea specifică a materialelor utilizate

Nr. crt.	Materialul	Greutatea specifică (mg/mm³)
1	Cu	8,93
2	Fc	7,81
3	AT—Si5—Cu20	3,20
4	AT—Si12	2,65
5	EGR	1,80
6	MGR	4,09

Lubrifianții folosiți au constat din ulei de bază tip M—30 (STAS 751—70) conținînd drept adaos una dintre următoarele substanțe :

— disulfură de dibenzil (DBDS)*),

— acid stearic (A.S.)*),

— romamidă tip N (RAN)**),

— vaselină grafitată (vas. ITB)***).

*) Reactivi din import.

**) Produs al Fabricii de Detergenți din Timișoara.

***) Lubrifiant folosit de ITB la ungerea firelor electrice (fabricație proprie).

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

În cele ce urmează se vor prezenta cîteva dintre rezultatele mai semnificative ale cercetărilor experimentale (de laborator) privind uzarea contactelor electrice alunecătoare în funcţie de : variaţia parametrilor mecanici (viteza şi presiunea), regimul electric, natura lubrifiantului, natura piesei de contact.

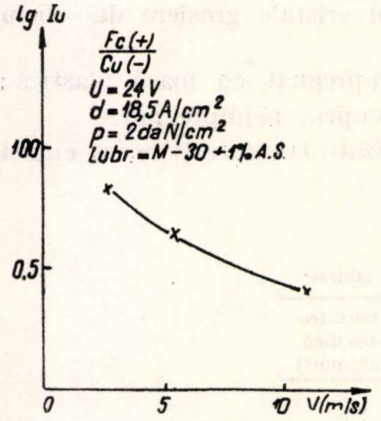


Fig. 5. — Influenţa vitezei de alunecare asupra intensităţii uzării piesei de contact.

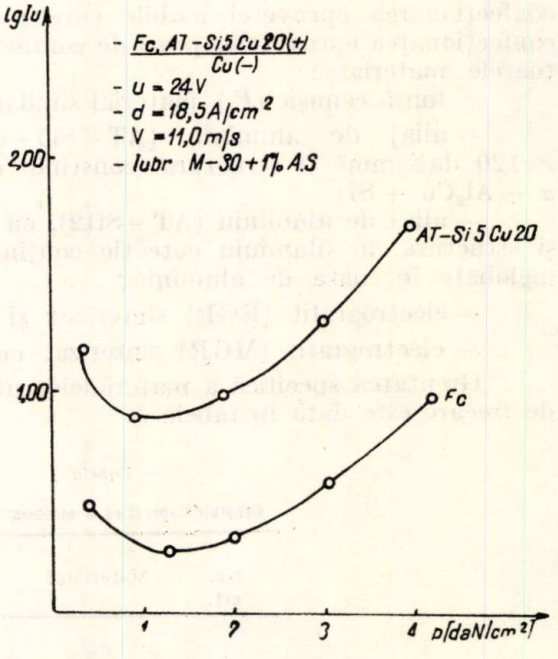


Fig. 6. — Influenţa presiunii asupra intensităţii uzării piesei de contact.

În figurile 5 şi 6 se pune în evidenţă influenţa variaţiei mărimilor mecanice asupra intensităţii uzării piesei de contact. Astfel, creşterea vitezei de alunecare are drept rezultat reducerea uzurii, condiţiile de lubrifiere ale cuplei îmbunătăţindu-se (vezi fig. 5). Variaţia presiunii aparente de contact are o influenţă mai complexă. La presiuni mici procesul uzării se intensifică datorită instabilităţii contactului electric, piesa de contact intră în vibraţie şi apar scîntei. La presiuni mai mari se constată o nouă creştere a intensităţii uzării, datorită creşterii ponderii uzării mecanice. Există o presiune optimă, ceva mai mare pentru fontă decît pentru aliajele de aluminiu, pentru care intensitatea uzării este minimă (vezi fig.6).

Influenţa fenomenului de electroeroziune, datorat prezenţei scînteilor în zona de contact, asupra intensităţilor uzării ambelor piese componente cuplei de frecare, se evidenţiază în figura 7. Scînteile au fost provocate de uşoare vibraţii ale piesei de contact, perpendicular pe suprafaţa firului electric. Prezenţa scînteilor împiedică rodajul cuplei, accentuează defectele de suprafaţă şi accelerează procesul uzării prin reducerea

treptată a suprafeței reale de contact. Intensitatea uzării poate crește cu peste două ordine de mărime.

În tabelele 2 și 3 se prezintă rezultatele cercetărilor privind influența naturii lubrifiantului lichid și, respectiv, al materialului piesei de contact asupra uzurii cuplei. Pentru fiecare determinare cupla de frecare a funcționat timp de 100 h în următoarele condiții : $U=24$ V ; $d=18{,}5$ A/cm² ; $v = 11{,}00$ m/s ; $p = 2$ daN/cm².

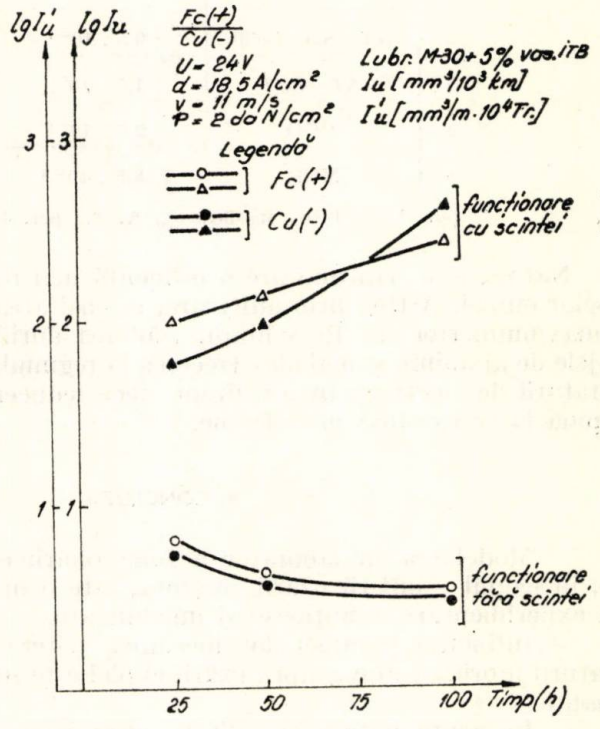


Fig. 7. — Influența scînteilor asupra intensității uzării pieselor cuplei de frecare.

Tabela 2

Intensitatea uzării cuplei de frecare în funcție de natura lubrifiantului

Nr. crt.	Lubrifiantul	Intensitatea uzării	
		Fir electric (−) ($mm^3/m.10^4$ treceri)	Piesă contact Fc(+)($mm^3/10^3$Km)
1	M−30	4,6	5,1
2	M−30+5% vas.ITB	2,9	3,6
3	M−30 +1% DBDS	1,8	1,7
4	M−30 + 1% A.S.	2,5	2,4
5	M−30 +1% RAN	2,1	3,1

*Tabela 3**)*

Intensitatea uzării cuplei de frecare în funcţie de natura materialului piesei de contact

Nr. crt.	Materialul	Intensitatea uzării	
		Fir electric (−) ($mm^3/m.10^4$ treceri)	Piesă contact(+) ($mm^3/10^3$ Km)
1	Fc	$2,5 . 10^{0}$	2,4
2	AT−Si5−Cu20	$9,5 . 10^{-1}$	8,7
3	AT−Si12	$1,5 . 10^{0}$	20,0
4	EGR	$2,6 . 10^{-2}$	6,9
5	MGR	$8,5 . 10^{-3}$	2,3

*) pct. 1−3, lubr. M−30+1% A. S.; pct. 4−5, autolubrifiere.

Natura lubrifiantului are o influenţă mai redusă decît cea a naturii pieselor cuplei. Astfel, prin aditivare, intensitatea uzării se poate micşora de maximum trei ori. În schimb, scăderea durităţii piesei de contact la aliajele de aluminiu şi mai ales trecerea la regimul de autolubrifiere pentru captatorii de electrografit are drept efect reducerea uzurii firului electric cu pînă la trei ordine de mărime.

4. CONCLUZII

— Modelarea în laborator a funcţionării contactelor electrice mobile, în scopul studierii uzării acestora, este o operaţie complexă şi necesită experimentări minuţioase şi îndelungate.

— Influenţa parametrilor mecanici (viteză şi presiune), precum şi a naturii lubrifiantului asupra uzării cuplei este sensibilă însă nu şi determinantă.

— Influenţa naturii şi calităţii materialelor cuplei de frecare şi în legătură cu aceasta cea a regimului de ungere a contactului electric alunecător asupra comportării sale din punct de vedere tribologic este importantă. Cel mai bine se comportă cuplele care funcţionează în regim de autolubrifiere.

— Stabilitatea arcului electric are o influenţă deosebită asupra uzurii pieselor cuplei de frecare şi a durabilităţii acestora.

Primită la redacţie la 25 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. E. Binelli, *Consumurile de conductor de contact pentru tracţiunea electrică*, Dosar INID Nr. 04107, 1−9.
2. B. Dimitrov, *On the nature of the corrosiv wear process*. Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *3*, 583−597 (1973).

3. R. Holm, *Electric contacts.* Theory and application, Springer Verlag, Berlin, 1967.
4. I. Iliuc, *Comportarea la frecarea de alunecare a unor straturi subțiri și influența mediului,* Teză de doctorat, Inst. polith. București, 1969.
5. I. Iliuc, M. Mușat, *Cu privire la realizarea unor noi materiale de fricțiune,* Comunicare prezentată la Sesiunea de Comunicări C.M.S., București, iunie 1972. (nepubl.).
6. O. Kasperowski, *Kontaktwerktoffe für Stromabnehmer elektrischer Fahrzeuge,* Elektrische Bahnen, *8*, 170—182 (1963).
7. D. Pavelescu, *Concepții noi, calcul și aplicații în frecarea și uzarea solidelor deformabile,* Edit. Academiei (1971).
8. C. Stănescu, *Stadiul actual al cuplelor de frecare pentru captatoarele de curent în tracțiunea electrică,* Referat documentar, București, 1969 (nepublicat).
9. C. Stănescu, B. Dimitrov, *Unele aspecte ale frecării și uzării cuplelor fir-captator în tracțiunea electrică.* I, St. cerc. mec. apl., *5*, 1269—1278 (1971).
10. E. Strobel, *Erfahrungen mit Schleifkontakten aus Eisen-Blei-Graphit-Perbunolwerkstoffen für Oberleitungsomnibusse,* Kontaktwerktoffe in der Elektrotechnik. Akademie Verlag, Berlin, 1962.

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA,
omagiu cordial

METODĂ PENTRU CALCULUL HIDRAULIC AL PALETAJULUI ROTORULUI DÉRIAZ

de ŞT. ZAREA, N. VASILIU

Institutul politehnic Bucureşti

Utilizînd ipoteza că mişcarea în zona paletajului rotoric se efectuează pe suprafeţe sferice şi alegînd o lege simplă de variaţie a cuplului hidraulic în rotor, s-a integrat ecuaţia diferenţială a liniilor de curent în mişcare relativă. Astfel, calculul curbelor de intersecţie a scheletului paletei cu sferele se efectuează rapid şi se obţine proiecţia acestor curbe pe un plan paralel. Se prezintă şi succesiunea operaţiilor de dimensionare a turbinei Dériaz. Metoda este ilustrată printr-un exemplu de calcul.

1. SCOPUL LUCRĂRII

Preocupările din ultimul sfert de secol pentru elaborarea de metode de calcul şi pentru construirea de turbine Dériaz sînt din ce în ce mai intense. Ataşîndu-se acestor preocupări, în lucrare se prezintă o metodă simplă pentru calculul scheletului paletelor rotorului Dériaz [1] — [7].

Pentru proiectarea paletajului rotoric, după cum se ştie, trebuie să se determine două familii de suprafeţe de curent: una dintre familii $\psi = \psi(r, z)$ este cea din care fac parte butucul rotorului şi camera turbinei, iar cealaltă, $\theta = \theta(r, z)$ reprezintă scheletul paletelor într-un sistem de coordonate cilindrice r, θ, z (fig. 1). Funcţia ψ se va alege ca soluţie a unei ecuaţii diferenţiale ce descrie mişcarea absolută neperturbată de prezenţa paletelor şi care să satisfacă şi condiţiile la limită în zona rotorului. Funcţia $\theta(r, z)$ se va determina prin integrarea ecuaţiei diferenţiale a liniei

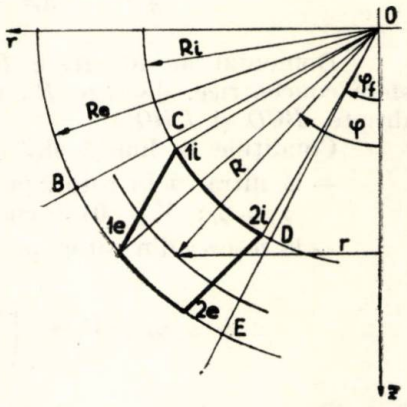


Fig. 1

de curent din mişcarea relativă. În acest scop variaţia cuplului hidraulic, rV_u, se va alege în mod adecvat de către proiectant.

Folosind aceste rezultate s-a elaborat un algoritm pentru dimensionarea turbinelor Dériaz.

Deşi metoda nu este riguroasă, în sensul că variaţia cuplului hidraulic nu rezultă din integrarea ecuaţiilor de mişcare ci este aleasă de proiectant, metoda prezintă avantajul că permite calculul paletajului rotoric Dériaz fără a utiliza transformări conforme, iar rezultatele sînt similare cu cele ale unor turbine executate.

2. IPOTEZE. ECUAŢIA SUPRAFEŢELOR DE REVOLUŢIE

În cuprinsul lucrării se utilizează următoarele ipoteze: fluidul este perfect, mişcarea absolută neperturbată este axial-simetrică şi rotaţională caracterizată printr-o funcţie de curent $\psi\ (r, z)$, care satisface ecuaţia diferenţială [7]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = F(r,z), \tag{1}$$

unde

$$F = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \div U_e - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}(rV_u)^2; \tag{1a}$$

U_e — potenţialul forţelor exterioare; $V_u = V_0$ — componenta tangenţială a vitezei.

În cazul particular în care F este o constantă, care are dimensiunea unei viteze, [7] ecuaţia (1) devine ecuaţia lui Poisson:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 2C \tag{1b}$$

Domeniul de integrare $BCDEB$, (fig. 1), este mărginit de două sfere concentrice, de raze R_i, respectiv R_e, şi de două conuri circulare drepte, BCO şi EDO.

Condiţiile la limită sînt:

— la intrarea în rotor, pe conul BCO, determinat de unghiul φ_i dat $\varphi = \varphi_i$; $V_r(r, 0) = \text{const}$; $V_z(r, 0) = \text{const}$.

— la ieşirea din rotor, pe conul EDO, determinat de unghiul φ_f dat

$$\varphi = \varphi_f\ ;\ V_r = \begin{cases} \text{const.}, \\ F_1(r,z); \end{cases} \quad V_z = \begin{cases} \text{const.}, \\ F_2(r,z), \end{cases} \tag{2}$$

funcţiile $F_1(r, z)$ şi $F_2(r, z)$ fiind cunoscute. În cele ce urmează am ales prima variantă a condiţiilor la limită (2) adică pentru

$$\varphi = \varphi_f;\ V_r = \text{const.},\ V_z = \text{const.} \tag{2'}$$

O soluție simplă a ecuației diferențiale (1b), cu condițiile la limită (2′), este

$$\psi = C(r^2 + z^2) = CR^2, \tag{3}$$

unde R este raza sferei, iar valoarea constantei C rezultă din ecuația de continuitate

$$C = \frac{Q}{\pi(R_e^2 - R_i^2)}. \tag{4}$$

Componentele vitezei absolute în planul meridian, V_r, V_z și rezultanta acestora, V_m, au expresiile:

$$V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -2C\frac{z}{r}\,;\; V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 2C,$$

$$V_m = \sqrt{V_r^2 + V_z^2} = \sqrt{4C^2\,\frac{r^2 + z^2}{r^2}} = \frac{2C}{\sin\varphi}. \tag{5}$$

Viteza V_z este constantă în tot domeniul rotorului, iar viteza V_m crește de la intrarea pînă la ieșirea din rotor, așa cum este necesar pentru un rotor de turbină hidraulică cu reacțiune. Viteza V_m variază hiperbolic în raport cu raza r.

Mișcarea absolută neperturbată de prezența paletelor rotorului este o mișcare rotațională deoarece componenta tangențială a vîrtejului η este diferită de zero

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = -\frac{C}{r} < 0$$

și variază hiperbolic în raport cu raza r.

O soluție a problemei studiate se poate obține considerînd funcția ψ de forma

$$\psi = C(r^2 + z^2)^n, \tag{6}$$

în acest caz pe conul $\varphi = \varphi_f$ vitezele V_r și V_z sînt funcții de r și z (rezultatele se prezintă în altă lucrare).

3. CALCULUL SCHELETULUI PALETEI

Pentru determinarea expresiei funcției care reprezintă scheletul paletei trebuie să se integreze sistemul de ecuații diferențiale care descrie mișcarea fluidului în rotor [8]. Pentru a evita dificultățile de integrare a acestor ecuații se poate utiliza procedeul mai puțin riguros al deducerii

expresiei $\theta = \theta(r, z)$ a scheletului paletei integrînd ecuaţia diferenţială a liniei de curent în mişcare relativă folosind relaţiile dintre vitezele V_m şi W_m, respectiv între V_u, W_u şi U

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{rV_u - \omega r^2}{r^2 V_m}, \tag{7}$$

unde ω este viteza unghiulară a rotorului, iar ds este elementul de arc pe sferă, într-un plan meridian.

Variaţia cuplului hidraulic în zona paletajului rotoric se efectuează după legea

$$rV_u = h(\varphi) = r_1 V_{u1} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1}\left[B\frac{\varphi - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} - (B-1)\left(\frac{\varphi - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\right)^2\right], \tag{8}$$

unde

$$B = 4(0{,}5 + f)\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_m} - 1, \tag{9}$$

şi

$$\varphi_m = (\varphi_1 + \varphi_2)/2. \tag{9'}$$

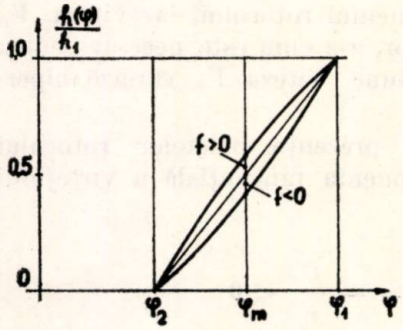


Fig. 2

Parametrul f este indicat în figura 2.

Variaţia cuplului hidraulic rV_u pe muchia de intrare a paletei rotorului se va admite liniară în funcţie de raza r, crescînd de la butuc spre exterior, ca la turbinele axiale.

Ţinînd seamă de expresia (8) şi deoarece

$$r = R \sin \varphi; \quad z = R \cos \varphi,$$

integrînd ecuaţia (7) rezultă

$$\theta = \frac{\chi h_1(\varphi_1 - \varphi_2)}{12\,CR \sin \varphi_1}\left[2(B-1)\left(\frac{\varphi - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\right)^3 - 3B\left(\frac{\varphi - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\right)^2 + B + 2\right] -$$

$$- \frac{\omega R}{2C}(\cos \varphi - \cos \varphi_1).$$

În această relaţie χ reprezintă coeficientul mediu de contracţie corespunzător liniei de curent respective.

Unghiul la centru total, θ_t, într-un plan paralel, se obţine pentru $\varphi = \varphi_2$, deci pentru un punct de pe muchia de ieşire a paletei:

$$\theta_t = \theta(\varphi_2) = \frac{\chi\, h_1(\varphi_1 - \varphi_2)(2 + B)}{12CR \sin \varphi_1} - \frac{\chi\, \omega R}{2C}(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1). \tag{11}$$

Dacă se dau valorile pentru θ_t, h_1, φ_1, φ_2, R, C, χ și ω din relațiile (9) și (11) se poate deduce valoarea parametrului f.

$$f = \frac{\sin \varphi_m}{4 \sin \varphi_1} \left\{ \frac{12\, CR\chi \sin \varphi_1}{h_1 (\varphi_1 - \varphi_2)} \left[\theta_t + \frac{\omega R}{2C} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \right] - 1 \right\} - 0{,}5. \tag{12}$$

Cu ajutorul relației (10) se poate reprezenta proiecția într-un plan paralel (fig. 3) a curbei de intersecție a scheletului paletei cu sferele de rază $R_i \leqslant R \leqslant R_e$.

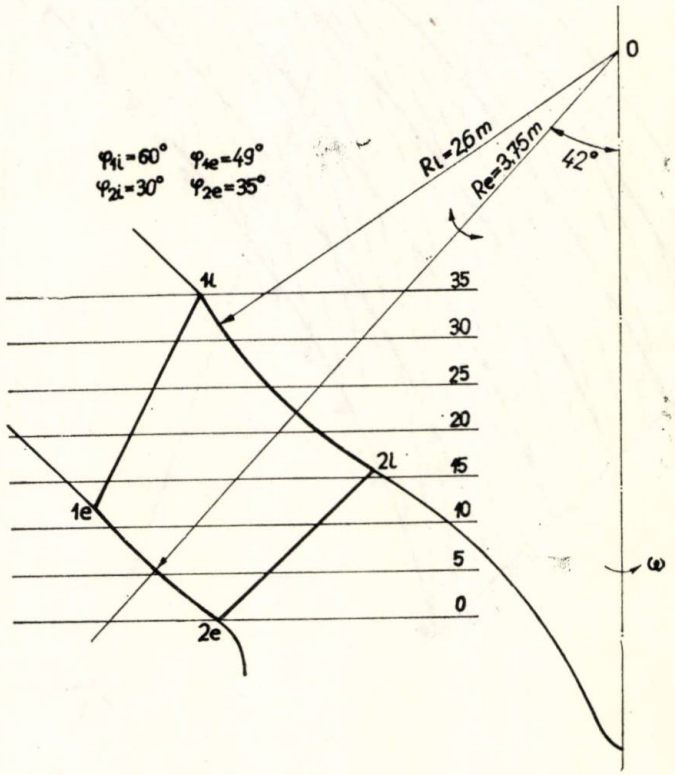


Fig. 3

Alegînd proiecția în plan meridian a muchiilor de intrare și de ieșire a paletei, legea $r_1 V_{u1} = f(r, z)$ precum și unghiul total θ_t, scheletul acesteia este complet determinat.

Alegînd grosimea relativă maximă precum și legea de variație a grosimii profilelor în diferite secțiuni de intersecție a paletei cu sfere de rază variabilă R se poate determina complet paletajul rotorului Dériaz în mod analog ca la proiectarea rotorului Francis.

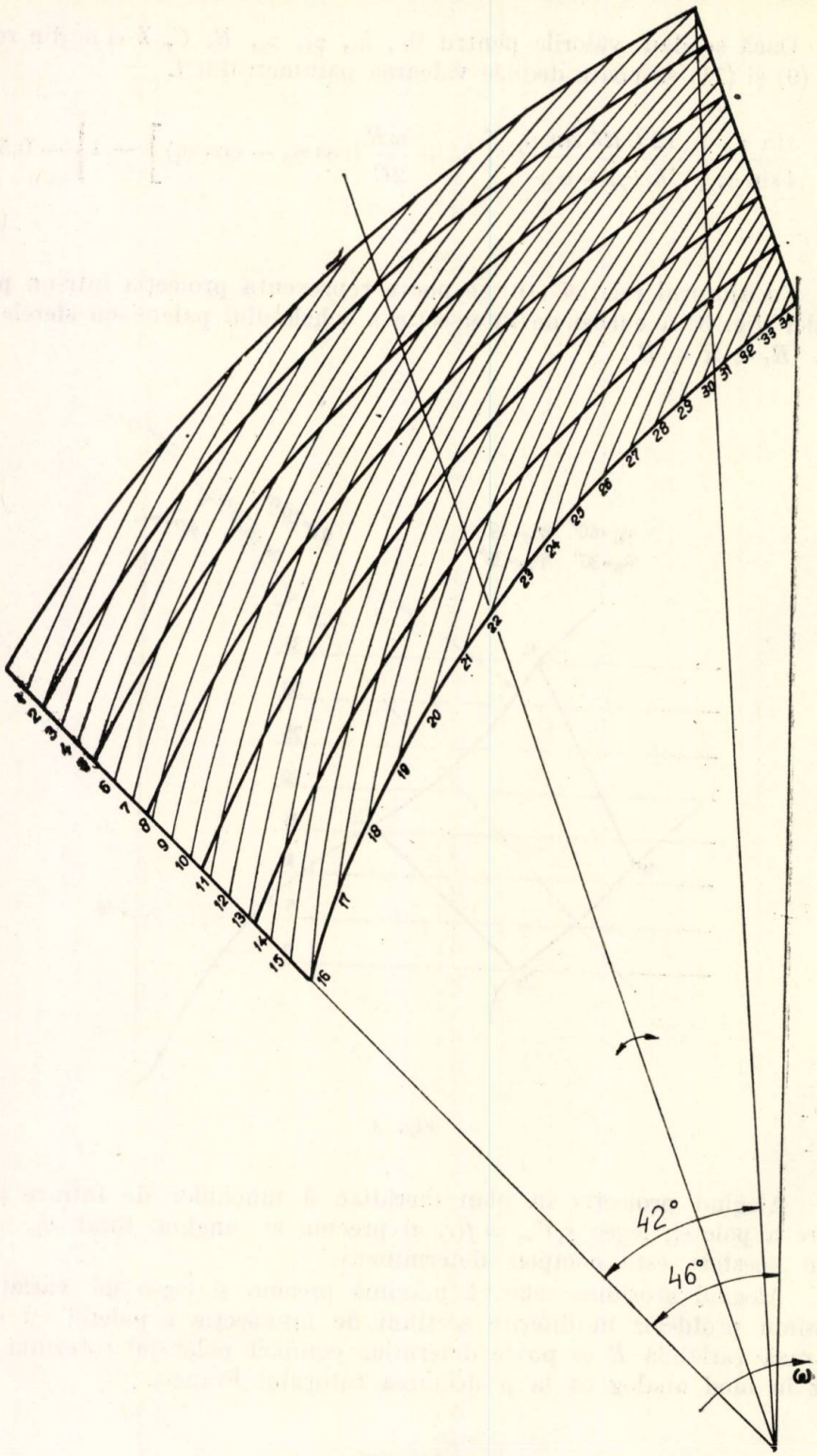


Fig. 4

O soluție simplă a acestei probleme se obține exprimînd grosimea σ a profilului situat pe sferă (fig. 5) în funcție de unghiul φ, de exemplu prin relația:

$$\sigma(\varphi) = a_3\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0. \tag{13}$$

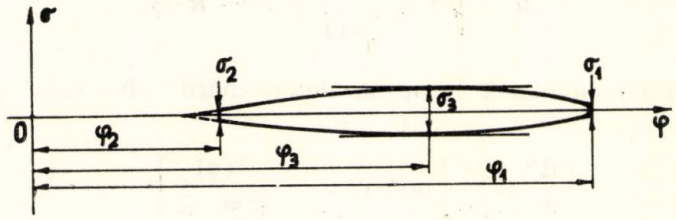


Fig. 5

Coeficienții $a_0 \ldots a_3$ se determină impunînd valorile σ_1, σ_2, (fig. 6), grosimea maximă σ_3 și unghiul φ_3 corespunzător acesteia:

$$a_3 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{b_3c_2 - b_2c_3}; \quad a_2\frac{b_3c_1 - b_1c_3}{b_3c_2 - b_2c_1}, \tag{14}$$

$$a_1 = -3\varphi_3^2a_3 - 2\varphi_3a_2; \quad a_0 = -\varphi_1^3a_3 - \varphi_1^2a_2 - \varphi_1a_1 + \sigma_1,$$

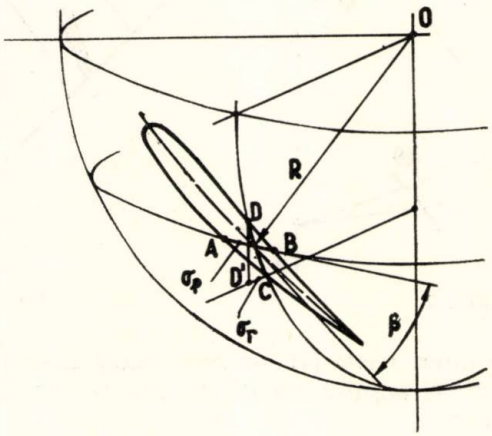


Fig.6

unde

$$b_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varphi_1 - \varphi_2}; \quad b_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3; \quad b_3 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 3\varphi_3^2 + \varphi_1\varphi_2 \tag{15}$$

$$c_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varphi_1 - \varphi_3}; \quad c_2 = \varphi_1 - \varphi_3; \quad c_3 = \varphi_1^2 - 2\varphi_3^2 + \varphi_1\varphi_3.$$

Lungimile segmentelor σ_p și σ_r necesare trasării curbelor topografice ale paletei rezultă din relațiile:

$$\sigma_p = \sigma/\sin\beta, \quad \sigma_r = \sigma\cos\varphi/\cos\beta \quad \text{(fig. 8)}.$$

Forma desfăşurată aproximativă a profilului se obţine determinînd şi funcţia $l(\varphi)$, l fiind abscisa curbilinie a scheletului profilului. Deoarece acesta este situat pe o sferă (fig. 6, 7)

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 \sin^2 \varphi} \cdot R\, d\varphi, \tag{16}$$

funcţia $\frac{d\theta}{d\varphi}$ fiind precizată în urma determinării scheletului paletei:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\chi}{2C}\left[\omega R \sin \varphi - \frac{h(\varphi)}{R \sin \varphi}\right]. \tag{17}$$

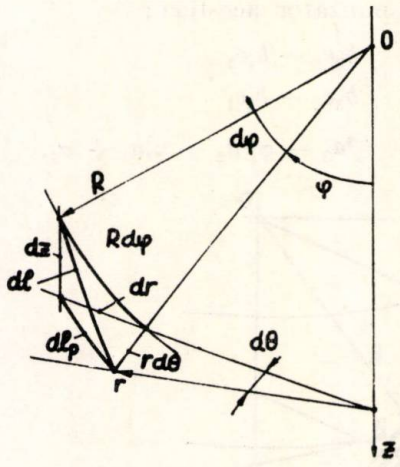


Fig. 7

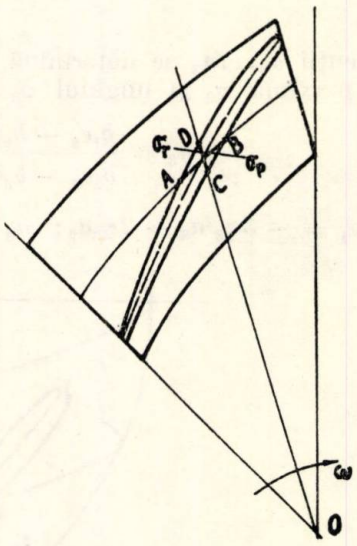


Fig. 8

Integrarea ecuaţiei diferenţiale (16) se efectuează numeric. Variaţia mărimilor σ_3 şi φ_3 poate fi admisă liniară în funcţie de raza sferei pe care este situat profilul:

$$\sigma_3(R) = R_i - (\sigma_i - \sigma_e) \cdot \frac{R - R_i}{R_e - R_i}, \tag{18}$$

$$\varphi_3(R) = \varphi_{3i} - (\varphi_{3i} - \varphi_{3e}) \cdot \frac{R - R_i}{R_e - R_i}, \tag{19}$$

4. DIMENSIONAREA ROTORULUI DIAGONAL

Pentru a determina valorile razelor R_i şi R_e se utilizează mărimile date prin tema de proiectare (Q, H), ecuaţia fundamentală a turbinelor hidraulice, relaţiile metrice în triunghiul de viteze la intrarea în rotor,

limitarea vitezei meridiane la ieşirea din rotor pentru evitarea cavitaţiei şi alegerea valorii unghiului β_1 astfel încît să se asigure o deviaţie normală a profilului la butuc.

Valoarea maximă a vitezei meridiane, în ipoteza admisă în lucrare pentru curentul neperturbat, este în punctul $2i$ de pe butuc, la ieşirea din rotor

$$V_{mmax} = V_{2i} = \frac{2C}{\sin \varphi_{2i}}. \tag{20}$$

Limitînd $V_{mmax} \leqslant 12$ m/s, pentru a se evita apariţia cavitaţiei şi alegînd unghiul φ_{2i} în intervalul $25° \leqslant \varphi_{2i} \leqslant 35°$ (în funcţie de n_s, limita inferioară corespunzînd la n_s mici), rezultă $C = \frac{V_{mmax} \cdot \sin \varphi_{2i}}{2}$, respectiv $C_{max} = \frac{12 \sin 35°}{2} = 3{,}5$ m/s. Notînd $R_e/R_i = K$, debitul se poate scrie sub forma:

$$Q = 2CR_i^2 \ (K^2 - 1). \tag{21}$$

În ipoteza că $V_{u2} = 0$, din ecuaţia fundamentală scrisă pentru butuc rezultă

$$U_{1i} \cdot V_{u1i} = gH\eta_h. \tag{22}$$

Din triunghiul de viteze, în acelaşi punct al paletei avem

$$U_{1i} - V_{u1i} = V_{m1i} \operatorname{ctg} \beta_{1i}, \tag{23}$$

unde

$$V_{m1i} = 2C/\sin \varphi_{1i}. \tag{24}$$

Alegînd unghiurile $\beta_{1i} = \beta_{max}$ şi φ_{1i} între limitele $50° \leqslant \beta_{1i} \leqslant 70°$;

$$\varphi_{1i} = \varphi_{2i} + 25° \ldots 35° \tag{25}$$

se pot calcula valorile mărimilor V_{u1i} şi U_{1i},

$$V_{u1i} = \frac{-V_{m1i} \operatorname{ctg} \beta_{1i}}{2} + \sqrt{gH\eta_h + \frac{V_{m1i} \operatorname{ctg} \beta_{1i}}{4}}, \tag{26}$$

$$U_{1i} = V_{u1i} + V_{m1i} \cdot \operatorname{ctg} \beta_{1i}. \tag{27}$$

Alegînd turaţia astfel ca să fie o turaţie de sincronism, iar $n_s < n_{scr}$, rezultă viteza unghiulară ω şi se pot calcula mărimile r_{1i} şi R_i

$$r_{1i} = U_{1i}/\omega; \quad R_i = r_{1i}/\sin \varphi_{1i}. \tag{28}$$

Din relaţia (21) rezultă

$$R_e = \sqrt{R_i^2 + \frac{Q}{2\pi C}}, \tag{29}$$

deci se pot calcula efectiv valorile razelor R_i şi R_e.

5. EXEMPLU DE CALCUL

Metoda expusă în lucrare a fost aplicată pentru calculul paletajului rotoric al unei turbine Dériaz avînd următorii parametri: $H = 58$m; $P = 78700$ C.P.; $Q = 115$ m3/s.

Pentru mărimile principale au rezultat următoarele valori: $n = 100$ rot/min; $R_i = 2{,}6$ m, $R_e = 3{,}75$ m; $\varphi_{1i} = 60°$, $\varphi_{1e} = 49°$; $\varphi_{2i} = 30°$; $\varphi_{2e} = 35°$; $\theta_{ti} = 46°$; $\theta_{te} = 42°$.

Proiecţiile teoretice ale paletei în planul meridian respectiv în planul paralel sînt arătate în figurile 3 şi 4, iar curbele topografice ale paletei sînt prezentate în figura 9.

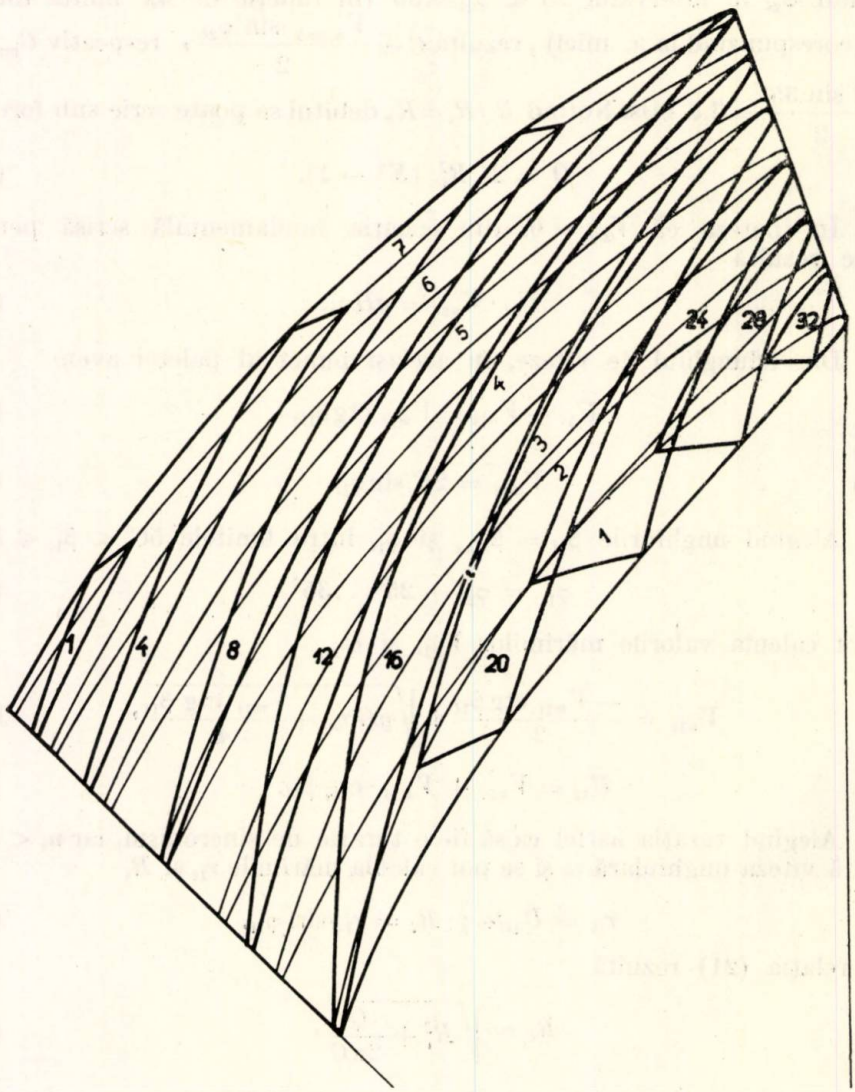


Fig. 9

Scheletul paletei face parte dintr-o suprafață riglată avînd aproximativ aspectul unui con. Axa de rotire a paletei aparține scheletului acesteia.

Primită la redacție la 25 decembrie 1974.

BIBLIOGRAFIE

1. P. DÉRIAZ, *La turbine-pompe à pas variable*, Bulletin technique de la Suisse Romande *21—22* (1955).
2. V. S. KVIATKOVSKII, *Dve novîh sistemî reaktivnîh povorotnolopastnîh turbin*, Ghidrotehniceskoe straitelstvo, *11* (1957).
3. P. DÉRIAZ, I. G. WARNOK, *Reversible Pump-Turbines for Sir Adam Beck, Niagara Pumping-Generating Station*, Trans. ASME, J. of Basic Engeneering, Paper No. 58-A-108, (1958).
4. P. DÉRIAZ, *The Mixed-Fow Variable Pitch Pump Turbine*, Water Power, 2 (1960).
5. WARNOCK, I. G., *Ten years of developement of the Dériaz turbine*, Engl. Electr. I., **18**, 6, (1963).
6. V. S. KVIATKOVSKII, *Diagonalnî ghidroturbinî*, Mașinostrenie, Moscova, 1971.
7. ȘT. ZAREA, *Contribuții la teoria mișcării elicoidale a fluidelor*, Teză de doctorat, București, 1960.
8. ȘT. ZAREA, N. VASILIU, G. TISON, *Nouvelle méthode pour tracer l'aubage d'une roue Francis*, Revue C. Tijdschrift, 2 (1973).

Tovarăşului profesor GHEORGHE MANEA
omagiu cordial

O GENERALIZARE A ECUAŢIEI LUI BUCKLEY ŞI LEVERETT

de C. COZMA

Institutul agronomic Bucureşti

În lucrare se deduce o ecuaţie de un tip special pentru fenomenul dezlocuirii nemiscibile a unui fluid de către altul într-un mediu poros omogen. Mişcarea este presupusă bidimensională şi se ţine seama de efectul forţelor de capilaritate. După scrierea condiţiilor la limită se indică o modalitate de rezolvare a ecuaţiei şi se fac consideraţii asupra unor cazuri particulare. În final, se arată că ecuaţia găsită este o generalizare a ecuaţiei lui Buckley şi Leverett deoarece se reduce la aceasta dacă mişcarea este unidimensională.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat problema dezlocuirii unui fluid de către altul în ipoteza nemiscibilităţii lor. Mişcarea a fost presupusă plană, negravitaţională dar s-a ţinut seama de efectul forţelor capilare. Problema fizică a fost redusă la rezolvarea unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale pentru care soluţia a fost obţinută printr-un procedeu de aproximaţii succesive.

Cu toată importanţa problemei, cazurile bidimensionale şi tridimensionale au făcut obiectul unui număr restrîns de studii în care s-au dat în special rezolvări prin metode numerice pentru cazuri particulare. Dificultatea principală rămîne rezolvarea ecuaţiilor la care conduce problema fizică chiar în absenţa capilarităţii. De aceea, majoritatea soluţiilor s-au obţinut introducînd unele ipoteze simplificatoare [2], [3].

Scopul acestei lucrări este de a arăta o modalitate de rezolvare a problemei în condiţii fizice similare cu cele din [1], ideea de bază constînd în a reduce sistemul de relaţii la o singură ecuaţie şi a încerca rezolvarea acesteia. După cum se va observa, metoda conduce la o ecuaţie de un tip special a cărei rezolvare exactă prezintă dificultăţi majore. Totuşi, ea are meritul de a elimina procedeul de aproximaţii succesive în raport cu timpul, pentru care nu dispunem de o fundamentare teoretică care să permită evaluarea erorilor introduse.

Notaţiile şi expunerea generală a problemei sînt cele din [1] şi nu vor mai fi reluate aici. Mediul poros va fi presupus omogen şi se va ţine seama de modificarea corespunzătoare a relaţiilor.

2. ECUAȚIA FENOMENULUI

Pornim de la relația (7) din [1] care, cu notația:

$$A(S) = \frac{K_{ra}}{\mu_a} + \frac{K_{rt}}{\mu_t} \tag{1}$$

devine

$$\nabla S \cdot \nabla p_a = \frac{\left[\frac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S)\right]'}{A'(S)} (\nabla S)^2 + \frac{\frac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S)}{A'(S)} \Delta S - \frac{\alpha(S)}{A'(S)} \Delta P_a. \tag{2}$$

Din sistemul fundamental (relațiile (1) — (6) din [1]) se deduce egalitatea,

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{K}{m}\left(\frac{K_{ra}}{\mu_a}\right) \nabla S \nabla p_a - \frac{K}{m} \cdot \frac{K_{ra}}{\mu_a} \Delta p_a = 0, \tag{3}$$

care, dacă ținem seama de (2), ia forma:

$$\frac{m}{K} \frac{\partial S}{\partial T} - \left(\frac{K_{ra}}{\mu_a}\right)' \frac{\nabla\left[\frac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S) \cdot \nabla S\right]}{A'(S)} = \frac{\frac{K_{ra}}{\mu_a} \cdot \frac{K_{rt}'}{\mu_t} - \frac{K_{ra}'}{\mu_a} \cdot \frac{K_{rt}}{\mu_t}}{A'(S)} \Delta p_a. \tag{4}$$

Pentru a simplifica scrierea relațiilor ulterioare introducem operatorul:

$$L[S] = \frac{m}{K} \frac{\alpha'(S)}{\frac{K_{ra}}{\mu_a} \cdot \frac{K_{rt}'}{\mu_t} - \frac{K_{rt}}{\mu_t} \cdot \frac{K_{ra}'}{\mu_a}} \frac{\partial S}{\partial T} -$$

$$- \frac{\frac{K_{ra}'}{\mu_a}}{\frac{K_{ra}}{\mu_a} \cdot \frac{K_{rt}'}{\mu_t} - \frac{K_{rt}}{\mu_t} \frac{K_{ra}'}{\mu_a}} \nabla\left[\frac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S) \cdot \nabla S\right]$$

astfel că ecuația (4) devine

$$p_a = L[S]. \tag{5}$$

Pe de altă parte, din (2) și (4), eliminînd termenul care conține pe Δp_a, deducem relația,

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{K}{m} \frac{\dfrac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S) \left[\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} \cdot \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}\right]'}{\dfrac{1}{2}[A^2(S)]'} \Delta S + \frac{K}{m} \frac{\left[\dfrac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S)\right]' \left[\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}\right]'}{\dfrac{1}{2}[A^2(S)]'} (\nabla S)^2 +$$

$$+ \frac{K}{m} \frac{\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} \dfrac{K_{rt}'}{\mu_t} - \dfrac{K_{ra}'}{\mu_a} \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}}{A(S)} \nabla p_a \nabla S = 0. \tag{6}$$

Ecuațiile (5) și (6) formează un sistem pentru funcțiile necunoscute $p_a(x, y, T)$ și $S(x, y, T)$, echivalent cu (9) din [1] în ipoteza omogenității mediului. Vom arăta, că deoarece p_a intervine în (6) numai prin intermediul derivatelor ei de ordinul întîi, este posibil să o eliminăm cu ajutorul relației (5).

Cu notația:

$$W(z, T) = u(x, y, T) + iv(x, y, T) = \frac{\partial p_a}{\partial x} - i \frac{\partial p_a}{\partial y} = 2 \frac{\partial p_a}{\partial z},$$

se deduce imediat egalitatea,

$$\Delta p_a = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{z}}, \tag{7}$$

justificată de faptul că

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Evident, $W(z, T)$ nu este o funcție olomorfă; ea este o funcție cu valori complexe, definită în fiecare punct al domeniului D (domeniul de mișcare) unde are derivate parțiale continue. Adoptînd ipoteza că forțele capilare vor împiedica apariția multiformității pentru funcția $S(x,y, T)$ putem presupune că $L[S]$ este o funcție continuă de punct în D. Cu aceasta, datorită relațiilor (5) și (7) deducem egalitatea:

$$W(z, T) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D L[S(\xi, \eta, T)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} + \varphi(z, T) \tag{8}$$

($\zeta = \xi + i\eta$), [4], [5]. Funcția $\varphi(z, T)$ este olomorfă în raport cu z în D, iar modul în care ea poate fi determinată va fi arătat mai jos. Trebuie remarcat însă că, în cazul cînd în domeniul de mișcare există sonde de

injecție sau de extracție, $\varphi(z, T)$ are singularități în aceste puncte. Într-adevăr, ținînd seama de relațiile care leagă pe $W(z, T)$ de $\frac{\partial p_a}{\partial z}$ și de (8) rezultă că discontinuitățile derivatelor parțiale ale presiunii trebuie regăsite în $\varphi(z, T)$ deoarece termenul integral din (8) este o funcție continuă în D.

Datorită relațiilor scrise deducem,

$$\nabla p_a = \frac{\partial p_a}{\partial x} i + \frac{\partial p_a}{\partial y} j = \mathrm{Re} W \cdot i - \mathrm{Im}\, W \cdot j, \tag{9}$$

pe care o vom folosi împreună cu (8) în (6). Se obține:

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{K}{m} \frac{\frac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S) \left[\frac{K_{ra}}{\mu_a} \cdot \frac{K_{rt}}{\mu_t}\right]'}{\frac{1}{2}[A^2(S)]'} \Delta S + \frac{K}{m} \frac{\left[\frac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S)\right]' \left[\frac{K_{ra}}{\mu_a} \frac{K_{rt}}{\mu_t}\right]'}{\frac{1}{2}[A^2(S)]'} (\nabla S)^2 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{K}{m} \frac{B(S)}{A(S)} \left\{ \left[\mathrm{Re} \iint_D \frac{L[S(\xi, \eta, T)]}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \varphi(z, T) \right] \frac{\partial S}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \left[\mathrm{Im} \iint_D \frac{L[S(\xi, \eta, T)]}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \varphi(z, T) \right] \frac{\partial S}{\partial y} \right\} = 0, \tag{10}$$

care este ecuația funcțională la care ne-am referit anterior. Dificultățile de rezolvare a ecuației (10), în ipoteza cunoașterii saturației la momentul inițial, sînt evidente. Ele se datorează nu numai caracterului neliniar ci și al prezenței funcției necunoscute sub semnul integrală.

Observație. Am făcut mai sus afirmația că $L[S]$ este o funcție continuă de punct. Într-adevăr, expresia,

$$B(S) = \frac{K_{ra}}{\mu_a} \frac{K'_{rt}}{\mu_t} - \frac{K'_{ra}}{\mu_a} \frac{K_{rt}}{\mu_t}$$

nu se anulează pentru nici o valoare a lui S, fapt care decurge din forma curbelor experimentale $K_{ra}(S)$ și $K_{rt}(S)$.

CONDIȚIILE LA LIMITĂ

După cum am remarcat, funcția $\varphi(z, T)$ este arbitrară în (10). Aparița ei cu acest caracter nu surprinde deoarece și în cadrul metodei prezentate în [1] a avut loc o situație asemănătoare. Mai mult, pentru rezolvarea problemei dispunem de anumite condiții la limită pentru presiune

care își pierd sensul cu ecuația (10) și dacă funcția $\varphi(z, T)$ nu ar apare, ele ar rămîne fără obiect în cadrul determinării soluției.

Funcția $S(x, y, T)$ trebuie să aparțină clasei $C^{2,1}$ și este definită într-un domeniu tridimensional Ω din spațiul (x, y, T). Prin $\bar{\Omega}$ vom înțelege închiderea lui Ω, iar frontiera lui este compusă din D pentru $T = 0$ și din suprafața Γ : $(x, y) \in L$, $0 \leqslant T \leqslant \infty$.

Ecuația (10) este studiată în [6] într-un caz particular cînd integralele sînt funcții cunoscute de x, y, S, $\frac{\partial S}{\partial x}$ și $\frac{\partial S}{\partial y}$. Pentru ecuațiile de acest tip (parabolic, cvasiliniare) se arată că pentru existența soluției sînt necesare condiții asupra lui S pe frontiera cilindrului Ω. De aceea, vom presupune că pentru ecuația (10) cunoaștem saturația la momentul inițial, dar și valoarea ei în timp în orice punct de pe Γ. Prin urmare, condițiile pentru ecuația (10) vor fi :

$$S = S\ (x, y, 0) = S_0(x, y), \quad (x, y,) \in D,$$

$$S = S(\sigma, T), \quad (\sigma \in L, \quad 0 \leqslant T < \infty), \tag{11}$$

cele două funcții satisfăcînd egalitatea :

$$S_0(\sigma) = S(\sigma, 0).$$

Revenind la determinarea funcției $\varphi\ (z, T)$ notăm :

$$C(z, T) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{L[S]}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta,$$

de unde, datorită relației (8) deducem :

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \Delta p_a,$$

$$W(z, T) = 2 \frac{\partial p_a}{\partial z} = C(z, T) + \varphi(z, T). \tag{12}$$

Cunoscînd pe frontierele de alimentare $p_a(s, T)$ se deduce imediat

$$\frac{\partial p_a}{\partial s} = \mathrm{Re}\ [W(t, T)\ z'(s)],$$

unde t reprezintă afixa punctului de abscisă curbilinie s. Ținînd seama că

$$\mathrm{Re}\ [W(t, T)\ z'(s)] = \mathrm{Re}\ [A(t, T)\ z'(s)] + \mathrm{Re}\ [\varphi(t, T)\ z'(s)]$$

și introducînd notația,

$$\varphi(z, T) = \varphi_1(x, y, T) + \mathrm{i}\varphi_2\ (x, y, T),$$

relaţia pe care o va satisface $\varphi(z, T)$ pe frontierele de alimentare este:

$$\varphi_1 \cdot x'(s) - \varphi_2 y'(s) = \frac{\partial p_a}{\partial s} - \mathrm{Re}\,[A(t, T)z'(s)]. \tag{13}$$

Într-un mod asemănător se deduce o condiţie pentru porţiunile impermeabile ale frontierei. Prin anularea derivatei normale a presiunii găsim,

$$\frac{\partial p_a}{\partial n} = -\,\mathrm{Im}\,[W(t, T)\,\overline{z'(s)}] = 0,$$

care datorită lui (12) devine

$$\mathrm{Im}\,[W(t, T)\,\overline{z'(s)} = \mathrm{Im}\,[A(t, T)\overline{z'(s)}] + \mathrm{Im}\,[\varphi(t, T)\,\overline{z'(s)}] = 0.$$

Deci, pe porţiunile impermeabile ale lui L, $\varphi(z, T)$ va satisface condiţia

$$\varphi_1 \cdot y'(s) - \varphi_2 \cdot x'(s) = -\,\mathrm{Im}\,[A\ (t,\ T)\,\overline{z'(s)}]. \tag{14}$$

Sintetizînd cele de mai sus rezultă că determinarea funcţiei olomorfe $\varphi(z, T)$ se reduce la rezolvarea unei probleme la limită de tip Hilbert de forma

$$m(s) \cdot \varphi_1 - n(s)\,\varphi_2 = q(s), \tag{15}$$

în care coeficienţii sînt discontinui pe L şi au expresiile:

$$m(s) = \begin{cases} x'(s), & s \in \widehat{BC} \cup \widehat{DA} \\ y'(s), & s \in \widehat{AB} \cup \widehat{CD} \end{cases}$$

$$n(s) = \begin{cases} y'(s), & s \in \widehat{BC} \cup \widehat{DA} \\ x'(s), & s \in \widehat{AB} \cup \widehat{CD} \end{cases}$$

$$q(s) = \begin{cases} \dfrac{\partial p_a}{\partial s} - \mathrm{Re}[A(t, T)\,z'(s)], & s \in \widehat{BC} \cup \widehat{DA} \\ -\,\mathrm{Im}\,[A(t, T) \cdot \overline{z'(s)}], & s \in \widehat{AB} \cup \widehat{CD}. \end{cases}$$

În relaţiile (16), $\widehat{BC} \cup \widehat{DA}$ reprezintă frontiera de alimentare, iar $\widehat{AB} \cup \widehat{CD}$ frontiera impermeabilă.

După cum se remarcă din expresia lui $q(s)$ în (16) funcţia $\varphi(z, T)$ nu poate fi determinată numai din condiţiile la limită pentru presiune. În relaţia pentru acest coeficient intră funcţia $A(t, T)$ în care intervine

saturația și deci la rezolvarea problemei lui Hilbert trebuie să se țină seama și de condițiile (11). Vom reveni asupra găsirii acestei funcții cînd vom expune procedeul de rezolvare a problemei.

O situație mai simplă are loc cînd mișcarea se desfășoară în tot planul, determinată de un sistem de sonde de injecție și extracție. În acest caz domeniul nu are frontiere și funcția $\varphi(z, T)$ se determină prin singularitățile care se impun în sonde. Pentru a nu complica expunerea să considerăm o singură sondă situată în punctul de afixă z_0, de debit Q, extensia la cazul unui sistem arbitrar ca cel considerat în [7] făcîndu-se fără nici o dificultate. Se verifică imediat că în acest caz $\varphi(z, T)$ are expresia

$$\varphi(z, T) = \frac{\alpha(T)}{z - z_0},$$

deoarece în cazul unui singur fluid termenul integral din (8) este nul, $W(z, T)$ fiind olomorfă și reprezentînd potențialul complex al vitezelor iar mărimea $\alpha(T)$ se determină folosind debitul.

Așadar, în cazul mișcării în tot planul problema se reduce la determinarea soluției ecuației (10(, în locul funcției $\varphi(z, T)$ utilizîndu-se o expresie ce derivă din (17) prin extensie la toate sondele de injecție și extracție.

În situația cînd mișcarea are loc într-un domeniu mărginit de pereți impermeabili în prezența unor sonde, în funcția $\varphi(z, T)$ va apare și o parte regulată asupra căreia se va transpune problema lui Hilbert (15). În acest caz partea principală calculată pe frontieră va apare în $q(s)$. De aceea, excludem cazul cînd există sonde punctiforme situate pe frontiera impermeabilă, problema de tip Hilbert complicîndu-se considerabil.

4. REZOLVAREA ECUAȚIEI

Este desigur evident că ecuația (10) nu poate fi rezolvată exact. Dealtfel acest lucru nu este posibil nici pentru forme mai simple ale ei (absența unor termeni, cazul unidimensional etc.). În consecință propunem un procedeu prin aproximații succesive care să permită evaluarea saturației ca funcție de punct și de timp.

Alegem în clasa $C^{2,1}$ o funcție care satisface condițiile (11),

$$S = S^0(x, y, T),$$

cu care calculăm operatorul $L(S)$. Acesta devine:

$$L(S^0(x, y, T)] = L^0(x, y, T),$$

adică vom cunoaște funcția continuă în D și pe L,

$$C^0(z, T) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{L^0(\xi, \eta, T)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

În aceste condiții toți coeficienții din (15) sînt cunoscuți și se va putea determina soluția unică a problemei lui Hilbert pe care o vom nota cu $\varphi^0(z, T)$. Cu acestea, ecuația (10) devine:

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{K}{m} \frac{\dfrac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S) \left[\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} \cdot \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}\right]'}{\dfrac{1}{2}[A^2(S)]'} \Delta S + \frac{\left[\dfrac{K_{rt}}{\mu_t} P_c'(S)\right]' \left[\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}\right]'}{\dfrac{1}{2}[A^2(S)]'} (\nabla S)^2 + \tag{18}$$

$$+ \frac{K}{m} \frac{B(S)}{A(S)} \left[F^0(x, y, T) \frac{\partial S}{\partial x} - G^0(x, y, T) \frac{\partial S}{\partial y}\right] = 0,$$

care se încadrează în tipul studiat în [6]. Funcțiile nou introduse au expresiile:

$$F^0(x, y, T) = \text{Re}\ \{C^0(z, T) + \varphi^0(z, T)\}, \tag{19}$$

$$G^0(x, y, T) = \text{Im}\ \{C^0(z, T) + \varphi^0(z, T)\}.$$

Un studiu amănunțit al ecuației (18) este dat în [6] ținîndu-se seama și de eventualele discontinuități ale coeficientilor și stabilindu-se existența și unicitatea soluției și apartenența ei la clasa $C^{2,1}$ cînd coeficienții satisfac anumite condiții destul de generale. Soluția ecuației (18) va fi notată cu $S^1(x, y, T)$ și va satisface condițiile (11).

Cu aceasta vom relua rezolvarea problemei într-un mod asemănător cu cel expus mai sus și vom deduce funcțiile corespunzătoare $L^1(x, y, T)$, $C^1(x, y, T)$, $\varphi^1(x, y, T)$ după care se scrie din nou o ecuație de forma (18) cu coeficienții $F^1(x, y, T)$ și $G^1(x, y, T)$ dați de relații similare cu (19). Aplicarea acestui procedeu ne conduce la șirul de funcții:

$$S^0(x, y, T), S^1(x, y, T), \ldots\ldots, S^n(x, y, T), \ldots \tag{20}$$

($S^i(x, y, T) \in C^{2,1}$). Principala problemă care se pune este aceea a convergenței șirului (20) și a faptului că limita lui satisface ecuația (10) și condițiile (11). Această chestiune necesită un studiu special.

Există posibilitatea ca printr-o altă aranjare a termenilor să ajungem la rezolvarea, în cadrul fiecărei iterații, a unei ecuații liniare. Se procedează la fel ca mai sus pînă la înlocuirea în (10), dar în acest caz substituția va fi efectuată în toți termenii care fac ecuația neliniară. Pentru pasul de ordinul k obținem ecuația:

$$\frac{\partial S^k}{\partial T} + H^{k-1}(x, y, T) \frac{\partial S^k}{\partial x} + I^{k-1}(x, y, T) \frac{\partial S^k}{\partial y} + J^{k-1}(x, y, T) = 0, \tag{21}$$

unde coeficienții au expresii evidente. Ecuațiile de forma (21) sînt liniare și se determină prin metodele cunoscute. În plus, prezintă avantajul că rezolvarea lor poate fi programată pentru calculatoarele electronice.

5. O SOLUȚIE APROXIMATIVĂ

Vom da o soluție a problemei de dezlocuire, care ține seama de presiunea capilară, cu ajutorul unei ipoteze simplificatoare.

Se va presupune că :

$$\left[\frac{K_{ra}K_{rt}}{\mu_a\mu_t}\right]' = 0. \tag{22}$$

Din (22) se obține o relație cu care ecuația (10) devine,

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{K}{\pi m}\frac{\frac{K_{ra}}{\mu_a}\frac{K'_{rt}}{\mu_t}}{A(S)}\left\{\mathrm{Re}\left[\iint_D \frac{N[S]}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \varphi(z,\ T)\right]\frac{\partial S}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \mathrm{Im}\left[\iint_D \frac{N[S]}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \varphi(z,\ T)\right]\frac{\partial S}{\partial y}\right\} = 0 \tag{23}$$

cu notația,

$$N[S] = \frac{m}{K}\frac{A'(S)}{2\frac{K_{ra}}{\mu_a}\frac{K_{rt}}{\mu_t}}\frac{\partial S}{\partial T} + \frac{1}{2}\left[\ln\frac{K_{rt}}{\mu_t}\right]' P'_c(S)\,(\nabla S)^2 + \frac{1}{2}\nabla[P'_c(S)\ \nabla S].$$

Ecuația (23) urmează să fie integrată prin aproximații succesive așa cum s-a văzut mai sus, folosind condițiile la limită deja specificate. Ea este, în ipoteza cunoașterii termenilor integrali din aproximația precedentă, neliniară, omogenă și de ordinul întîi. Pentru astfel de ecuații metodele de rezolvare sînt cunoscute și se poate demonstra și convergența procesului de aproximații succesive.

Pentru aproximația de ordinul k ecuația (23) se scrie,

$$\frac{\partial S^k}{\partial T} + f_1(S^k)\cdot F^{k-1}(x,\ y,\ T)\frac{\partial S^k}{\partial x} + f_1(S^k)\,G^{k-1}(x,\ y,\ T)\frac{\partial S^k}{\partial y} = 0, \tag{24}$$

cu caracteristicile,

$$S^k = \text{const.}\,;\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T} = f_1(S^k)\ F^{k-1}(x,\ y,\ T)\,;\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T} = f_1(S^k)\,G^{k-1}(x, y,\ T). \tag{25}$$

Notațiile folosite în (24) nu le scriem explicit, ele fiind clare prin comparație cu (23) și ținînd seama de cele folosite anterior. Problema se reduce deci la rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale de forma (24), ținînd seama și de condiția inițială impusă funcției S^k.

Pentru justificarea ipotezei simplificatoare care a permis trecerea de la (10) la (23) remarcăm că în literatura de specialitate există o relativă varietate a curbelor $K_{ra}(S)$ și $K_{rt}(S)$. Deși aceste curbe păstrează aceeași

formă generală există diferenţe de mărime destul de însemnate de la autor la autor. Pentru a da doar cîteva exemple, în [8] aceste curbe nu există decît în intervalul $0{,}36 \leqslant S \leqslant 0{,}8$ intersecţia lor avînd loc în punctul $(0{,}6\,;\ 0{,}1)$; în [9] curbele acoperă domeniul $0{,}1 \leqslant S \leqslant 0{,}85$ avînd şi curbura diferită de a celor precedente. O mică modificare a curbelor date în [10] arată că pentru $S \in [0{,}3]$, $[0{,}8]$ se poate lua $K_{ra}(S)$. $K_{rt}(S) \approx 0{,}03$ şi se pot da şi alte exemple de curbe care respectă destul de bine condiţia (22).

6. DEDUCEREA ECUAŢIEI LUI BUCKLEY ŞI LEVERETT DIN ECUAŢIA (10)

O aplicaţie imediată a ecuaţiei (10) se obţine pentru cazul cînd se neglijează presiunea capilară, mişcarea fiind unidimensională. În această situaţie din (10) se deduce chiar binecunoscuta ecuaţie a lui Buckley şi Leverett.

În ipotezele de mai sus şi presupunînd că vitezele păstrează în decursul mişcării direcţia axei ox, ecuaţia (10) devine,

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{K}{2\pi m}\frac{B(S)}{A(S)}\operatorname{Re}\left\{\iint_D \frac{L_1[S(x,T)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \varphi(z,T)\right\}\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \qquad (25)$$

în care

$$L_1(S) = \frac{m}{K}\frac{A(S)}{B(S)}\frac{\partial S}{\partial T}.$$

Din relaţiile (5) şi (7) deducem (cu simplificările pentru cazul ales)

$$L_1(S) = 2\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = 2\frac{\partial W}{\partial x},$$

pe care o vom folosi în (25). Pentru aceasta să găsim valoarea integralei

$$I = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\}.$$

Presupunem că mişcarea are loc în domeniul $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$ şi deci,

$$I = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\partial W}{\partial \xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\eta}{\zeta - z}\right\},$$

sau, după transformări elementare,

$$I = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b \frac{\partial W}{\partial \xi}\int_{\xi=\text{const}}\frac{\partial \zeta}{\zeta - z}\right\}.$$

Este cunoscut că

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\xi=\text{const.}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}=\begin{cases}-1 \text{ dacă } \xi < x,\\ 1 \text{ dacă } \xi > x,\end{cases}$$

astfel că relația precedentă devine

$$I = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_a^x \frac{\partial W}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_x^b \frac{\partial W}{\partial \xi}\,d\xi =$$

$$= \mathrm{Re}\left[-W(x) + \frac{W(a) + W(b)}{2}\right]$$

În acest caz $p_a = p_t = p$ și din definiția lui $W(z)$ rezultă,

$$\mathrm{Re}\, W(x) = \frac{\partial p}{\partial x},$$

sau folosind legea lui Darcy, deducem

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{Q}{\sigma k}\,\frac{1}{\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} + \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}},$$

în care Q este debitul total (dependent eventual de timp), iar σ este aria secțiunii transversale a mediului poros. În ceea ce privește funcția $\varphi(z, T)$ rezultă că ea trebuie să fie constantă, deoarece nu se poate concepe o funcție olomorfă care să depindă numai de x. Notăm această constantă prin c.

Dacă ținem seama de relațiile precedente în (10) deducem

$$\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{K}{m}\,\frac{\dfrac{K_{ra}}{\mu_a}\dfrac{K'_{rt}}{\mu_t} - \dfrac{K'_{ra}}{\mu_a}\dfrac{K_{rt}}{\mu_t}}{\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} + \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}}\left\{\frac{Q}{\sigma K}\,\frac{1}{\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} + \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{Re}\,\frac{W(a) + W(b)}{2} + c\right\}\frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Prin alegerea convenabilă a constantei arbitrare și ținînd seama că

$$\frac{d}{dS}\,\frac{1}{1 + \dfrac{K_{ra}}{K_{rt}}\dfrac{\mu_t}{\mu_a}} = -\frac{\dfrac{K_{ra}}{\mu_a}\dfrac{K'_{rt}}{\mu_t} - \dfrac{K'_{ra}}{\mu_a}\dfrac{K_{rt}}{\mu_t}}{\left(\dfrac{K_{ra}}{\mu_a} + \dfrac{K_{rt}}{\mu_t}\right)^2},$$

ecuaţia devine

$$\frac{m\sigma}{Q}\frac{\partial S}{\partial T}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left[\frac{1}{1+\frac{K_{ra}}{K_{rt}}\frac{\mu_t}{\mu_a}}\right]\frac{\partial S}{\partial x}=0, \tag{26}$$

adică ecuaţia lui Buckley şi Leverett (relaţia V—50 din [10]).

Faptul că din (10) s-a putut deduce (26) ne îndreptăţeşte să afirmăm că (10) este o generalizare a ecuaţiei lui Buckley şi Leverett pentru cazul mişcării în două dimensiuni, ţinînd seama şi de presiunea capilară. Ecuaţia (26) este bine studiată în literatura de specialitate. Pentru ea s-au dat mai multe metode de rezolvare şi s-au făcut consideraţii ample asupra caracterului neuniform al soluţiei, contradictoriu cu sensul fizic al saturaţiei. Deşi faţă de (10), (26) este foarte simplificată, ea stă la baza majorităţii studiilor de dezlocuire imiscibilă în medii poroase omogene. Pe o cale asemănătoare se poate obţine şi ecuaţia dezlocuirii unidimensionale cu capilaritate.

Cu rezerva demonstraţiei convergenţei şirului de soluţii, metoda prezentată este exactă. Ea permite mai multe variante care pot fi adoptate în funcţie de mijloacele de calcul de care dispunem. Un avantaj al metodei constă în faptul că poate fi pusă sub formă de algoritm ceea ce duce la unele facilităţi în efectuarea calculelor. În mod suplimentar, rezolvarea problemei prin intermediul ecuaţiei funcţionale permite să se pună în evidenţă unele cazuri particulare, simplificate prin evaluarea diferiţilor termeni. În afară de cele menţionate, metoda este în mai mare măsură legată de rezolvarea tradiţională a problemei.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ionescu, C. Cozma, *Efectul capilarităţii în dezlocuirea bidimensională a fluidelor nemiscibile în medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., *5* (1973).
2. D. W. Peacemann, *Numerical solution of the non-linear equations for two-phase flow through porous media*, Non-linear partial differential Equat. Sympos. Methods, Solution (1967), Esso production Reasearch Company Houston Texas.
3. D. A. Efros, *Issledovaniia filtraţii neodnorodnîh sistem*, Leningrad, 1963.
4. I. N. Vekua, *Obobşcionie analiticeskie funcţii*, Moscova 1959.
5. F. D. Gahov, *Kraevie zadaci*, Moscova, 1963.
6. O. A. Ladîjenskaia, *Lineinie i kvazilineinie uravneniia paraboliceskovo tipa*, Moscova, Nauka, 1967.
7. V. Ionescu, C. Cozma, *Mişcarea fluidului într-un mediu poros omogen determinată de un sistem arbitrar de sonde*, St. cerc. mec. apl., **28**, *5* (1969).
8. C. R. Mc Evan, *A numerical solution of the liniar displacement equation with capillary pressure*, Transactions AIME 216 (1959).
9. J. Douglas Jr., D. W. Peacemann, H. Rachford, Jr., *A method for calculating multidimensional imiscible displacement*, Transactions AIME, 216 (1959).
10. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Ed. Acad. RSR, Bucureşti, 1966.

F 2557

4
TOMUL 34
1975

1976 MAR 12

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil,*

Membri :
Acad. I. ANTON,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. CR. MATEESCU,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. RADU PRIȘCU,
Dr. doc. V. VISARION,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacție.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa la : ILEXIM, Serviciul export-import carte ; Serviciul export-import presă (pentru reviste) P.O. BOX 2001, Calea Griviței nr. 64—66, București, oficiul poștal 12, România. În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 4 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, București

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 34, nr. 4 1975

SUMAR

STUDII

IOAN I. CRĂCIUN, O ecuaţie caracteristică aproximativă stabilită prin metoda grafelor liniare de fluenţă 491

MIHAI BUCULEI, Contribuţii la analiza matriceală cinematică şi dinamică a grupei Assur de clasa a IV-a, ordinul al II-lea 509

RADU AGENT, TUDOR POSTELNICU, VOICU MAGER, EMIL LERNER, Calculul rigidităţilor diafragmelor pline şi cu goluri la clădiri etajate. I 521

CONSTANTIN AMARIEI, Aplicarea metodei matricei de rigiditate pentru analiza comportării elastico-plastice a structurilor 535

DAN COŞA, Studiul stabilităţii generale a barelor comprimate de secţiune compusă cu ajutorul unui model fizic îmbunătăţit 561

Z. I. MANOLACHE, R. I. IATAN, Starea de eforturi unitare în fundul plan al rezervoarelor cilindrice, verticale, rezemate pe mediu elastic 573

IOAN STAN, Efectul barodifuziei în stratul-limită 583

GH. MANEA, M. PASCOVICI, Temperatura ca element indicator funcţional şi al naturii unor procese de curgere în lagărele radiale cu alunecare 595

ION SEBEŞAN, PAUL MAXIM, Asupra unei probleme de aplicare a teoriei funcţiilor aleatorii la sinteza unui aparat de mediere a direcţiei vîntului în timp finit . . . 613

RADU HARET, ŞTEFAN ZAREA, Influenţa vibraţiilor asupra gelurilor de argile spălate cu soluţii saline şi tratate cu apă distilată 621

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

TOMA PANĂ, Teoria liniar-elastică a mecanicii ruperilor. I 625

RECENZII 637

O ECUAȚIE CARACTERISTICĂ APROXIMATIVĂ STABILITĂ PRIN METODA GRAFELOR LINIARE DE FLUENȚĂ

de IOAN I. CRĂCIUN

Institutul de învățămînt superior
Baia Mare

Utilizînd grafele liniare de fluență, în lucrare se stabilește un algoritm pentru dezvoltarea determinantului caracteristic obținut prin metoda deformațiilor, în cadrul unei aproximații, practic admisibile. Aplicarea algoritmului reduce volumul de calcule în comparație cu metodele cunoscute și ușurează programarea calculelor pe mașini electronice.

1. INTRODUCERE. DOMENIUL DE APLICABILITATE A METODEI

Pulsațiile proprii ale oscilațiilor neamortizate, executate de un sistem cu n grade de libertate, se determină în principiu ca rădăcini ale unei ecuații caracteristice [2], [12], de tipul

$$(D)_n = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \quad a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Astfel, de exemplu, aplicînd metoda ecuațiilor lui Lagrange, cu notațiile din [25], se obține ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & c_{12} - a_{12}p^2 & \ldots & c_{1n} - a_{1n}p^2 \\ c_{21} - a_{21}p^2 & c_{22} - a_{22}p^2 & \ldots & c_{2n} - a_{2n}p^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} - a_{n1}p^2 & c_{n2} - a_{n2}p^2 & \ldots & c_{nn} - a_{nn}p^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 4, 1975, P. 491–507

Aplicînd metoda deformaţiilor şi utilizînd notaţiile din [19] se obţine ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} r_{11} - m_1 p^2 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} - m_2 p^2 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} - m_n p^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

În fine, aplicînd metoda coeficienţilor de influenţă (a forţelor), [3], [14], [19], [20], [25], cu notaţiile din [14], [19], se obţine ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} - \dfrac{1}{p^2} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} - \dfrac{1}{p^2} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} - \dfrac{1}{p^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Ecuaţiile caracteristice (2) — (4) pot fi aduse cu uşurinţă la forma (1). De exemplu, ecuaţia (3) se aduce la forma (1) împărţind coloana k prin m_k $(k = 1,2,\dots, n)$.

Dezvoltînd determinantul caracteristic $(D)_n$ ce apare în membrul stîng al ecuaţiei (1), se obţine ecuaţia caracteristică sub forma

$$(D)_n = \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \alpha_v \lambda^{n-v} = 0. \tag{5}$$

Punerea ecuaţiei caracteristice sub această formă este în general dificilă datorită volumului important de calcule ce le implică. Această problemă a fost mereu reluată atît de către algebrişti, cît şi de către cercetătorii din domeniul teoriei vibraţiilor care au imaginat o serie de metode exacte (Leverrier, Faddeev, Krîlov etc. [2], [12]) dar mai ales aproximative [14], [19], [20], [21], [25].

Unele din aceste metode tratează problema în cazul general, altele se ocupă de cazuri particulare importante în practică.

Lucrarea [15] apărută la noi în ţară are meritul de a fi abordat pentru prima dată problema menţionată făcînd apel la conceptul de graf liniar de fluenţă [1], [16] — [18], [22] — [24], în cadrul unor ipoteze simplificatoare. Sub o altă formă acest concept a fost utilizat în lucrările [4] — [11],

la calculul oscilațiilor de torsiune, prezentîndu-se algoritmi de calcul, variante aproximative și tratîndu-se unele cazuri particulare frecvente, precum și în lucrarea [13], la calculul grinzilor continue pe mai multe reazeme.

Tabela 1

Valorile $r_{ik}\frac{l^3}{EI}$

k \ i	1	2	3	4
1	+ 42,6	− 24	+ 5,22	− 0,63
2	− 24	+ 37,56	− 22,92	+ 4,236
3	+ 5,22	− 22,92	+ 35,52	− 17,04
4	− 0,63	+ 4,236	− 17,04	+ 13,32

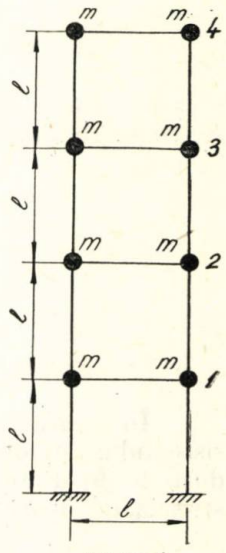


Fig. 1.

În lucrarea de față se stabilește un algoritm pentru dezvoltarea determinantului caracteristic (1) în cazul particular

$$a_{ik} = 0, \qquad k \in [1, i-3] \cup [i+3, n]. \tag{6}$$

Condiția (6) este în general practic îndeplinită [15] atunci cînd se scrie ecuația caracteristică a sistemului sub forma (3). Figura 1 și tabela 1 reproduc, după [15], o structură cu 4 grade de libertate și indică coeficienții r_{ik} corespunzători. Se constată că valorile absolute ale acestor coeficienți scad pe măsură ce $|i-k|$ crește, astfel că $|r_{14}|$ și $|r_{41}|$ sînt neglijabili în comparație cu modulii celorlalți coeficienți. În felul acesta condiția (6) este îndeplinită cu o foarte bună aproximație.

Algoritmul prezentat permite stabilirea expresiei determinantului $(D)_n$ în funcție de expresiile determinanților $(D)_{n-1}, \ldots, (D)_1$. Aplicarea lui reduce volumul de calcule în comparație cu alte metode cunoscute și ușurează programarea calculelor pe mașini electronice.

2. STABILIREA ALGORITMULUI DE CALCUL

Ecuația caracteristică (1) se obține punînd condiția ca sistemul

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + (a_{ii} - \lambda)\, x_i = 0, \qquad k \neq i \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

unde $x_1, \ldots, x_n$ reprezintă amplitudinile oscilaţiilor libere corespunzătoare celor n grade de libertate ale sistemului considerat, să admită soluţii diferite de soluţia banală.

Introducînd necunoscutele auxiliare

$$(\lambda x)_i = \lambda x_i, \quad i = 1,2,\ldots, n, \tag{8}$$

şi ţinînd seama de condiţia (6), sistemul (7) de n ecuaţii cu n necunoscute se transformă într-un sistem de $2n$ ecuaţii cu $2n$ necunoscute

$$\begin{gathered}(\lambda x)_i = \sum_{k=i-2}^{i+2} a_{ik}\, x_k, \\ x_i = \frac{(\lambda x)_i}{\lambda}, \quad i = 1,2,\ldots, n.\end{gathered} \tag{9}$$

În figura 2 s-a reprezentat graful liniar de fluenţă corespunzător sistemului (9) de $2n$ ecuaţii, construit utilizînd explicitarea variabilelor dată de (9) şi notat G_n. Notînd D_n determinantul acestui graf, se demonstrează cu uşurinţă, prin inducţie, relaţia

$$(D)_n = (-1)^n \lambda^n D_n, \tag{10}$$

deci ecuaţia (1) este echivalentă cu

$$D_n = 0. \tag{11}$$

În figura 3 s-a reprezentat graful liniar de fluenţă G_6 corespunzător unui sistem cu 6 grade de libertate. În continuare se va examina acest caz particular, urmînd ca apoi concluziile obţinute să fie extinse pentru cazul general al unui sistem cu n grade de libertate.

Graful G_6 din figura 3 poate fi considerat ca fiind alcătuit din graful G_5 corespunzător unui sistem cu 5 grade de libertate (graf ce cuprinde vîrfurile $x_1, \ldots, x_5, (\lambda x)_1, \ldots, (\lambda x)_5$ şi arcele corespunzătoare) la care se adaugă vîrfurile x_6, $(\lambda x)_6$ şi arcele adiacente acestor vîrfuri. Astfel, mulţimea buclelor ce intră în alcătuirea grafului G_6 este formată din mulţimea buclelor ce intră în alcătuirea grafului G_5 la care se adaugă mulţimea buclelor ce se mai formează prin apariţia arcelor adiacente vîrfurilor x_6 şi $(\lambda x)_6$. Această ultimă mulţime conţine 11 bucle notate (1,6), (2,6), (3,6), (4,6)′, (4,6)″,..., ...,(j,6)′, (j,6)″...,,(7,6)′, (7,6)″ ale căror parcursuri şi transmitanţe sînt prezentate în tabela 2.

Începînd cu bucla a patra s-au utilizat ca notaţii grupe de cîte două paranteze identice afectate de indicele „prim" şi „secund", buclele corespunzătoare fiind adiacente la aceleaşi vîrfuri dar parcursurile lor între vîrfurile x_l şi $(\lambda x)_k$, $(l, k \in [1,6], \; l \neq k)$ fiind de sensuri contrare. Se

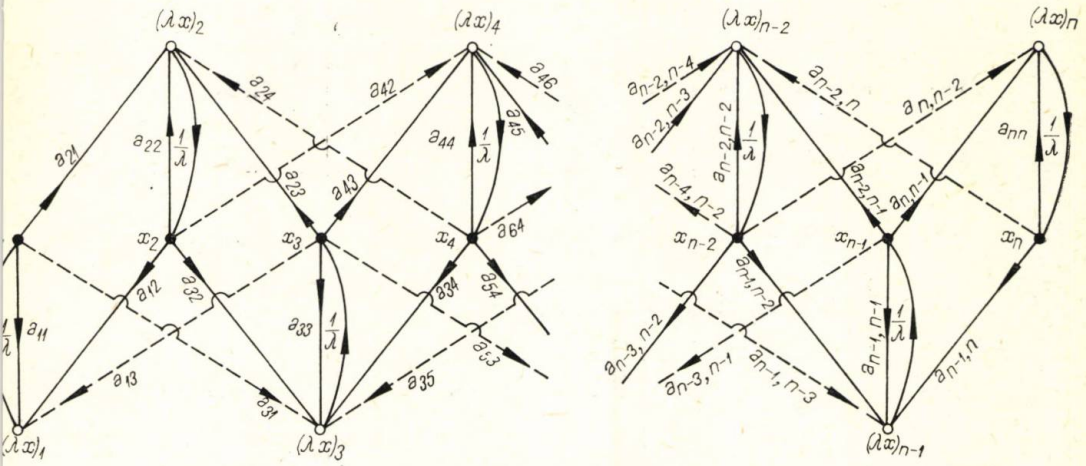

$(\lambda x)_2$
$(\lambda x)_4$
$(\lambda x)_{n-2}$
$(\lambda x)_n$
x_2
x_3
x_4
x_{n-2}
x_{n-1}
x_n
$(\lambda x)_1$
$(\lambda x)_3$
$(\lambda x)_{n-1}$

Fig. 2

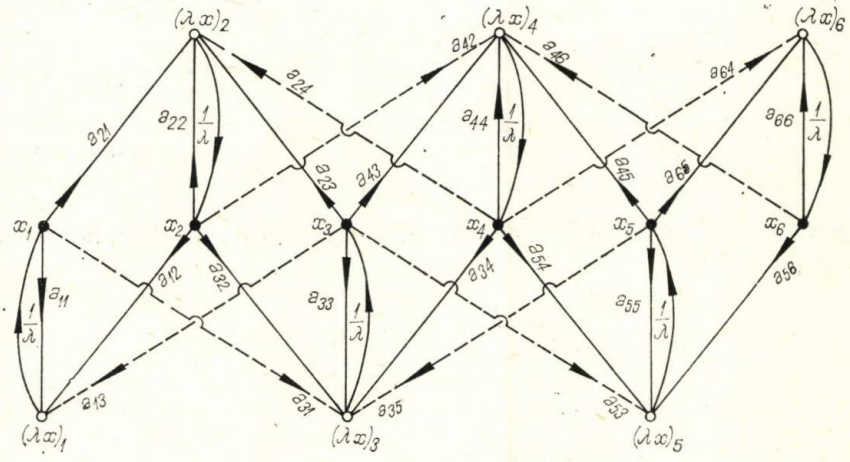

$(\lambda x)_2$
$(\lambda x)_4$
$(\lambda x)_6$
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
$(\lambda x)_1$
$(\lambda x)_3$
$(\lambda x)_5$

Fig. 3

Tabela 2

Numărul de ordine al buclei	Parcursul buclei	Transmitanţa buclei
(1,6)	x_6, $(\lambda x)_6$	$\frac{1}{\lambda} a_{66}$
(2,6)	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_5$, x_5	$\frac{1}{\lambda^2} a_{56}a_{65}$
(3,6)	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_4$, x_4	$\frac{1}{\lambda^2} a_{46}a_{64}$
(4,6)′	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_5$, x_5, $(\lambda x)_4$, x_4	$\frac{1}{\lambda^3} a_{56}a_{45}a_{64}$
(4,6)″	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_4$, x_4, $(\lambda x)_5$, x_5	$\frac{1}{\lambda^3} a_{46}a_{54}a_{65}$
(5,6)′	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_5$, x_5, $(\lambda x)_3$, x_3, $(\lambda x)_4$, x_4	$\frac{1}{\lambda^4} a_{56}a_{35}a_{43}a_{64}$
(5,6)″	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_4$, x_4, $(\lambda x)_3$, x_3, $(\lambda x)_5$, x_5	$\frac{1}{\lambda^4} a_{46}a_{34}a_{53}a_{65}$
(6,6)′	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_5$, x_5, $(\lambda x)_3$, x_3, $(\lambda x)_2$, x_2, $(\lambda x)_4$, x_4.	$\frac{1}{\lambda^5} a_{56}a_{35}a_{23}a_{42}a_{64}$
(6,6)″	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_4$, x_4, $(\lambda x)_2$, x_2, $(\lambda x)_3$, x_3, $(\lambda x)_5$, x_5.	$\frac{1}{\lambda^5} a_{46}a_{24}a_{32}a_{53}a_{65}$
(7,6)′	$(\lambda x)_6$, x_6, $(\lambda x)_5$, x_5, $(\lambda x)_3$, x_3, $(\lambda x)_1$, x_1, $(\lambda x)_2$, x_2, $(\lambda x)_4$, x_4.	$\frac{1}{\lambda^6} a_{56}a_{35}a_{13}a_{21}a_{42}a_{64}$
(7,6)″	$(\lambda x)_6$, x_6 $(\lambda x)_4$, x_4, $(\lambda x)_2$, x_2, $(\lambda x)_1$, x_1, (λx_3), x_3, $(\lambda x)_5$, x_5.	$\frac{1}{\lambda^6} a_{46}a_{24}a_{12}a_{31}a_{53}a_{65}$

observă că transmitanţele buclelor $(j, 6)'$ şi $(j, 6)''$, $(j \geqslant 4)$ pot fi scrise sub forma

$$t_{b,(j,6)'} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{56}a_{6-(j-2),\,6-(j-3)} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-2} a_{6-(j-2)+2f+2,\,6-(j-2)+2f} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-3} a_{6-(j-2)+2f+1,\,6-(j-2)+2f+3}.$$

$$t_{b,(j,6)''} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{65} a_{6-(j-3),6-(j-2)} \times \tag{12}$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-2} a_{6-(j-2)+2f,6-(j-2)+2f+2} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-3} a_{6-(j-2)+2f+3,6-(j-2)+2f+1},$$

(j, par)

$$t_{b,(j,6)'} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{56} a_{6-(j-3),6-(j-2)} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{6-(j-2)+2f,6-(j-2)+2f+2} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{6-(j-3)+2f+2,6-(j-3)+2f},$$

(13)

$$t_{b,(j,6)''} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{65} a_{6-(j-2),6-(j-3)} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{6-(j-2)+2f+2,6-(j-2)+2f} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{6-(j-3)+2f,6-(j-3)+2f+2}$$

(j, impar)

Conform regulei lui Mason, termenul v, $(T_v)_6$ al determinantului D_6 este alcătuit dintr-o sumă de subtermeni reprezentînd produse de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente, suma extinzîndu-se pentru toate combinațiile de cîte $v-1$ bucle neadiacente posibile. Urmărind ideea prezentată deja, subtermenii ce intră în alcătuirea termenului $(T_v)_6$ pot fi împărțiți în următoarele categorii:

— subtermeni comuni cu $(T_v)_5$;

— subtermeni în cadrul cărora apar ca factor transmitanțele $t_{b,(j,6)}$, ($j = 1, 2, 3$), notații $(T_v)_{6,(j,6)}$;

— subtermeni în cadrul cărora apar ca factor transmitanțele $t_{b,(j,6)'}$, ($j = 4, \ldots, 7$) notați $(T_v)_{6,(j,6)'}$;

— subtermeni în cadrul cărora apar ca factor transmitanțele $t_{b,(j,6)''}$, ($j = 4, \ldots, 7$) notați $(T_v)_{6,(j,6)''}$.

Deoarece buclele (1,6), (2,6),..., (7,6)', (7,6)'' sînt adiacente, subtermenii $(T_v)_{6,(1,6)}$, $(T_v)_{6,(2,6)}$,..., $(T_v)_{6,(7,6)'}$, $(T_v)_{6,(7,6)''}$ sînt distincți, deci există relația

$$(T_v)_6 = (T_v)_5 + \sum_{j=1}^{3} (T_v)_{6,(j,6)} + \sum_{j=4}^{7} [(T_v)_{6,(j,6)'} + (T_v)_{6,(j,6)''}]. \tag{14}$$

Ținînd seama de parcursurile diverselor bucle (tabela 2) și de regula lui Mason, se obțin următoarele expresii:

$$\begin{aligned}
&(T_v)_{6,(1,6)} = t_{b,(1,6)} (T_{v-1})_5, \\
&(T_v)_{6,(2,6)} = t_{b,(2,6)} (T_{v-1})_4, \\
&(T_v)_{6,(3,6)} = t_{b,(3,6)} [(T_{v-1})_3 + t_{b,(1,5)} (T_{v-2})_3 + t_{b,(3,5)} (T_{v-2})_2], \\
&\quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (15) \\
&(T_v)_{6,(j,6)'} = t_{b,(j,6)'} (T_{v-1})_{6-(j-1)}, \\
&(T_v)_{6,(j,6)''} = t_{b,(j,6)''} (T_{v-1})_{6-(j-1)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 4, \ldots, 7).
\end{aligned}$$

Apelînd din nou la regula lui Mason și ținînd seama de relațiile (14) și (15) se obține

$$\begin{aligned}
D_6 = \sum_v (-1)^{v-1} (T_v)_6 &= (1 - t_{b,(1,6)}) D_5 - t_{b,(2,6)} D_4 - \\
&- [t_{b,(3,6)} (1 - t_{b,(1,5)}) + (t_{b,(4,6)'} + t_{b,(4,6)''})] D_3 + \qquad (16) \\
&+ [t_{b,(3,6)} t_{b,(3,5)} - (t_{b,(5,6)'} + t_{b,(5,6)''})] D_2 - \\
&- (t_{b,(6,6)'} + t_{b,(6,6)''}) D_1 - (t_{b,(7,6)'} + t_{b,(7,6)''}).
\end{aligned}$$

Relația (16) reprezintă expresia determinantului D_6 în funcție de expresiile determinanților $D_1, \ldots, D_5$ și de transmitanțele buclelor adiacente la vîrfurile x_6 și $(\lambda x)_6$.

În cazul general al unui sistem cu n grade de libertate se poate stabili pe o cale analogă celei utilizate mai sus expresia determinantului D_i corespunzător subgrafului alcătuit din vîrfurile x_1, $(\lambda x)_1$, ..., x_i, $(\lambda x)_i$ în funcție de expresiile determinanților $D_1, \ldots, D_{i-1}$ și de transmitanțele buclelor ce apar cînd la subgraful menționat se adaugă vîrfurile x_i, $(\lambda x)_i$. Notînd (1, i), (2, i), (3, i), (4, i)', (4, i)'',..., (j, i)', (j, i)'',... aceste bucle (pentru $j \geqslant 4$ buclele (j, i)', (j, i)'' trec prin aceleași vîrfuri dar parcursurile lor între vîrfurile x_l și $(\lambda x)_k$ ($l, k \in [1, i]$, $l \neq k$) sînt de sensuri contrare), se demonstrează prin inducție că $j \in [1, i + 1]$ și că numărul total de

bucle este $2i - 1$. Cu ajutorul grafului din figura 2 se obțin următoarele expresii pentru transmitanțele diverselor bucle

$$t_{b,(1,i)} = \frac{1}{\lambda} a_{ii},$$

$$t_{b,(2,i)} = \frac{1}{\lambda^2} a_{i-1,i} a_{i,i-1},$$

$$t_{b,(3,i)} = \frac{1}{\lambda^2} a_{i-2,i} a_{i,i-2},$$

$$t_{b,(j,i)'} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{i-1,i} a_{i-(j-2),i-(j-2)} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-2} a_{i-(j-2)+2f,\, i-(j-2)+2f} \times \tag{17}$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-3} a_{i-(j-2)+2f+1,\, i-(j-2)+2f+3},$$

$$t_{b,(j,i)''} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{i,i-1} a_{i-(j-3),i-(j-2)} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-2} a_{i-(j-2)+2f,\, i-(j-2)+2f+2} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j}{2}-3} a_{i-(j-2)+2f+3,\, i-(j-2)+2f+1},$$

(j, par),

$$t_{b,(j,i)'} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{i-1,i} a_{i-(j-3),i-(j-2)} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{i-(j-2)+2f,\, i-(j-2)+2f+2} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{i-(j-3)+2f+2,\, i-(j-3)+2f}$$

$$t_{b,(j,i)''} = \frac{1}{\lambda^{j-1}} a_{i,i-1}\, a_{i-(j-2),\, i-(j-3)} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{i-(j-2)+2f+2,\, i-(j-2)+2f} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{\frac{j-5}{2}} a_{i-(j-3)+2f,\, i-(j-3)+2f+2}$$

(j, impar),

$$j \geqslant 4.$$

Urmînd în continuare calea utilizată în cazul particular prezentat mai sus se obține

$$D_i = (1 - t_{b,(1,i)})\, D_{i-1} - t_{b,(2,i)}\, D_{i-2} -$$

$$- [t_{b,(3,i)}\,(1 - t_{b,(1,i-1)}) + (t_{b,(4,i)'} + t_{b,(4,i)''})]\, D_{i-3} +$$

$$+ [t_{b,(3,i)}\, t_{b,(3,i-1)} - (t_{b,(5,i)'} + t_{b,(5,i)''})]\, D_{i-4} -$$

$$- \sum_{j=6}^{i+1} (t_{b,(j,i)'} + t_{b,(j,i)''}) D_{i-j+1} \qquad (18)$$

$$(D_0 = 1).$$

Expresia determinantului D_n se obține, evident, substituind în (18) indicele i prin n.

OBSERVAȚII

a) Dacă este îndeplinită condiția (6) și în plus

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad (19)$$

$$(i,\ k \in [1\ ,\ n]),$$

atunci

$$t_{b,(j,i)'} = t_{b,(j,i)''} = t_{b,(j,i)} = \qquad (20)$$

$$= \frac{1}{\lambda^{j-1}}\, a_{i-1,i}\, a_{i-(j-2),\, i-(j-3)} \prod_{f=0}^{j-4} a_{i-(j-2)+f,\, i-(j-4)+f}$$

($j \geqslant 4$, par sau impar),

și relația (18) devine

$$D_i = (1 - t_{b,(1,i)})\, D_{i-1} - t_{b,(2,i)}\, D_{i-2} -$$
$$- [t_{b,(3,i)}\,(1 - t_{b,(1,i-1)}) + 2t_{b,(4,i)}]\, D_{i-3} + \tag{21}$$
$$+ [t_{b,(3,i)}\, t_{b,(3,i-1)} - 2t_{b,(5,i)}]\, D_{i-4} -$$
$$- 2 \sum_{j=6}^{i+1} t_{b,(j,i)}\, D_{i-j+1}$$
$$(D_0 = 1).$$

b) Dacă este îndeplinită condiția mai restrictivă decît (6)

$$a_{ik} = 0, \tag{22}$$
$$k \in [1,\ i-2] \cup [i+2, n],$$

din (17) rezultă

$$t_{b,(j,i)} = 0 \tag{23}$$
$$(j \geqslant 3),$$

și relația (18) devine

$$D_i = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\, a_{ii}\right) D_{i-1} - \frac{1}{\lambda^2}\, a_{i-1,i}\, a_{i,i-1}\, D_{i-2}. \tag{24}$$

c) Dacă sînt îndeplinite simultan condițiile (19) și (22), relația (18) devine

$$D_i = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\, a_{ii}\right) D_{i-1} - \frac{1}{\lambda^2}\, a_{i-1,i}^2\, D_{i-2}. \tag{25}$$

d) Relația (18) poate fi utilizată și la calculul determinanților de forma

$$(\Delta)_n = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & a_{2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

în cazul în care condiția (6) este îndeplinită, făcînd substituția

$$b_{ii} = a_{ii} - \lambda, \tag{27}$$

care transformă determinantul (26) într-un determinant de tipul (1) și ținînd seama apoi de relația (10).

e) Cînd ecuația caracteristică a sistemului oscilant este dată sub forma (3), ea poate fi adusă, după cum s-a arătat în introducere, la forma (1), împărțind coloana k prin m_k ($k = 1,2, \ldots, n$) și se poate considera condiția (6) ca fiind îndeplinită. În acest caz

$$a_{ik} = \frac{r_{ik}}{m_k}. \tag{28}$$

și deoarece $r_{ik} = r_{ki}$, se obține

$$t_{b,(1,i)} = \frac{1}{p^2} \frac{r_{ii}}{m_i},$$

$$t_{b,(2,i)} = \frac{1}{p^4} \frac{r_{i-1,i}^2}{m_i m_{i-1}},$$

$$t_{b,(3,i)} = \frac{1}{p^4} \frac{r_{i-2,i}^2}{m_i m_{i-2}}, \tag{29}$$

$$t_{b,(j,i)'} = t_{b(j,i)''} = t_{b,(j,i)} = \frac{1}{p^{2(j-1)}} \cdot \frac{1}{\prod_{g=i}^{i-(j-2)} m_g} \times$$

$$\times \prod_{f=0}^{j-4} r_{i-(j-2)+f,\, i-(j-4)+f}$$

($j \geqslant 4$, par sau impar).

3. EXEMPLE DE CALCUL

3.1. EXEMPLUL 1

Se consideră determinantul

$$(D)_7 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3-\lambda & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5-\lambda & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

și se cere să se pună sub forma (5). În acest scop se stabilesc succesiv expresiile determinanților $D_1, \ldots, D_6, D_7$. Conform (18),

$$D_1 = (1 - t_{b,(1,1)})\, D_0 = 1 - t_{b,(1,1)},$$

iar conform (17),

$$t_{b(1,1)} = \frac{1}{\lambda}\, a_{11} = \frac{4}{\lambda},$$

deci

$$D_1 = \frac{1}{\lambda}\,(\lambda - 4).$$

Aplicînd în continuare relația (18) pentru $i = 2, \ldots, 6$, ținînd seama de (17), se obține

$$D_2 = \frac{1}{\lambda^2}\,(\lambda^2 - 6\lambda + 5),$$

$$D_3 = \frac{1}{\lambda^3}\,(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 14\lambda - 3),$$

$$D_4 = \frac{1}{\lambda^4}\,(\lambda^4 - 14\lambda^3 + 39\lambda^2 + 9\lambda + 7),$$

$$D_5 = \frac{1}{\lambda^5}\,(\lambda^5 - 16\lambda^4 + 47\lambda^3 + 73\lambda^2 - 149\lambda + 32),$$

$$D_6 = \frac{1}{\lambda^6}\,(\lambda^6 - 20\lambda^5 + 93\lambda^4 + 35\lambda^3 - 562\,\lambda^2 + 354\lambda + 99)$$

În fine, conform (18),

$$D_7 = (1 - t_{b,(1,7)})\, D_6 - t_{b,(2,7)}\, D_5 -$$

$$- [t_{b,(3,7)}\,(1 - t_{b,(1,6)}) + (t_{b,(4,7)'} + t_{b,(4,7)''})]\, D_4 +$$

$$+ [t_{b,(3,7)}\, t_{b,(3,6)} - (t_{b,(5,7)'} + t_{b,(5,7)''})]\, D_3 -$$

$$- (t_{b,(6,7)'} + t_{b,(6,7)''})\, D_2 - (t_{b,(7,7)'} + t_{b,(7,7)''})\, D_1 -$$

$$- (t_{b,(8,7)'} + t_{b,(8,7)''}).$$

Aplicînd relaţiile (17) se obţine

$$t_{b,(1,\,7)} = \frac{1}{\lambda}\, a_{77} = \frac{2}{\lambda},$$

$$t_{b,(2,\,7)} = \frac{1}{\lambda^2}\, a_{67}a_{76} = \frac{3}{\lambda^2},$$

$$t_{b,(3,\,7)} = \frac{1}{\lambda^2}\, a_{57}a_{75} = \frac{4}{\lambda^2},$$

$$t_{b,(4,\,7)'} = \frac{1}{\lambda^3}\, a_{67}a_{56}a_{75} = \frac{12}{\lambda^3},$$

$$t_{b,(4,\,7)''} = \frac{1}{\lambda^3}\, a_{76}a_{65}a_{57} = \frac{3}{\lambda^3},$$

$$t_{b,(5,\,7)'} = \frac{1}{\lambda^4}\, a_{67}a_{46}a_{54}a_{75} = \frac{108}{\lambda^4},$$

$$t_{b,(5,\,7)''} = \frac{1}{\lambda^4}\, a_{76}a_{64}a_{45}a_{57} = \frac{30}{\lambda^4},$$

$$t_{b,(6,\,7)'} = \frac{1}{\lambda^5}\, a_{67}a_{46}a_{34}a_{53}a_{75} = \frac{108}{\lambda^5},$$

$$t_{b,(6,\,7)''} = \frac{1}{\lambda^5}\, a_{76}a_{64}a_{43}a_{35}a_{57} = \frac{40}{\lambda^5},$$

$$t_{b,(7,\,7)'} = \frac{1}{\lambda^6}\, a_{67}a_{46}a_{24}a_{32}a_{53}a_{75} = \frac{144}{\lambda^6},$$

$$t_{b,(7,\,7)''} = \frac{1}{\lambda^6}\, a_{76}a_{64}a_{42}a_{23}a_{35}a_{57} = \frac{100}{\lambda^6},$$

$$t_{b,(8,\,7)''} = \frac{1}{\lambda^7}\, a_{76}a_{46}a_{24}a_{12}a_{31}a_{53}a_{75} = \frac{288}{\lambda^7},$$

$$t_{b\,(8,\,7)''} = \frac{1}{\lambda^7}\, a_{76}a_{64}a_{42}a_{21}a_{13}a_{35}a_{57} = \frac{120}{\lambda^7}.$$

În final se obține

$$D_7 = \frac{1}{\lambda^7}(\lambda^7 - 22\lambda^6 + 126\lambda^5 - 46\lambda^4 - 1021\lambda^3 +$$

$$+ 1816\lambda^2 - 629\lambda - 225).$$

Ținînd seama de (10) se obține

$$(D)_7 = -\lambda^7 + 22\lambda^6 - 126\lambda^5 + 46\lambda^4 +$$

$$+ 1021\lambda^3 - 1816\lambda^2 + 629\lambda + 225.$$

3.2. EXEMPLUL 2

Să se calculeze determinantul

$$(\Delta)_4 = \begin{vmatrix} 20 & 8 & 3 & -6 \\ 13 & 5 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 6 & -10 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Se pune $(\Delta)_4$ sub forma

$$(\Delta)_4 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 & 3 & 0 \\ 3 & 6-\lambda & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 7-\lambda & 2 \\ 0 & 8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix},$$

obținîndu-se astfel un determinant de tipul (1), cu $\lambda = 1$.

Aplicînd metoda prezentată în lucrare se obține

$$D_1 = \frac{1}{\lambda}(\lambda - 5),$$

$$D_2 = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda^2 - 11\lambda + 6),$$

$$D_3 = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda^3 - 18\lambda^2 + 68\lambda - 23),$$

$$D_4 = \frac{1}{\lambda^4}(\lambda^4 - 27\lambda^3 + 208\lambda^2 - 459\lambda - 123).$$

Introducînd valoarea $\lambda = 1$, se obține

$$D_4 = 1 - 27 + 208 - 459 - 123 = -400.$$

Aplicînd relația (10), se obține

$$(\Delta)_4 = (-1)^4 1^4 D_4 = D_4 = -400.$$

Primită la redacție la 11 ianuarie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. J. R. Abrahams, G. P. Coverly, *Signal Flow Analysis*, Oxford, Pergamon Press, 1965.
2. I. S. Berezin, N. P. Jidkov, *Metodi vicislenii*, Moskva, Fizmatghiz, 1962.
3. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
4. I. Crăciun, *O metodă de calcul al oscilațiilor de torsiune ale arborilor mașinilor cu ajutorul grafelor liniare*, St. cerc. mec. apl. **28**, *6*, 1381—1401 (1969).
5. — *Calculul oscilațiilor libere ale sistemelor torsionale complexe cu ajutorul grafelor liniare*, Buletinul Științific al Institutului politehnic din Cluj, $\mathbf{11}_2$, 203—210, (1968).
6. I. Crăciun, Șt. Székely, *Contribuții la calculul oscilațiilor libere ale sistemelor torsionale simple cu mase și elasticități de valori apropiate, cu ajutorul grafelor liniare*, Buletinul Științific al Institutului politehnic din Cluj, **12**, 249—254 (1969).
7. I. Crăciun, *Un algoritm pentru calculul coeficienților polinomului caracteristic în cazul sistemelor în linie ce execută vibrații liniare de torsiune*. Comunicare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23—27 iunie 1969.
8. I. Crăciun, Șt. Székely, *Aspecte ale aplicării metodei grafelor liniare la calculul oscilațiilor de torsiune ale arborilor cotiți*. Comunicare prezentată la Sesiunea de comunicări tehnico-științifice a Institutului de Cercetări Transporturi, București, 23—25 octombrie 1969. Multiplicare xerox.
9. I. Crăciun, *Determinarea valorilor unor expresii ce intervin în calculul oscilațiilor forțate de torsiune prin metoda grafelor liniare*. În volumul: Institutul Politehnic Cluj, Sesiunea științifică a cadrelor didactice, 22—23 decembrie 1969, Comunicări, p. 247—252.
10. — *Aproximații în calculul oscilațiilor de torsiune prin metoda grafelor liniare*. În volumul: A II-a Conferință de Mecanică tehnică, editat de CNIT, Ministerul Învățămîntului, MICM, Ministerul Transporturilor, partea I, p. 151—159, București, 29—31 oct. 1970.
11. — *Algoritmi în calculul sistemelor „în lanț" și „ramificate" cu ajutorul grafelor liniare de fluență*. St. cerc. mec. apl. **30**, *5*, 1075—1110 (1971).
12. I. Cuculescu, *Analiza numerică*, București, Editura tehnică, 1967.
13. V. Drobotă, *Le calcul de la poutre continue a l'aide des graphes de fluence*. Rev. roum. sci. tehn., sér. méc. appl., **14**, *6*, 1245—1272 (1969).
14. L. Hamburger, Gh. Buzdugan, *Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția mașinilor*. București, Editura tehnică, 1958.
15. M. Ifrim, S. Larionescu, *Aplicarea teoriei grafurilor la calculul pulsației fundamentale de vibrație a structurilor elastice*. St. cerc. mec. apl. **22**, *4*, 1099—1109 (1966).
16. S. J. Mason, *Feedback Theory — Some Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. Inst. Radio Engrs. **41**, *9*, 1144—1156 (1953).
17. — *Feedback Theory — Further Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. Inst. Radio Engrs, **44**, *7*, 920—926 (1956).
18. Edmond Nicolau, Al. Popovici, *Introducere în cibernetica sistemelor discrete*, București, Editura tehnică, 1966.

19. S. D. PONOMARIOV ș.a. *Calculul de rezistență în construcția de mașini*. Traducere din limba rusă, vol. III, București, Editura tehnică, 1964.
20. A. RÎPIANU, A. ALBU, *Osii și arbori rectilinii*, București, Editura tehnică, 1964.
21. A. RÎPIANU, *Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*, București, Editura Academiei, 1969.
22. L. P. A. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Graphes de fluence*, Paris, Eyrolles, Québec, Presses de l'Université Laval, 1961.
23. S. SESHU, N. BALABANIAN, *Linear Network Analysis*, New York, John Wiley & Sons, Inc., London, Chapman & Hall. Ltd., 1959.
24. S. SESHU, M. B. REED, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Reading (U.S.A.), London, Addison-Wesley Publ. Company, Inc., 1961.
25. GH. SILAȘ, *Vibrații mecanice*, București, Editura didactică și pedagogică, 1968.

CONTRIBUȚII LA ANALIZA MATRICEALĂ CINEMATICĂ ȘI DINAMICĂ A GRUPEI ASSUR DE CLASA A IV-a, ORDINUL AL II-lea

de MIHAI BUCULEI
Universitatea Craiova

Lucrarea de față dă o descriere matriceală a cinematicii și dinamicii grupei assurice de clasa a IV-a, ordinul al II-lea (tetrada). Se consideră tetrada ca multipol cinematic și se stabilesc relațiile intrare — ieșire sub formă matriceală. Apoi se face interpretarea acestui multipol ca sistem diferențiator, dîndu-se ecuațiile normale de stare și matricea de tranziție a stărilor. După ce se dă o metodă matriceală pentru determinarea forțelor de inerție și a forțelor de legătură din cuplele cinematice, se face analiza dinamicămatriceală a unui mecanism de clasa a IV-a, cu un singur grad de mobilitate.

INTRODUCERE

În [1], [2] se face o interpretare a grupelor Assur ca multipoli cinematici, făcîndu-se un studiu matriceal al vitezelor diadei dipol și cvadripol cinematic. Descrierea matriceală a cîmpului de accelerații pentru diadă este dată în [3].

Analiza matriceală a mecanismelor oferă avantajul unor rezultate sintetice care, date sub o formă generală, permit un studiu în contextul teoriei sistemelor. În același timp rezultatele obținute permit o programare relativ ușoară pe calculatoarele electronice.

ANALIZA CÎMPULUI DE VITEZE

Se interpretează tetrada ca dipol cinematic cu spațiul terminal format din vectorul mărimilor de intrare (fig. 1)

$$(v) = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2)^{(t)} \in R^4, \tag{1}$$

și din vectorul mărimilor de ieșire

$$(V) = (\dot{X}_3, \dot{Y}_3, \dot{X}_4, \dot{Y}_4, \dot{X}_5, \dot{Y}_5, \dot{X}_6\ \dot{Y}_6)^{(t)} \in R^8. \tag{2}$$

Ecuaţiile de condiţie pentru viteze sînt

$$l_{AC} = \text{const}; \quad l_3 = l_{DC} = \text{const}; \quad l_4 = l_{EB} = \text{const}; \quad l_{BF} = \text{const}; \tag{3}$$

$$l_{AD} = \text{const}; \quad l_1 = l_{EB} = \text{const}; \quad l_2 = l_{EF} = \text{const}.$$

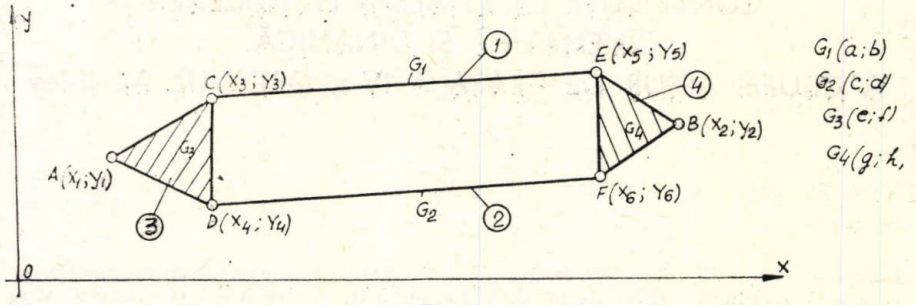


Fig. 1

Derivînd în raport cu timpul condiţiile (3) şi transcriind matriceal sistemul de relaţii diferenţiale astfel obţinut, rezultă următoarea relaţie intrare-ieşire

$$(V) = (M_3)(v), \tag{4}$$

unde :

$$(M_3) = -(M_2)^{-1} \cdot (M_1);$$

$$(M_1) = \begin{pmatrix} -(X_3 - x_1) & -(Y_3 - y_1) & 0 & 0 \\ -(X_4 - x_1) & -(Y_4 - y_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X_5 - x_2) & -(Y_5 - y_2) \\ 0 & 0 & -(X_6 - x_2) & -(Y_6 - y_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(M_2) = \begin{pmatrix} X_3-x_1 & Y_3-y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_4-x_1 & Y_4-y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(X_4-X_3) & -(Y_4-Y_3) & X_4-X_3 & Y_4-Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(X_5-X_3) & -(Y_5-Y_3) & 0 & 0 & X_5-X_3 & Y_5-Y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(X_6-X_4) & -(Y_6-Y_4) & 0 & 0 & X_6-X_4 & Y_6-Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_5-x_2 & Y_5-y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_6-x_2 & Y_6-y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(X_6-X_5) & -(Y_6-Y_5) & X_6-X_5 & Y_6-Y_5 \end{pmatrix}.$$

Relaţia (4) permite calculul cîmpului de viteze al tetradei dipol cinematic.

Considerînd ca vector al mărimilor de intrare

$$(r) = (x_1, y_1, x_2, y_2)^{(t)} \in R^4, \tag{5}$$

relaţia (4) se poate scrie sub forma

$$(V) = L_1[(r)], \tag{6}$$

unde $L_1 = -(M_2)^{-1} \cdot (M_1)\, D \bullet : R^4 \to R^8$ este un operator liniar diferenţial de ordinul întîi, iar $D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Se consideră ca vector al mărimilor de intrare

$$(a) = (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2)^{(t)} \in R^4 \tag{7}$$

şi ca vector al mărimilor de ieşire

$$(A) = (\ddot{X}_3, \ddot{Y}_3, \ddot{X}_4, \ddot{Y}_4, \ddot{X}_5, \ddot{Y}_5, \ddot{X}_6, \ddot{Y}_6)^{(t)} \in R^8. \tag{8}$$

Derivînd (4) în raport cu timpul se obţine

$$(A) = -(M_2)^{-1} \cdot (M_4)(v) - (M_2)^{-1} \cdot (M_1)(a) - (M_2)^{-1}(M_5)(V), \tag{9}$$

unde matricele (M_4) şi (M_5) se obţin din (M_1) şi respectiv (M_3) prin înlocuirile $X_i \to \dot{X}_i$; $x_i \to \dot{x}_i$, fiind cunoscute după o prealabilă analiză a vitezelor.

Relaţia (9) permite calculul cîmpului de acceleraţii al tetradei dipol cinematic.

Dacă se alege ca vector al mărimilor de intrare

$$(a_1) = ((v) \mid (a))^{(t)} \in R^8, \tag{10}$$

atunci relaţia intrare-ieşire (9) se poate scrie sub forma mai compactă,

$$(A) = (M_6)(a_1), \tag{11}$$

unde

$$(M_6) = \begin{pmatrix} -(M_2)^{-1} \cdot [(M_5)(M_2)^{-1}(M_1) - (M_4)] \\ -(M_2)^{-1} \cdot (M_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_7) \\ (M_8) \end{pmatrix}.$$

Ţinînd cont de (5), se poate pune (11) sub forma

$$(A) = L_2[(r)], \tag{12}$$

unde $L_2 = (M_7) \cdot D\bullet + (M_8)\, D^2_\bullet : R^4 \to R^8$ este un operator liniar diferențial de ordinul doi.

TETRADA CA SISTEM DIFERENȚIATOR

În virtutea relațiilor (6) și (12), tetrada apare, în cadrul analizei cinematice, ca un sistem liniar diferențiator, decompozabil, variant în timp.

În continuare, se va da descrierea sistemului dat de relația intrare—ieșire (12), pentru sistemul descris de relația (6) rezultatele particularizîndu-se ușor.

Se adoptă următoarea formă normală a vectorului de stare

$$(x\,(t)) = ((r\,(t)\,|(\dot{r}\,(t)))^{(t)} = ((x_1(t))\,|\,(x_2(t)))^{(t)}, \qquad t \in [t_0\,;\,+\,\infty),$$

unde t_0 reprezintă momentul inițial corespunzător stării inițiale. Rezultă imediat ecuațiile normale de stare

$$\begin{aligned} (\dot{x}(t)) &= (N)\,(x(t)), \\ (A(t)) &= (C) \cdot (x(t)) + (M_8)\,(\dot{x}_2(t)), \end{aligned} \tag{13}$$

unde

$$(N) = \left(\frac{(O_3)\,|\,(E_3)}{(O_6)}\right); \quad (C) = ((O_3)\,|\,(M_7))\,;$$

(O_k) și (E_k) — fiind elementele neutre față de adunare și, respectiv, înmulțire pentru inelul matricelor pătrate de dimensiuni $k \times k \cdot (k = 3{,}6)$.

Sistemul (13) fiind variant în timp, problema determinării matricei de transfer (adică a transformatei Laplace a răspunsului la impuls) este mai complicată și nu o vom aborda în studiul de față.

Se face, în continuare, calculul matricei de tranziție a stărilor. Considerînd momentul inițial $t_0 = 0^-$, se aplică relației (12) transformata Laplace unilaterală

$$\overline{(A)} = \overline{(M_7)\,(D(r))} + \overline{(M_8)\,(D^2(r))}. \tag{14}$$

Se face ipoteza, practic îndeplinită, că elementele matricelor (M_7) și (M_8) sînt dezvoltabile în serie Mac Laurin, ceea ce permite să se scrie:

$$\begin{aligned} (M_7(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot (M_7^{(k)}(0^-)), \\ (M_8(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot (M_8^{(k)}(0^-)). \end{aligned} \tag{15}$$

Ţinînd cont de (15), (14) devine

$$\overline{(A)} = [-(M_7(0^-)) - (M_8(0^-)) + p(E')](r(0^-)) -$$

$$- (M_8(0^-))(\dot{r}(0^-)) + (\psi(p)),$$

unde $(E') = \left(\frac{(E_4)}{(O_4)}\right)$, p fiind variabila complexă introdusă prin transformata Laplace.

Matricele de bază sînt deci

$$\begin{aligned}(\Phi_1(t)) &= -(M_7(0^-))\,\delta(t) - (M_8(0^-))\,\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}_{(p)} \cdot (E'),\\ (\Phi_2(t)) &= -(M_8(0^-))\,\delta(t),\end{aligned} \tag{16}$$

unde $\delta(t)$ este funcţia generalizată Dirac.

Matricea de tranziţie a stărilor este

$$(\Phi(t)) = \left(\begin{array}{c|c} (\Phi_1(t)) & (\Phi_2(t)) \\ \hline (\dot{\Phi}_1(t)) & (\dot{\Phi}_2(t)) \end{array}\right). \tag{17}$$

Rezultă deci următoarea relaţie între starea la un moment oarecare t şi starea la momentul 0^-

$$(\Phi(0^-))\left(\frac{(r(t))}{(\dot{r}(t))}\right) = (\Phi(t)) \cdot \left(\frac{(r(0^-))}{(\dot{r}(0^-))}\right). \tag{18}$$

ANALIZA FORŢELOR DE INERŢIE

Referindu-ne la figura 1, se introduce ca vector al mărimilor de ieşire

$$(V^*) = (\dot{a},\ \dot{b},\ \dot{c},\ \dot{d},\ \dot{e},\ \dot{f},\ \dot{g},\ \dot{h})^{(t)} \in R^8. \tag{19}$$

Din ecuaţiile de condiţie

$$G_1C = \text{const};\quad G_2D = \text{const};\quad G_3C = \text{const};\quad G_4E = \text{const};$$

$$G_1E = \text{const};\quad G_2F = \text{const};\quad G_3D = \text{const};\quad G_4F = \text{const},$$

G_1, G_2, G_3, G_4 fiind puncte arbitrare aparţinînd elementelor tetradei, se obţine următoarea relaţie intrare—ieşire care caracterizează cîmpul vitezelor tetradei hexapol cinematic

$$(V^*) = [(M_9)]^2\,(M_3)\,(v), \tag{20}$$

unde

$$(M_9)=\begin{pmatrix} X_3-a & Y_3-b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_5-a & Y_5-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_4-c & Y_4-d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_6-c & Y_6-d \\ X_5-e & Y_5-f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_4-e & Y_4-f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_5-g & Y_5-h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_6-g & Y_6-h \end{pmatrix}.$$

Prin derivarea lui (19) în raport cu timpul se obţine

$$(A^*) = 2(M_9)\cdot D(M_9)\cdot (V) + [(M_9)]^2(A), \tag{21}$$

elementele lui $D(M_9)$ fiind cunoscute după o prealabilă analiză a cîmpului vitezelor hexapolului cinematic.

În (21) s-a notat

$$(A^*) = (\ddot{a}, \ddot{b}, \ddot{c}, \ddot{d}, \ddot{e}, \ddot{f}, \ddot{g}, \ddot{h})^{(t)} \in R^8, \tag{22}$$

adică vectorul acceleraţiilor de ieşire pentru tetrada hexapol.

Se introduce vectorul format din acceleraţiile unghiulare ale elementelor tetradei,

$$(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)_{(t)} \in R^4, \tag{23}$$

unde

$$\varepsilon_1 = \left\{\frac{1}{l_1^2}[(\ddot{X}_5 - \ddot{X}_3)^2 + (\ddot{Y}_5 - \ddot{Y}_3)^2]^{\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{l_1^4}[(\dot{X}_5 - \dot{X}_3)^2 + (\dot{Y}_5 - \dot{Y}_3)^2]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ε_2, ε_3 şi ε_4 obţinîndu-se prin relaţii similare.

Vectorul format din elementele torsorului de inerţie este deci

$$(F_i) = (\bar{F}_{i_1}|\bar{F}_{i_2}|\bar{F}_{i_3}|\bar{F}_{i_4}|M_{i_1}|M_{i_2}|M_{i_3}|M_{i_4})^{(t)} = (M_F)\begin{pmatrix}(A^*)\\(\varepsilon)\end{pmatrix}, \tag{24}$$

unde (M_F) este o matrice care are pe diagonală elementele m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3, m_4, m_4, J_{G_1}, J_{G_2}, J_{G_3}, J_{G_4}, restul elementelor fiind zero.

S-a notat cu m_i, $J_{Gi}(i = \overline{1,4})$ masele elementelor şi, respectiv, momentele de inerţie în raport cu centrele lor de greutate $G_i(i = \overline{1,4})$, elementele lui (A^*) referindu-se acum, evident, la aceste centre de greutate.

CALCULUL FORȚELOR DE LEGĂTURĂ DIN CUPLELE CINEMATICE

Se introduce vectorul reacțiunilor la intrare (fig. 2)

$$(R) = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)^{(t)} = (\overline{R_A}|\overline{R_B})^{(t)}. \tag{25}$$

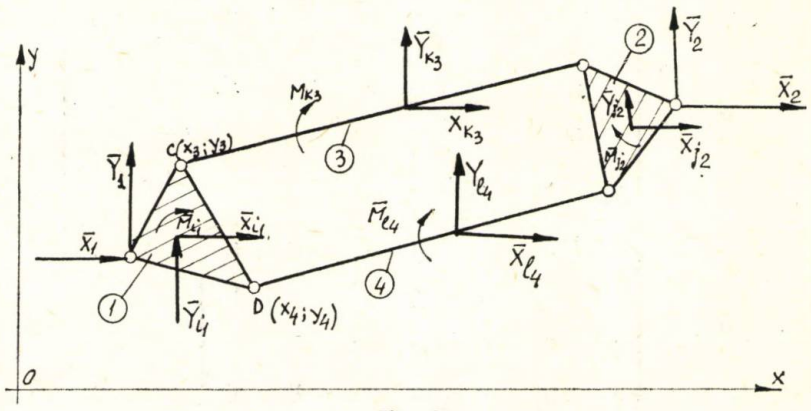


Fig. 2

Din ecuațiile de echilibru ale întregii grupe cinematice se obține

$$(R) = -(M_{10})^{-1} \cdot (R_1), \tag{26}$$

unde

$$(M_{10}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y_2 - y_1 & -(x_2 - x_1) \\ y_2 - y_1 & -(x_2 - x_1) & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(R_1) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{(i)} X_{i_1} + \sum\limits_{(j)} X_{j_2} + \sum\limits_{(k)} X_{k_3} + \sum\limits_{(l)} X_{l_4} \\ \sum\limits_{(i)} Y_{i_1} + \sum\limits_{(j)} Y_{j_2} + \sum\limits_{(k)} Y_{k_3} + \sum\limits_{(l)} Y_{l_4} \\ \sum\limits_{(i)} X_{i_1}(y_{i_1} - y_1) + \sum\limits_{(j)} X_{j_2}(y_{j_2} - y_1) + \sum\limits_{(k)} X_{k_3} \cdot (y_{k_3} - y_1) + \sum\limits_{(l)} X_{l_4}(y_{l_4} - y_1) - \\ - \sum\limits_{(i)} Y_{i_1}(x_{i_1} - x_1) - \sum\limits_{(j)} Y_{j_2}(x_{i_2} - x_1) - \sum\limits_{(k)} Y_{k_3}(x_{k_3} - x_1) - \\ - \sum\limits_{(l)} Y_{l_4}(x_{l_4} - x_1) + \sum\limits_{(i)} M_{i_1} + \sum\limits_{(j)} M_{j_2} + \sum\limits_{(k)} M_{k_3} + \sum\limits_{(l)} M_{l_4} \\ \sum\limits_{(i)} X_{i_1}(y_2 - y_{i_1}) + \sum\limits_{(j)} X_{j_2}(y_2 - x_{j_2}) + \sum\limits_{(k)} X_{k_3}(y_2 - x_{k_3}) + \\ + \sum\limits_{(l)} X_{l_4}(y_2 - x_{l_4}) - \sum\limits_{(i)} Y_{i_1}(x_2 - x_{i_1}) - \sum\limits_{(j)} Y_{j_2}(x_2 - x_{j_2}) - \\ - \sum\limits_{(k)} Y_{k_3}(x_2 - x_{k_3}) - \sum\limits_{(l)} Y_{l_4}(x_2 - x_{l_4}) - \sum\limits_{(i)} M_{i_1} - \sum\limits_{(j)} M_{j_2} - \sum\limits_{(k)} M_{k_3} - \sum\limits_{(l)} M_{l_4}; \end{pmatrix}.$$

Din ecuațiile de echilibru ale elementului 1 (fig. 3) se obține

$$\left(\frac{\bar{R}_c}{\bar{R}_D}\right) = (X_3\,;\ Y_3\,;\ X_4\,;\ Y_4)^{(t)} = -(M_{11})^{-1}\cdot(M_{12})\cdot(R) - (M_{11})^{-1}\cdot(V_2), \tag{27}$$

unde

$$(M_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y_3 - y_4 & -(x_3 - x_4) \\ y_3 - y_4 & x_3 - x_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(M_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_3 - y_1 & -(x_3 - x_1) & 0 & 0 \\ y_1 - y_4 & x_4 - x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(V_2) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{(i)} X_{i_1} \\ \sum\limits_{(i)} Y_{i_1} \\ \sum\limits_{(i)} M_{i_1} + \sum\limits_{(i)} X_{i_1}(x_3 - x_{i_1}) - \sum\limits_{(i)} Y_{i_1}(y_3 - y_{i_1}) \\ \sum\limits_{(i)} M_{i_1} + \sum\limits_{(i)} X_{i_1}(y_{i_1} - y_4) + \sum\limits_{(i)} Y_{i_1}(x_4 - x_{i_1}) \end{pmatrix}.$$

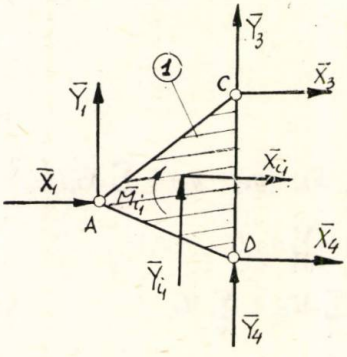


Fig.3

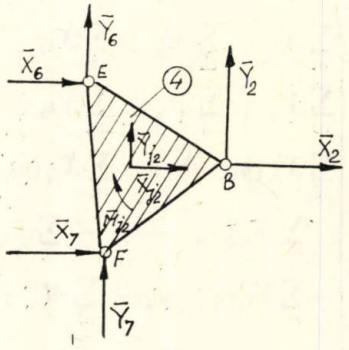


Fig.4

Din ecuațiile de echilibru ale elementului (2) (fig. 4) se obține

$$\left[\frac{\bar{R}_E}{\bar{R}_F}\right] = (X_5\,;\ Y_5\,;\ X_6\,;\ Y_6)^{(t)} = -(M_{13})^{-1}\cdot(M_{14})\cdot(R) - (M_{13})^{-1}(V_3), \tag{28}$$

unde

$$(M_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (y_5 - y_6) & -(x_5 - x_6) \\ y_5 - y_6 & -(x_5 - x_6) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(M_{14}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (y_5 - y_2) & -(x_5 - x_2) \\ 0 & 0 & (y_2 - y_6) & -(x_2 - x_6) \end{pmatrix},$$

$$(V_3) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{(j)} X_{j_2} \\ \sum\limits_{(j)} Y_{j_2} \\ \sum\limits_{(j)} X_{j_2}(y_5 - y_{j_2}) - \sum\limits_{(j)} Y_{j_2}(x_5 - x_{j_2}) - \sum\limits_{(j)} M_{j_2} \\ \sum\limits_{(j)} X_{j_2}(y_{j_2} - y_6) - \sum\limits_{(j)} Y_{j_2}(x_{j_2} - x_6) + \sum\limits_{(j)} M_{j_2} \end{pmatrix}.$$

Reunind relațiile (26), (27) și (28) se obține următoarea relație globală pentru calculul reacțiunilor din cuplele cinematice

$$\begin{pmatrix} \bar{R}_A \\ \hline \bar{R}_B \\ \hline \bar{R}_C \\ \hline \bar{R}_D \\ \hline \bar{R}_E \\ \hline \bar{R}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(M_{10})^{-1} \cdot (R_1) \\ \hline (M_{11})^{-1} \cdot (M_{12}) \cdot (M_{10})^{-1} \cdot (R_1) \\ \hline (M_{13})^{-1} \cdot (M_{14}) \cdot (M_{10})^{-1} \cdot (R_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (O_4) \\ \hline -(M_{11})^{-1}(V_2) \\ \hline -(M_{13})^{-1}(V_3) \end{pmatrix}, \qquad (29)$$

unde

$$(O_4) = (0;\ 0;\ 0;\ 0)^{(t)}.$$

Nu s-a ținut cont de frecarea din cuplele cinematice.

ANALIZA DINAMICĂ

Metoda care va fi dezvoltată mai jos constă în aplicarea teoremei energiei întregului mecanism și se referă la mecanismul simplu, cu un singur grad de mobilitate, din figura 5.

BUDAPEST MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Se presupune că forțele și momentele exterioare sînt funcție numai de poziția mecanismului, dată prin coordonata lagrangeiană θ. S-au notat cu G_i, $(i = \overline{1,5})$ centrele de greutate ale elementelor mecanismului.

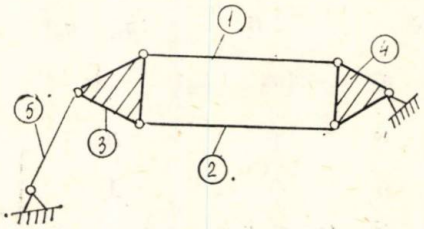


Fig. 5

Energia cinetică a mecanismului, calculată la un moment oarecare $t > t_0$, este

$$E_c(t) = \frac{1}{2}(V_1^*)^{(t)} \cdot (M_{15}) \cdot (V_1^*), \tag{30}$$

unde

$$(V_1^*)^{(t)} = (\dot{a}\,;\ \dot{b}\,;\ \dot{c}\,;\ \dot{d}\,;\ \dot{e}\,;\ \dot{f}\,;\ \omega_1\,;\ \omega_2\,;\ \omega_3\,;\ \omega_4\,;\ \omega_5)^{(t)} = ((V_2^*)\,|\,(\omega))^{(t)}\,;$$

ω_i, $(i = \overline{1,5})$ — vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului;

(M_{15}) — o matrice avînd pe prima diagonală elementele

$$m_1\,;\ m_1\,;\ m_2\,;\ m_2\,;\ m_3\,;\ m_3\,;\ J_{G_1}\,;\ J_{G_2}\,;\ J_{G_3}\,;\ J_{O_2}\,;\ J_{O_1}\,;$$

J_{G_i} — momentele de inerție ale elementelor 1, 2, 3 în raport cu G_i, $(i = \overline{1,3})$;

$J_{O_1}\,;\ J_{O_2}$ — momentele de inerție ale elementelor 5 și, respectiv, 4 în raport cu O_1 și O_2.

Dar

$$(V_2^*) = [(M_9')]^2 \cdot (M_3) \cdot (v), \tag{31}$$

unde matricea (M_9') se obține din matricea (M_9) prin suprimarea ultimelor două linii. Pe de altă parte se poate scrie

$$(v) = (-y_1\,;\ x_1\,;\ 0\,;\ 0\,;)^{(t)} \cdot \omega_5 = (v_1)^{(t)} \cdot \omega_5, \tag{32}$$

înlocuind (32) în (31), se obține

$$(V_2^*) = [(M_9')]^2 \cdot (M_3) \cdot (v_1) \cdot \omega_5. \tag{33}$$

Însă

$$(\omega) = (\omega_1\,;\ \omega_2\,;\ \omega_3\,;\ \omega_4\,;\ \omega_5)^{(t)} = \left[\frac{1}{l_1}(\dot{x}_5 - \dot{x}_3)^2 + (\dot{y}_5 - \dot{y}_3)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{l_2}[(\dot{x}_4 - \dot{x}_6)^2 + (\dot{y}_4 - \dot{y}_6)^2]^{\frac{1}{2}};\ \frac{1}{l_3}[(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_3 - \dot{y}_1)^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{l_4}[(\dot{x}_6 - \dot{x}_5)^2 + (\dot{y}_6 - \dot{y}_5)^2]^{\frac{1}{2}};\ \Big]^{(t)}\omega_5,$$

şi ţinînd cont de (4) şi (32) se poate scrie

$$(\omega) = (f_1; f_2; f_3; f_4; 1)^{(t)} \cdot \omega_5 = (f) \cdot \omega_5, \tag{34}$$

unde $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ $(i = \overline{1,4})$ sînt funcţii cunoscute de poziţia mecanismului.

Cu (33) şi (34), energia cinetică dată de (30) devine

$$E_c(t) = \frac{1}{2} [((v_1) | (f))^{(t)} \cdot (M_{15}) \cdot (v_1) | (f))] \cdot \omega_5^2.$$

Cu teorema energiei se obţine viteza unghiulară ω_5 la momentul t, cunoscînd viteza unghiulară ω_{50} la momentul t_0 cu relaţia

$$\omega_5 = \left[\frac{2L_{ext} - \omega_{50}^2((v_{10}) | (f_0))^{(t)} \cdot (M_{15\cdot 0}) \cdot ((v_{10}) | (f_0))}{((v_1) | (f))^{(t)} \cdot (M_{15}) \cdot ((v_1) | (f))} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

unde L_{ext} este lucrul mecanic al forţelor şi momentelor exterioare, calculat între poziţia iniţială θ_0 şi poziţia curentă θ.

În (35) indicile zero se referă la faptul că coordonatele care intervin în matricele respective sînt cele calculate la momentul t_0.

Variaţia în timp a coordonatei lagrangeiene θ se obţine din (35) printr-o cvadratură;

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} [\omega_5(\tau)]^{-1} \, d\tau. \tag{36}$$

CONCLUZII

Metoda matriceală expusă permite o analiză completă cinematică şi dinamică a tetradei. Se recomandă folosirea calculatoarelor numerice, programarea nepunînd probleme dificile. Se remarcă de asemenea simplitatea relaţiilor obţinute.

Pentru analiza cinematică şi dinamică a unor mecanisme complexe se vor folosi combinat rezultatele obţinute mai sus şi cele care se referă la celelalte grupe cinematice [1] — [5].

Primită la redacţie la 20 martie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Diada interpretată ca dipol şi cvadripol cinematic*, St. cerc. mec. apl. *6*, 1293—1306 (1970).
2. Chr. Pelecudi, A. Matheescu, *Matricele de transmisie ale multipolilor cinematici formaţi din diade*, St. cerc. mec. apl. *6*, 1237—1356 (1970).
3. M. Buculei, S. Miţis, I. Popescu, *Contribuţii la analiza cinematică şi cinetostatică a mecanismelor plane folosind calculul matriceal*, Comunicări la Simp. int. de mec. şi met. de pr. pe calculat., vol. A. pag. 204—216.
4. M. Buculei, S. Miţis, I. Popescu, *Calculul reacţiunilor din cuplele cinematice ale mecanismelor aparatelor electrice prin metode matriceale*, Electrotehnica, *3* (1974).

CALCULUL RIGIDITĂȚILOR DIAFRAGMELOR PLINE ȘI CU GOLURI LA CLĂDIRI ETAJATE. I

de RADU AGENT, VOICU MAGER,
TUDOR POSTELNICU, EMIL LERNER
Institutul de construcții București I.S.L.G.C.

Obiectul studiului îl constituie determinarea practică a rigidităților la deplasări laterale ale diafragmelor pline și cu goluri, necesare pentru calculul forțelor seismice orizontale și pentru repartiția spațială a acestora între elementele componente ale ansamblului unei structuri.
Se prezintă metodologia de lucru și rezultatele obținute sub forma unor tabele de coeficienți pentru calculul direct al momentelor de inerție echivalente ale diafragmelor pline și cu goluri, ținînd seama de deformațiile produse de acțiunea momentelor încovoietoare, forțelor tăietoare și eforturilor axiale din montanții diafragmelor, împreună cu o discuție asupra ponderii cu care intervin fiecare din acești factori.

1. GENERALITĂȚI

În cadrul I.S.L.G.C., cu colaborarea catedrei de specialitate de la Institutul de construcții București, sînt în curs de defi nitivare „Instrucțiunile tehnice provizorii pentru proiectarea construcțiilor cu structura din diafragme de beton armat", care cuprind indicații și recomandări privitoare la problemele de alcătuire constructivă și de calcul ale acestor structuri.

Cu prilejul studiilor ce s-au efectuat în legătură cu problemele de calcul, în vederea elaborării instrucțiunilor, unul din aspectele examinate a fost cel al determinării practice a rigidităților la deplasări laterale ale diafragmelor pline și cu goluri, necesare pentru :

— calculul forțelor seismice orizontale ;

— repartiția spațială a forțelor orizontale (seismice sau din acțiunea vîntului) între elementele componente ale ansamblului structurii.

Față de definiția generală a rigidității unui element sau unei structuri la deplasări laterale (forța orizontală necesară pentru a produce o deplasare laterală egală cu unitatea), este necesară o precizare a acestei definiții în cazul de față, în raport cu schema de încărcare și cu nivelul la care se calculează deplasarea.

Din acest punct de vedere, procedeele de calcul utilizate în practică, bazate pe adaptarea la specificul diafragmelor a metodelor de calcul cunoscute din statica structurilor formate din bare, se pot împărți în două categorii ;

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 4, 1975, P. 521—533

— procedee în care deplasările se determină la nivelul fiecărui planşeu, iar condiţiile de egalitate a săgeţilor între diferitele diafragme se pun tot la nivelul fiecărui planşeu;

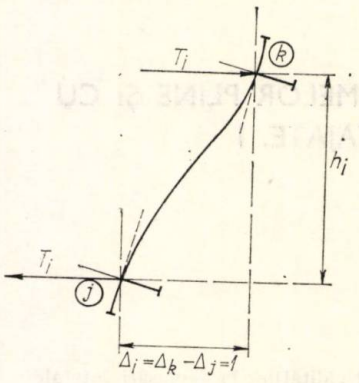


Fig. 1

— procedee simplificate, bazate pe considerarea diafragmelor pline şi cu goluri ca sisteme monotone pe verticală, cu admiterea ipotezei simplificatoare că deformatele tuturor diafragmelor componente ale structurii sînt practic afine, ceea ce permite să se efectueze repartiţia forţelor orizontale scriind condiţia de egalitate a săgeţilor la un singur nivel caracteristic.

În primul caz, noţiunea de rigiditate intervine sub forma de „rigiditate relativă de nivel" [30] [38], definită conform figurii 1, ca perechea de forţe orizontale (forţa tăietoare de nivel) necesară pentru a produce nivelului respectiv o deplasare relativă egală cu unitatea.

După cum se vede din figură, rigiditatea relativă de nivel este funcţie de gradele de încastrare la capete ale montanţilor.

În cel de-al doilea caz (procedeele simplificate), este necesar în prealabil să se stabilească nivelul caracteristic la care se calculează deplasările laterale. De regulă, pentru a ţine seama de faptul că în realitate deformatele diferitelor diafragme nu sînt totuşi riguros afine (fig. 2), este prefe-

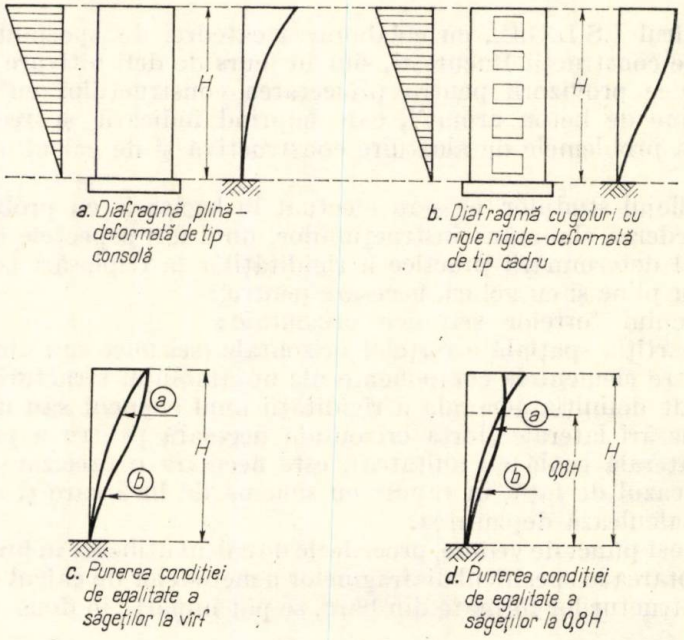


Fig. 2

rabil ca nivelul la care se pune condiția de egalitate a deplasărilor laterale să nu fie cel de la extremitatea superioară a structurii, ci un nivel intermediar, situat la circa 0,8 din înălțimea totală. Un studiu de fundamentare în acest sens este dat în [19].

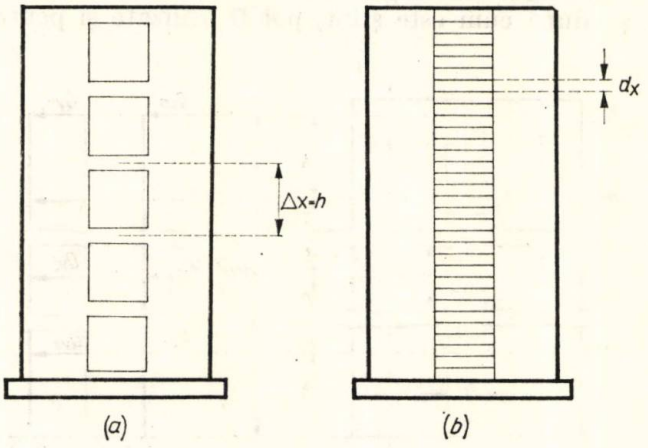


Fig. 3

După cum este știut, în cadrul procedeelor simplificate calculul diafragmelor poate fi sistematizat în două moduri :

— se face un calcul al diafragmei cu goluri considerată ca un cadru etajat (metoda „cadrelor"), pentru care se pot da direct în tabele toate valorile rigidităților diafragmelor în funcție de numărul de niveluri [2] [3] [4];

— în locul cadrului cu legături orizontale la intervale finite $h = \Delta x$ (fig. 3.*a*), se consideră în calcul o structură înlocuitoare continuă, (fig. 3. *b*), cu legături orizontale echivalente la distanța infinitezimală dx, pentru care rigiditățile se determină cu ajutorul unor abace [5] [8] [9] [11] [13] [14] [15] [19] [26] [34] [35].

Se menționează că cele două variante de mai sus sînt teoretic echivalente între ele, în sensul că între ecuația diferențială care stă la baza abacelor din metoda structurii continue înlocuitoare și sistemul de ecuații algebrice liniare care stă la baza tabelelor din metoda cadrelor, relația este cea dintre o ecuație diferențială și ecuațiile cu diferențe finite corespunzătoare [2] [4] [24].

Lucrarea de față tratează determinarea rigidităților numai după metoda cadrelor, prezentîndu-se :

— ipotezele și relațiile de calcul utilizate, pe baza cărora s-au întocmit tabelele;

— o discuție cu caracter calitativ asupra ponderii cu care intervine influența diferiților factori (numărul de niveluri, raportul între rigiditățile riglelor și ale montanților, deformațiile produse de momentele încovoietoare, de forțele tăietoare și de eforturile axiale);

— tabelele cuprinzînd coeficienții necesari pentru calculul rigidităților;

— exemple numerice de utilizare a tabelelor.

2. IPOTEZE ŞI RELAŢII DE CALCUL UTILIZATE

Se consideră o diafragmă ca în figura 4, monotonă pe verticală şi simetrică, cu un singur şir de goluri. Tabelele sînt calculate pentru acest caz de bază şi, după cum este ştiut, pot fi utilizate şi pentru diafragme

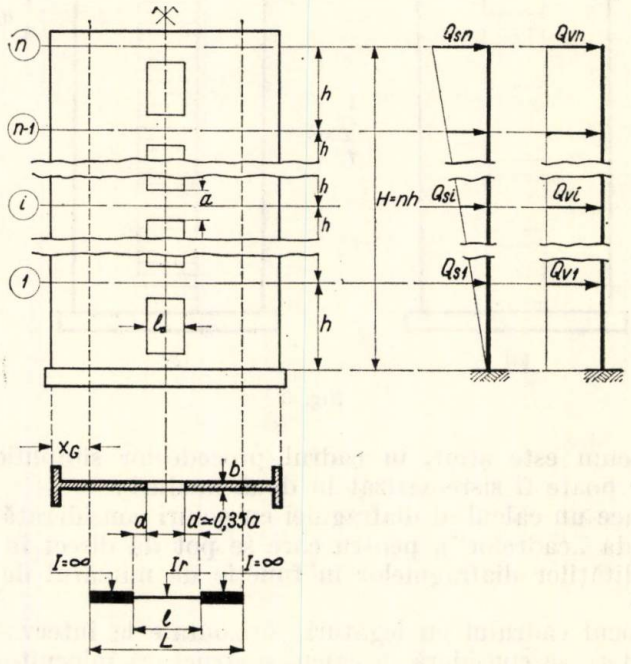


Fig. 4

nesimetrice sau cu mai multe şiruri de goluri, prin considerarea unei diafragme simetrice echivalente [2] [3] [4] [5] [23] [24]. Indicaţii mai detaliate în acest sens sînt date în continuare în cadrul capitolului 5.

Metoda utilizată pentru calculul eforturilor secţionale este metoda generală a deplasărilor, folosind ca necunoscute distorsiunile [2] [3] [4] [24].

2.1. NOTAŢII (fig. 4)

n — numărul de niveluri al clădirii;
i = 1,...,n, — indicele etajului curent;
h — înălţimea unui etaj;
H = $n\,h$ — înălţimea totală a clădirii;
A_m — aria secţiunii unui montant;
A_{mt} — aria secţiunii unui montant la acţiunea forţelor tăietoare, care se ia diferită de A_m (se neglijează aportul tălpilor şi se afectează cu un coeficient de corecţie subunitar, dependent de forma secţiunii [21]);

I_m — momentul de inerție al secțiunii unui montant;
E_m — modulul de elasticitate convențional pentru montanți, care se ia egal cu E_b;
K_m — rigiditatea la distorsiune a montantului $= E_m I_m/h$;
L — deschiderea de calcul a riglei (buiandrugului) = distanța între centrele de greutate ale secțiunilor celor doi montanți;
l_0 — lumina liberă a riglei între montanți;
l $= l_0 + 2d$ — deschiderea pe care rigla se consideră deformabilă la încovoiere și la forță tăietoare;
I_r — momentul de inerție al secțiunii riglei;
A_{rt} — aria secțiunii riglei la acțiunea forțelor tăietoare, care se calculează la fel ca și A_{mt};
E_r — modulul de elasticitate convențional pentru rigle, care în cazul diafragmelor cu goluri se ia $E_r = (0{,}3 \ldots 0{,}6)\ E_b$ [21];
K_r — rigiditatea la distorsiune a riglei, care are expresiile:
— pentru rigle de cadru obișnuite de secțiune constantă:

$$K_r = \frac{6 E_r I_r}{L};$$

— pentru riglele diafragmelor cu goluri, la care se consideră că pe porțiunile laterale $(L - l)$ momentul de inerție este infinit:

$$K_r = \frac{6 E_r I_r}{L} \left(\frac{L}{l}\right)^3 \mu_r, \tag{1}$$

unde μ_r este un coeficient care introduce influența deformațiilor produse de forțele tăietoare din riglă și care are expresia:

$$\mu_r = \frac{1}{1 + 28{,}2 \dfrac{I_r}{A_{rt} l^2}}; \tag{2}$$

γ — coeficient care introduce influența deformabilității axiale a montanților și care are expresia [2] [3] [4]:

$$\gamma = 1 + \frac{4 I_m}{A_m L^2}; \tag{3}$$

I_0 — momentul de inerție total al secțiunii transversale a diafragmei cu goluri:

$$I_0 = 2 I_m + 2 A_m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} I_m; \tag{4}$$

Q_{vi} — forța orizontală concentrată la nivelul (i) al clădirii, din acțiunea vîntului;

$V = \sum_1^n Q_{vi} = n\,Q_{vi}$ — rezultanta forţelor orizontale din acţiunea vîntului, pe diafragma considerată;

$q_v = \frac{Q_{vi}}{h} = \frac{V}{H}$ — forţa orizontală uniform distribuită echivalentă forţelor concentrate Q_{vi};

Q_{si} — forţa orizontală concentrată la nivelul (i), din acţiunea cutremurului;

$S = \sum_1^n Q_{si} = \frac{(n+1)}{2} Q_{sn}$ — rezultanta forţelor orizontale din acţiunea cutremurului, pe diafragma considerată;

$q_s = \frac{Q_{sn}}{h} = \frac{2\,nS}{(n+1)H}$ — mărimea la extremitatea superioară a diafragmei, a încărcării distribuite triunghiular echivalente forţelor Q_{si}.

2.2. PARAMETRI CONSIDERAŢI

Tabelele pentru determinarea rigidităţilor la deplasări laterale ale diafragmelor cu goluri şi a cadrelor etajate au fost calculate în funcţie de următorii parametri:

— numărul de niveluri n;

— raportul λ între rigidităţile K_r ale riglelor şi rigidităţile K_m ale montanţilor;

— coeficientul γ.

Expresia (3) a coeficientului γ se mai poate scrie sub forma

$$\gamma = 1 + \frac{4\,I_m}{A_m L^2} = \frac{1}{1 - 2\,\frac{I_m}{I_0}}, \tag{5}$$

deci γ este de fapt funcţie numai de raportul I_m/I_0. S-a preferat totuşi ca pentru caracterizarea deformabilităţii axiale a montanţilor să se utilizeze în locul raportului I_m/I_0 coeficientul γ, deoarece prezintă avantajul că variază în limite restrînse chiar la o variaţie largă a raportului I_0/I_m (pentru $I_0/I_m = 6 \ldots \infty$, γ variază numai între 1,5 şi 1,0), astfel că interpolarea între coloanele din tabele nu comportă erori mari.

De altfel, acelaşi coeficient apare, cu alte notaţii, şi în relaţiile din metoda cunoscută a lui *Albigès* şi *Goulet* [2] [4] [5].

Tabelele sînt date pentru două tipuri de încărcări orizontale:

— uniform distribuită (q_v), corespunzătoare acţiunii vîntului;

— distribuită triunghiular (q_s), corespunzătoare încărcărilor seismice.

Este de menţionat că întregul calcul s-a efectuat considerînd forţele orizontale concentrate la noduri Q_{vi}, Q_{si} ca în figura 4, iar numai la sfîr-

șitul calculului, pentru a pune rezultatele sub o formă mai comod utilizabilă, s-a făcut echivalarea cu q_v, q_s, cu ajutorul relațiilor de transformare date mai sus la § 2.1. Gradul de exactitate în plus obținut în acest mod contează cu atît mai mult cu cît numărul de niveluri este mai mic.

2.3. PROCEDEUL DE CALCUL UTILIZAT

Așa cum s-a arătat mai înainte, metoda de bază aplicată a fost metoda deplasărilor, folosind ca necunoscute ale sistemului de ecuații de condiție distorsiunile Întrucît acestea reprezintă rotiri de noduri cu deplasări laterale libere, deci cu forțe tăietoare nule în montanți, rezultă că forțele tăietoare din montanți nu sînt influențate de valorile distorsiunilor, rămînînd egale cu cele din sistemul de bază (în sistemul de ecuații, forțele tăietoare intervin numai în termenii liberi).

Aceasta a reprezentat un avantaj pentru sistematizarea calculului deplasărilor laterale, care a putut fi efectuat separat pentru :

— deformațiile produse de momentele încovoietoare și de eforturile axiale din montanți ;

— deformațiile produse de forțele tăietoare din montanți, însumînd la sfîrșit cele două componente. În tabele au fost dați coeficienți numai pentru calculul primei din cele două componente de mai sus, sub forma de momente de inerție echivalente, cu care această componentă se calculează apoi ca pentru o diafragmă plină. Se adaugă la aceasta suplimentul de săgeată produs de forțele tăietoare din montanți, tot ca pentru o diafragmă plină, dîndu-se pentru termenul respectiv formulele de calcul necesare, care sînt foarte simple și nu necesită o întabulare.

Problema principală a calculului a constat în modul de luare în considerare a deformabilității axiale a montanților, de care nu se ține seama în general la calculul cadrelor etajate obișnuite, dar care, după cum se va vedea în continuare, poate deveni un factor preponderent în cazul diafragmelor cu goluri.

S-a pornit de la procedeul iterativ propus de *D. Coșa* [10], în care calculul cadrelor etajate cu stîlpi axial deformabili se face prin iterarea alternativă a momentelor încovoietoare și a eforturilor axiale din montanți și luarea în considerare tot prin aproximații succesive a influențelor lor reciproce (o generalizare a acestui procedeu este tratată în [3], cap. 20.4). Succesiunea operațiunilor de calcul este următoarea :

a) Se calculează momentele în structura etajată fără luarea în considerare a deformabilității axiale a montanților. Calculul se face în cazul de față prin metoda obișnuită a distorsiunilor.

b) Se determină eforturile axiale în montanți pe baza momentelor astfel calculate.

c) Se blochează rotirile nodurilor și se relaxează deformațiile axiale ale montanților, procedînd la o echilibrare a forțelor verticale prin repartizări și transmiteri ale acestor forțe.

d) Se calculează corecțiile la momentele de încastrare perfectă în rigle datorită deformațiilor axiale ale montanților rezultate din operațiunea precedentă.

e) Se trece din nou la relaxarea distorsiunilor, respectiv se echilibrează momentele, menţinînd blocate deformaţiile axiale ale montanţilor, deci se revine la operaţiunea (a).

f) Se repetă ciclul a...e, pînă cînd corecţiile de la o etapă la alta devin neglijabile.

Faţă de acest procedeu dat în [10] şi adaptat la metoda distorsiunilor, s-a introdus în cazul de faţă o aproximaţie care simplifică considerabil calculul şi anume s-a renunţat în fiecare ciclu la etapa (c). Efectuînd cîteva verificări în raport cu un calcul complet, în cazuri îmbrăcînd un domeniu destul de larg, s-a constatat că aproximaţia admisă introduce erori neînsemnate la valorile săgeţilor.

2.4. DETERMINAREA EFORTURILOR ŞI DEPLASĂRILOR

Întrucît din enumerarea de mai sus a operaţiunilor care intervin cele de la punctele (a) şi (e) sînt cunoscute, în cele ce urmează se prezintă mersul calculului numai pentru operaţiunile (b), (c) şi (d).

2.4.1. Determinarea eforturilor axiale în montanţi pe baza momentelor calculate (operaţiunea b)

Pentru a stabili o relaţie de recurenţă între momentele dintr-o etapă oarecare (m) a iteraţiei şi cele din etapa următoare ($m + 1$), considerăm situaţia din figura 5. *a*, în care sînt cunoscute momentele $M_1^{(m)} \ldots M_n^{(m)}$ la capetele riglelor $1 \ldots n$, din treapta de calcul (m).

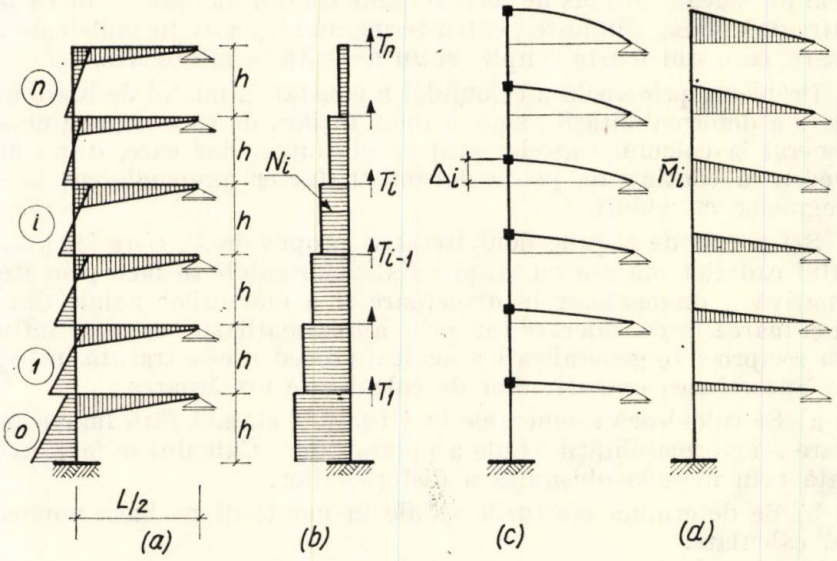


Fig. 5

La capătul unei rigle curente (i), momentul este $M_i^{(m)}$, la care corespunde o forţă tăietoare în riglă :

$$T_i^{(m)} = M_i^{(m)} \frac{2}{L}.$$

Efortul axial în montantul de la un nivel oarecare k se obține prin însumarea reacțiunilor $T_i^{(m)}$ transmise de riglele de la nivelurile $k \ldots n$ (fig. 5.*b*).

$$N_i^{(m)} = \sum_k^n T_i^{(m)} = \frac{2}{L} \sum_k^n M_i^{(m)}.$$

2.4.2. Deformațiile axiale ale montanților (operațiunea c)

Deformația axială a montantului (i), cumulată pe înălțimea etajului respectiv, este (fig. 5.*c*)

$$\delta_i^{(m)} = \frac{N_i^{(m)} h}{E_m A_m} = \frac{2\,h}{E_m A_m L} \sum_k^n M_i^{(m)}.$$

Deplasarea totală pe verticală a nodului (k) se obține prin însumarea deformațiilor axiale ale montanților de la etajele $1 \ldots k$.

$$\Delta_k^{(m)} = \sum_1^k \delta_i^{(m)} = \frac{2\,h}{E_m A_m L} \sum_1^k \sum_k^n M_i^{(m)} =$$

$$= \frac{2h}{E_m A_m L} \left[\sum_1^n M_i^{(m)} + \sum_2^n M_i^{(m)} + \ldots + \sum_k^n M_i^{(m)} \right] =$$

$$= \frac{2h}{E_m A_m L} \left[M_1^{(m)} + 2\,M_2^{(m)} + 3M_3^{(m)} + \ldots + (k-1)M_{k-1}^{(m)} + k \sum_k^n M_i^{(m)} \right] =$$

$$= \frac{2h}{E_m A_m L} \left[\sum_1^{k-1} i\,M_i^{(m)} + k \sum_k^n M_i^{(m)} \right].$$

2.4.3. Momentele de încastrare perfectă în rigle (operațiunea d)

Rotirea de bară $\psi_k^{(m)}$ a riglei (k) va fi

$$\psi_k^{(m)} = \frac{2\Delta_k^{(m)}}{L} = \frac{4h}{E_m A_m L^2} \left[\sum_1^{k-1} i\,M_i^{(m)} + k \sum_k^n M_i^{(m)} \right].$$

Momentul de încastrare perfectă corespunzător la capătul riglei (k), cu care se începe în continuare treapta următoare ($m+1$) a iterației, se obține înmulțind pe $\psi_k^{(m)}$ cu rigiditatea la distorsiune a riglei:

$$K_r = \lambda K_m = \lambda \frac{E_m I_m}{h},$$

$$\bar{M}_k^{(m+1)} = \frac{4\,h}{E_m A_m L^2} \left[\sum_1^{k-1} i\,M_i^{(m)} + k \sum_k^n M_i^{(m)} \right] \lambda \frac{E_m I_m}{h}.$$

Făcînd toate reducerile şi înlocuind, conform relaţiei (5), $4I_m/A_mL^2 = \gamma - 1$, se obţine relaţia de recurenţă căutată, sub forma

$$\bar{M}_k^{(m+1)} = \lambda(\gamma - 1)\left[\sum_1^{k-1} i\, M_i^{(m)} + k \sum_k^n M_i^{(m)}\right]. \tag{6}$$

Cu momentele de încastrare perfectă astfel calculate (fig. 5.*d*), se intră din nou în operaţiunea (e).

2.4.4. Calculul deplasărilor laterale

Efectuînd calculul complet în modul arătat la § 2.3, s-au obţinut valorile momentelor la capetele riglelor şi montanţilor. Cu aceste momente, s-a determinat deplasarea la nivelul caracteristic (nivelul planşeului cel mai apropiat de $0{,}8\,H$) pentru fiecare din cele două tipuri de încărcări luate în consideraţie (vînt şi cutremur).

Pentru deplasarea laterală la nivelul caracteristic rezultă o expresie de forma :

— pentru acţiunea vîntului :

$$f_v = \alpha_v \frac{q_v H^4}{E_m I_{ev}} + \beta_v \frac{q_v H^2}{2\, G_m A_{mt}}, \tag{7}$$

— pentru acţiunea cutremurului :

$$f_s = \alpha_s \frac{q_s H^4}{E_m I_{es}} + \beta_s \frac{q_s H^2}{2\, G_m A_{mt}}. \tag{8}$$

În ambele expresii, primul termen reprezintă săgeata produsă de momentele încovoietoare şi de eforturile axiale din montanţi, iar cel de-al doilea reprezintă săgeata produsă de forţele tăietoare din montanţi. Semnificaţiile notaţiilor din formulele (7) şi (8) :

I_{ev}, I_{es} — momentele de inerţie echivalente ale diafragmei cu goluri, care cuprind influenţa deformaţiilor produse de momentele încovoietoare şi de eforturile axiale din montanţi şi cu care în continuare săgeata se calculează ca pentru o diafragmă plină (I_{ev}, I_{es} s-au obţinut egalînd deplasarea la nivelul caracteristic a diafragmei reale cu goluri cu deplasarea la acelaşi nivel a unei console cu secţiune plină);

α_v, β_v, α_s, β_s — coeficienţi numerici care depind numai de poziţia nivelului caracteristic;

$G_m = 0{,}425\ E_m$ — modulul de elasticitate transversal pentru montanţi.

Formulele (7) și (8) se pot scrie, scoțînd în factor comun primul termen :

$$f_v = \alpha_v \cdot \frac{q_v H^4}{E_m I_{ev}} \left(1 + \frac{\beta_v}{\alpha_v} \cdot \frac{I_{ev}}{2 \times 0{,}425\, A_{mt} H^2}\right),$$

$$f_s = \alpha_s \cdot \frac{q_s H^4}{E_m I_{es}} \left(1 + \frac{\beta_s}{\alpha_s} \cdot \frac{I_{es}}{2 \times 0{,}425\, A_{mt} H^2}\right),$$

de unde apoi pot fi aduse la forma

$$f_v = \alpha_v \cdot \frac{q_v H^4}{E_m \bar{I}_{ev}}; \quad f_s = \alpha_s \cdot \frac{q_s H^4}{E_m \bar{I}_{es}}, \tag{9}$$

în care s-a notat

$$\bar{I}_{ev} = I_{ev} \frac{1}{1 + \frac{\beta_v}{0{,}425\ \alpha_v} \cdot \frac{I_{ev}}{2\, A_{mt} H^2}},$$

$$\bar{I}_{es} = I_{es} \frac{1}{1 + \frac{\beta_s}{0{,}425\ \alpha_s} \cdot \frac{I_{es}}{2\, A_{mt} H^2}}, \tag{10}$$

$\bar{I}_{ev}$, $\bar{I}_{es}$ au semnificația unor momente de inerție echivalente ale diafragmei, corectate ținînd seama de influența tuturor tipurilor de deformații ale montanților : momente încovoietoare, eforturi axiale și forțe tăietoare.

Rigiditatea unei diafragme la deplasarea laterală f_v va fi definită prin încărcarea q_v necesară pentru a produce o deplasare $f_v = 1$ la nivelul considerat. Deci

$$f_v = \alpha_v \frac{q_v H^4}{E_m \bar{I}_{ev}} = 1, \quad \text{de unde}$$

$$q_v = K_v \text{ (rigiditatea diafragmei)} = \frac{E_m \bar{I}_{ev}}{\alpha_v H^4}. \tag{11}$$

La fel pentru f_s :

$$K_s = \frac{E_m \bar{I}_{es}}{\alpha_s H^4}, \tag{12}$$

K_v, K_s sînt proporționale cu $\bar{I}_{ev}$, $\bar{I}_{es}$, astfel că *repartiția forțelor orizontale între diafragmele care compun o structură se poate face direct proporțional cu momentele de inerție echivalente corectate* $\bar{I}_{ev}$, $\bar{I}_{es}$, *fără a mai fi necesară determinarea rigidităților* K_v, K_s.

Se observă că forţele orizontale care se distribue în acest mod între diafragme sînt chiar încărcările q_v (uniform distribuită) şi q_s (distribuită triunghiular), care rămîn la fel distribuite pe fiecare diafragmă în parte.

Primită la redacţie la 23 mai 1974

BIBLIOGRAFIE

1. A. C I.-Committee 442: *Response of buildings to lateral forces*, Journal of the American Concrete Institute, *2* (1971).
2. AGENT, *R., Calculul diafragmelor cu goluri după metoda Albigès-Goulet este un calcul de diafragmă sau un calcul de cadru etajat?* Rev. Construcţiilor şi a mat. de construcţii, *6* (1965).
3. *Sisteme reticulare nedeterminate*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1970, Cap. 23.5. Diafragme simetrice cu un şir de goluri axial.
4. AGENT, R., POSTELNICU, T. IONIŢĂ, M.: *Indicaţii provizorii pentru proiectarea structurilor cu diafragme din beton armat la clădiri etajate* (ISART — ICB, P.T. 916—91), oct. 1971.
5. ALBIGÈS, M. şi GOULET, J., *Contreventement des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, mai 1960.
6. AVRAM, C., ANASTASESCU, D., MÎRŞU, O., MUNTEANU, I., *Consideraţii asupra diafragmelor-cadre din beton armat*, Rev. Construcţiilor şi a mat. de construcţii, *1* (1967).
7. AVRAM, C., ANASTASESCU, D., MÎRŞU, O., MUNTEANU, I., *Untersuchungen zur Berechnung und zum Verhalten der aus Rahmen und Scheiben gebildeten Stahlbetontragwerke für Hochhäuser, unter Horizontallast*, Beton- und Stahlbetonbau, *6* şi *7* (1970).
8. BECK, H.: *Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestellt am Beispiel des Vierendeelträgers*, Der Bauingenieur, *12* (1956).
9. — *Contribution to the analysis of coupled shear walls*, Journal of the American Concrete Institute, *8* (1962).
10. COŞA, D., *Considerarea deformabilităţii axiale a barelor în metoda deplasărilor*, Rev. Construcţiilor şi a mat. de construcţii, *4* (1966).
11. DECAUCHY, A., *Contreventement des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtimet et des travaux publics, ian. 1964.
12. DELQUÉ, J., *Distribution des efforts dus au vent entre plusieurs éléments de contreventement. Calcul des sollicitations internes dans les éléments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, mai 1973.
13. DESPEYROUX, J. *Shear walls with n raws of openings*, Symposium on Tall Buildings, Proceedings, University of Southampton, apr. 1966.
14. DESPEYROUX, J., *Analyse statique et dynamique des contreventements par consoles élémentaires solidarisés par des milieux élastiques*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, febr. 1972.
15. DIACONU, M., *Determinarea stării de eforturi în diafragmele cu goluri cînd se ia în considerare şi influenţa forţei tăietoare*, Construcţii, *12* (1971).
16. FLORIAN, V., *Contribuţii privind calculul la forţe orizontale a structurilor alcătuite din diafragme*, St. cerc. mec. apl., *6* (1964).
17. FLORIAN, V.: *Calculul la forţe orizontale al pereţilor cu un şir de goluri în poziţie pronunţat disimetrică*, St. cerc. mec. apl., *1* (1967).
18. GREEN, N. B., *Factors in the aseismic design of reinforced concrete shear walls without openings*, Journal of the American Concrete Institute, *8* (1968).
19. GUILLOT, V., *Influence des ouvertures dans la stabilité des bâtiments de grande hauteur — Refends à N files d'ouvertures*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, *2* (1972).
20. HANGAN, M. D., *Construcţii de beton armat*, Ed. Technică, Bucureşti, 1963. Cap. VIII. Construcţii rigidizate prin diafragme.
21. I.S.A.R.T., *Institutul de Construcţii Bucureşti*, Instrucţiuni tehnice provizorii pentru proiectarea construcţiilor cu structura din diafragme de beton armat, N — 66 — 2. Redactarea din mai 1973.
22. KEINTZEL, E., *Calculul cadrelor etajate simetrice cu o singură deschidere cu stîlpi axial-defor-*

mabili la forțe orizontale, Rev. Construcțiilor și a mat. de construcții, *1* (1967).
23. KEINTZEL, E.,*Calculul simplificat al diafragmelor cu goluri nesimetrice la sarcini orizontale*, Rev. Construcțiilor și a mat. de construcții, *3* (1968).
24. — *Metode simplificate pentru calculul construcțiilor multietajate*, Ed. Tehnică, București 1969.
25. — *Calculul static de ordinul II al construcțiilor multietajate cu diafragme*, Construcții *1* (1972).
26. LERNER, E., *Abaque pour la détermination de l'inertie des refends avec des ouvertures de moyennes dimensions*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, oct. 1966.
27. LERNER, E., *Asupra calculului diafragmelor la acțiuni seismice*, Rev. Construcțiilor și a mat. de construcții, *2* (1968).
28. LERNER, E., MAGER, V., *Programe pentru calculul la solicitări seismice a structurilor de beton armat alcătuite din diafragme pline și cu goluri, cadre, diafragme și cadre*, A V-a Conferință de betoane, Timișoara, 1972, vol. II, pag. 599—620.
29. LIPHARDT, S., *Hochhäuser unter horizontalen Lasten*, Beton- und Stahlbetonbau, *8* (1971).
30. LUPAS, A., *Îndrumar pentru calculul structurilor multietajate din beton armat la acțiunea sarcinilor seismice* (IPCT — 4203/III), dec. 1967.
31. MAGER, V., LERNER, E., IOSUB, I., *Solicitări seismice la clădiri înalte*, Construcții, *8* (1973).
32. MÎRȘU, O., VUC, L., *Metode de calcul al diafragmelor la acțiuni seismice*, Rev. Construcțiilor și a mat. de construcții, *6* (1963).
33. PENELIS, G., *Eine Verbesserung der R. Rosman-H. Beck-Methode*, Der. Bauingenieur, *12* (1969).
34. ROSMAN, R., *Die statische Berechnung von Hochhauswänden mit Öffnungsreihen*, W. Ernst & Sohn, Berlin, 1965.
35 ROSMAN, R., *Statik und Dynamik der Scheibensysteme des Hochbaues. Praktische Berechnungsverfahren für Systeme aus gekoppelten vollen Scheiben, gegliederten Scheiben und Stockwerkrahmen*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
36. ROSMAN, R., *Untersuchung von Hochhäusern mit Tragsystem aus einem mittigen Kern und raumabschliessenden Stockwerkrahmen*, Beton-und Stahlbetonbau, *12* (1969).
37. SCHREFLER, B., *Zur Berechnung aussteifender Systeme allgemeiner Art von Hochhäusern*, Beton-und Stahlbetonbau, *9* (1971).
38. ȚIȚARU, E., CIȘMIGIU, AL., *Calculul dinamic și spațial al construcțiilor la cutremur și la alte acțiuni laterale*, Rev. Construcțiilor și a mat. de construcții, *12* (1959).

APLICAREA METODEI MATRICEI DE RIGIDITATE PENTRU ANALIZA COMPORTĂRII ELASTICO-PLASTICE A STRUCTURILOR

de CONSTANTIN AMARIEI

Institutul politehnic Iaşi

În lucrare se prezintă modul de adaptare a metodei deplasărilor sub forma „matricei de rigiditate" pentru analiza elastico-plastică în etape succesive a structurilor plane alcătuite din bare. Se consideră cazul general al structurilor cu forţe axiale mari, indicîndu-se operaţiile pentru efectuarea unei analize complete a comportării structurilor în domeniul elastico-plastic pînă la cedare.

1. INTRODUCERE

Analiza comportării sistemelor în domeniul elastico-plastic reprezintă una din problemele principale ale calculului dincolo de limita elastică şi se referă la stabilirea „evoluţiei" pînă la cedare a structurilor supuse unor încărcări progresive, în scopul determinării următoarelor elemente :

a) ordinea de formare a articulaţiilor plastice ;

b) valorile parametrilor de încărcare, distribuţiile de eforturi şi mărimile deplasărilor corespunzătoare unor stadii intermediare ale intervalului de adaptare statică ;

c) mărimea intervalului dintre articulaţiile plastice succesive, ca parametri de încărcare şi deplasări ;

d) starea de cedare, ca mecanism, parametri de încărcare şi mărimi ale deplasărilor ;

e) modificările produse în cadrul intervalului de adaptare statică de către stările de eforturi remanente, ca rezultat al unor încărcări peste limita de comportare elastică, urmate de descărcări parţiale sau totale şi reîncărcări (cazul sarcinilor variabile ca mărime şi sens).

Necesitatea unei astfel de analize elastico- plastice complete devine evidentă, dacă se au în vedere următoarele considerente :

— La construcţiile în care se dezvoltă forţe axiale mari, ipoteza teoriei plastice simple privind neglijarea influenţei acestor eforturi asupra momentelor capabile ale secţiunilor critice şi asupra rigidităţii barelor structurii nu mai este acceptabilă. În consecinţă, calculul trebuie să cuprindă determinarea în fiecare etapă a distribuţiilor de eforturi (momente încovoietoare şi forţe axiale), pentru a face corecţiile corespunzătoare.

— Calculul în domeniul plastic impune obligativitatea evaluării deplasărilor, în vederea verificării îndeplinirii condiţiilor de exploatare şi a condiţiilor de cedare [1], [2].

— Acţiunea unor sarcini variabile ca mărime şi sens necesită un studiu complet al comportării structurilor în cadrul intervalului de adaptare statică şi al modificării caracteristicilor acestui interval, ca urmare a unor încărcări-descărcări-reîncărcări succesive, ceea ce impune cunoaşterea în fiecare etapă atît a distribuţiilor de eforturi, cît şi a mărimii deplasărilor.

Din punct de vedere teoretic, o analiză a comportării elastico-plastice se reduce la efectuarea unui calcul „biografic", în care scop se pot adapta corespunzător metodele de calcul în domeniul elastic, în condiţiile adoptării unor ipoteze mai mult sau mai puţin restrictive în ceea ce priveşte în special caracteristicile materialului, caracterul articulaţiilor plastice, comportarea structurii în intervalul dintre două articulaţii plastice succesive şi ponderea influenţei anumitor factori (forţe axiale, forţe tăietoare etc.) asupra momentelor capabile ale secţiunilor critice.

În literatura de specialitate sînt propuse o serie întreagă de variante de calcul, care permit o analiză elastico-plastică mai mult sau mai puţin completă, în limita unor restricţii impuse mai ales de ipotezele adoptate [3]... [9] etc.

În lucrarea [10] a fost dezvoltată o cale generală de abordare a analizei elastico-plastice a structurilor, indiferent de metoda de calcul elastic adoptată, atît pentru cazul încărcărilor progresiv crescătoare, cît şi pentru cazul acţiunii unor sarcini variabile ca mărime şi sens.

În lucrarea de faţă se prezintă modul de adaptare a metodei deplasărilor în forma cunoscută sub denumirea de „metodă a matricei de rigiditate", pentru efectuarea unei analize elastico-plastice complete a structurilor plane alcătuite din bare cu secţiune constantă. Se admit doar parţial valabile ipotezele teoriei plastice simple, întrucît se tratează cazul general al structurilor cu forţe axiale mari, ţinîndu-se deci cont de influenţa acestor eforturi asupra evoluţiei elastico-plastice şi se introduc etape de verificare a compatibilităţii deplasărilor, care nu se consideră deci apriori inferioare ca mărime deplasărilor admisibile.

2. CARACTERISTICILE DE RIGIDITATE ALE BARELOR, ŢINÎND CONT DE INFLUENŢA FORŢELOR AXIALE

Trebuie avut în vedere faptul că într-o analiză elastico-plastică în care factorul de încărcare variază progresiv, nu se cunosc la începutul fiecărei etape de calcul valorile forţelor axiale care modifică rigidităţile barelor în etapa respectivă, aceste forţe urmînd să fie determinate abia la sfîrşitul etapei. În consecinţă, pentru determinarea în fiecare etapă a caracteristicilor de rigiditate ale barelor, este necesară o rezolvare prin aproximaţii succesive, utilizînd în prima aproximaţie valorile forţelor axiale de la sfîrşitul etapei precedente. Din acest motiv, expresiile caracteristicilor de rigiditate ale barelor vor fi prezentate într-o formă avantajoasă calculului iterativ (forţa axială din aceste expresii fiind cea corespunzătoare pasului precedent al iteraţiei), pentru cele trei tipuri de bare

care pot exista în structură, într-o analiză elastico-plastică în etape succesive și anume :

a) bare cu legături rigide la ambele capete ;

b) bare cu legătură rigidă într-un capăt și articulație în celălalt capăt ;

c) bare cu articulații în ambele capete.

Se folosesc următoarele notații pentru o bară oarecare (i — j) :

ρ_{ij}, ρ_{ji} — rigiditățile barei la rotire ;

$\bar{\rho}_{ij}$, $\bar{\rho}_{ji}$ — rigiditățile barei la deplasare ;

γ_{ij}, γ_{ji} — coeficienți de transmitere pe bară ;

t_{ij}, t_{ji} — forțe tăietoare produse de rotiri unitare în capetele barei ;

$\bar{t}_{ij}$, $\bar{t}_{ji}$ — forțe tăietoare produse de deplasări relative unitare între capetele barei ;

$\rho_{ij(N)}$ — rigiditatea la forță axială ;

N_{ij} — forța axială în bară ;

I_{ij} — momentul de inerție al secțiunii barei ;

A_{ij} — aria secțiunii barei ;

l_{ij} — lungimea barei ;

E — modulul de elasticitate al materialului.

Cu aceste notații, caracteristicile de rigiditate ale barei $(i — j)$ în prezența forței axiale, într-o etapă oarecare (k) de calcul, au următoarele expresii :

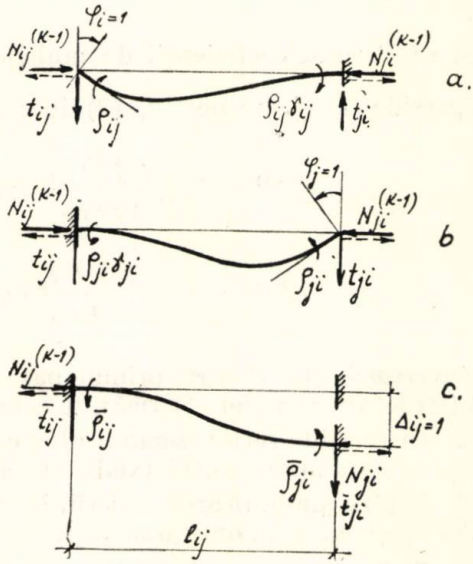


Fig. 1. — Bară cu legături rigide la ambele capete.

a) Bară cu legături rigide la ambele capete (fig. 1).

$$\rho_{ij}^{(k)} = \rho_{ji}^{(k)} = \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}\, l_{ij}^2}{12EI_{ij}}\left(2\eta_1^{(k)} - \eta_2^{(k)}\right)\right], \qquad (1)$$

$$\rho_{ij}^{(k)}\,\gamma_{ij}^{(k)} = \rho_{ji}^{(k)}\,\gamma_{ji}^{(k)} = \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}l_{ij}^2}{6\,EI_{ij}}\,(\eta_1^{(k)} - 2\eta_2^{(k)})\right], \tag{2}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ji}^{(k)} = \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}l_{ij}^2}{6EI_{ij}}\,(\eta_1^{(k)} - \eta_2^{(k)})\right], \tag{3}$$

$$\bar{\rho}_{ij}^{(k)} = \bar{\rho}_{ji}^{(k)} = \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}\,l_{ij}^2}{6\,EI_{ij}}\,(\eta_1^{(k)} - \eta_2^{(k)})\right], \tag{4}$$

$$\tilde{t}_{ij}^{(k)} = \tilde{t}_{ji}^{(k)} = \frac{12\,EI_{ij}}{l_{ij}^3}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}\,l_{ij}^2}{6\,EI_{ij}}\,(\eta_1^{(k)} - \eta_2^{(k)})\right], \tag{5}$$

$$\rho_{ij(N)} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}}. \tag{6}$$

În aceste relaţii, mărimile $\eta_1^{(k)}$ şi $\eta_2^{(k)}$ se determină astfel:

$$\eta_1^{(k)} = 1{,}1\,c_2^{(k-1)} - 0{,}8c_1^{(k-1)}, \tag{7a}$$

$$\eta_2^{(k)} = 0{,}4\,c_2^{(k-1)} - 0{,}2\,c_1^{(k-1)}, \tag{7b}$$

$c_1^{(k-1)}$ şi $c_2^{(k-1)}$ fiind coeficienţii de multiplicare ai factorilor $\frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}$ şi $\frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}$ din expresiile (1) şi, respectiv, (2) în pasul precedent al iteraţiei, deci

$$c_1^{(k-1)} = 1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-2)}\,l_{ij}^2}{12EI_{ij}}\,(2\eta_1^{(k-1)} - \eta_2^{(k-1)}), \tag{8a}$$

$$c_2^{(k-1)} = 1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-2)}\,l_{ij}^2}{6\,EI_{ij}}\,(\eta_1^{(k-1} - 2\eta_2^{(k-1)}). \tag{8b}$$

Observaţii. 1. Pentru primul pas al iteraţiei din prima etapă de calcul (structura complet elastică), se consideră $N_{ij}^{(0)} = 0$, deci $c_1^{(0)} = c_2^{(0)} = 0$.

2. În relaţiile scrise, semnul plus corespunde forţei axiale de întindere, iar semnul minus forţei axiale de compresiune (unde apare $\pm$).

3. Pentru simplificarea scrierii, în notarea lui $\eta_1^{(k)}$ şi $\eta_2^{(k)}$ şi a coeficienţilor c_1 şi c_2, s-au omis indicii (i, j) ai barei.

4. Se pot deduce şi expresiile coeficienţilor de transmitere:

$$\gamma_{ij}^{(k)} = \gamma_{ji}^{(k)} = \frac{1}{2}\,\frac{12EI_{ij} \pm 2N_{ij}^{(k-1)}\,l_{ij}^2(\eta_1^{(k)} - 2\,\eta_2^{(k)})}{12EI_{ij} \pm N_{ij}^{(k-1)}\,l_{ij}^2(2\,\eta_1^{(k)} - \eta_2^{(k)})}. \tag{9}$$

b) Bară cu legătură rigidă în capătul i și articulație în capătul j (fig. 2)

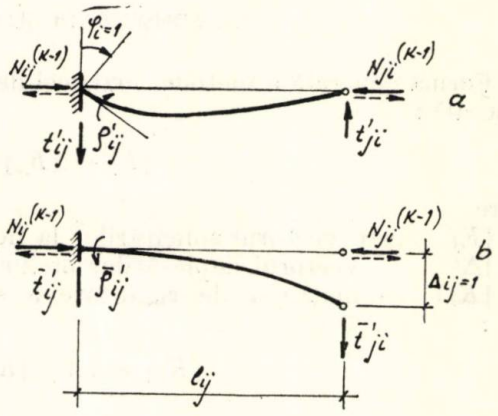


Fig. 2. — Bară cu legătură rigidă la un capăt și articulație la celălalt capăt.

$$\rho_{ij}'^{(k)} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}\, l_{ij}^2}{6EI_{ij}}\,\eta_3^{(k)}\right], \tag{10}$$

$$t_{ij}'^{(k)} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}^2}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}\, l_{ij}^2}{6\,EI_{ij}}\,\eta_3^{(k)}\right], \tag{11}$$

$$\bar{\rho}_{ij}'^{(k)} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}^2}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}\, l_{ij}^2}{6EI_{ij}}\,\eta_3^{(k)}\right], \tag{12}$$

$$\bar{t}_{ij}'^{(k)} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}^3}\left[1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-1)}\, l_{ij}^2}{6EI_{ij}}\,\eta_3^{(k)}\right], \tag{13}$$

$$\rho_{ij(N)}'^{(k)} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}}. \tag{14}$$

În aceste relații, $\eta_3^{(k)}$ se determină astfel :

$$\eta^{(k)} = -1 - 0{,}6\, c^{(k-1)}, \tag{15}$$

$c_3^{(k-1)}$ având expresia

$$c_3^{(k-1)} = 1 \pm \frac{N_{ij}^{(k-2)}\, l_{ij}^2}{6EI_{ij}}\,\eta_3^{(k-1)}. \tag{16}$$

Dacă legăturile sînt inversate (articulație în i și legătură rigidă în j), expresiile caracteristicilor de rigiditate sînt similare cu cele din cazul precedent, adică $\rho_{ji}'^{(k)} = \rho_{ij}'^{(k)}$, $t_{ji}'^{(k)} = t_{ij}'^{(k)}$, $\bar{\rho}_{ji}'^{(k)} = \bar{\rho}_{ij}'^{(k)}$, $\bar{t}_{ji}'^{(k)} = \bar{t}_{ij}'^{(k)}$ iar rigiditatea la forță axială $\rho_{ij(N)}^{(k)}$ se determină cu relația (14).

c) Bară articulată la ambele capete.

Rigiditatea la forță axială a barei are și în acest caz expresia (6).

3. ADAPTAREA METODEI MATRICEI DE RIGIDITATE PENTRU ANALIZA ELASTICO-PLASTICĂ ÎN ETAPE SUCCESIVE

3.1. CONSIDERAȚII GENERALE

Forma generală a metodei matricei de rigiditate este dată de relația matriceală :

$$\{F\} = [K_s]\{\Delta\}, \tag{17}$$

în care

$\{F\}$ este vectorul solicitărilor la noduri ;
$\{\Delta\}$ — vectorul deplasărilor nodurilor ;
$[K_s]$ — matricea de rigiditate a structurii, care se determină astfel :

$$[K_s] = [A]^T [K] [A], \tag{18}$$

unde

$[A]$ reprezintă matricea de transformare a deplasărilor $\{\Delta\}$ ale nodurilor în deformații $\{D\}$ ale capetelor de bare, pe baza relației

$$\{D\} = [A]\{\Delta\}, \tag{19}$$

$[K]$ — matricea cvasidiagonală asamblată din matricele k_i de rigiditate ale barelor :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_m \end{bmatrix}, \tag{20}$$

m reprezentînd numărul de bare ale structurii.

În cazul structurilor plane cu bare în care apar forțe axiale mari, matricea de rigiditate a unei bare cu legături rigide la ambele capete are dimensiunile 4×4, relația de determinare a eforturilor din capetele barei fiind de forma

$$\{s\} = [k]\{d\} \tag{21a}$$

sau

$$\begin{Bmatrix} M_{ij} \\ M_{ji} \\ N_{ij} \\ T_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{ij} \\ \varphi_{ji} \\ \Delta_{ij} \\ u_{ij} \end{Bmatrix}. \tag{21b}$$

Elementele vectorilor $\{s\}$ și $\{d\}$ sînt indicate în figura 3.

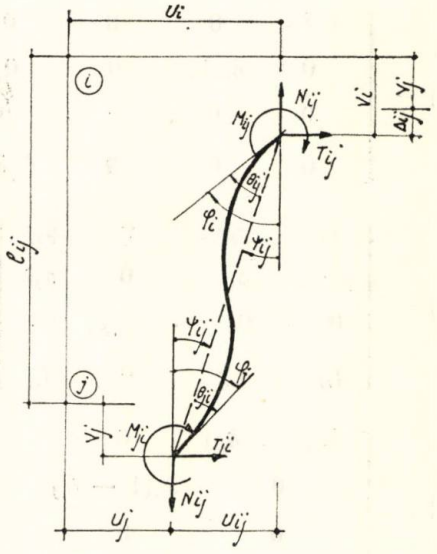


Fig. 3. — Eforturi și deformații la bara cu legături rigide la ambele capete.

3.2. MATRICEA DE RIGIDITATE A BARELOR

Datorită formării succesive a articulațiilor plastice, anumite bare își schimbă caracteristicile de rigiditate, ceea ce trebuie să se reflecte în modificări corespunzătoare ale elementelor matricelor de rigiditate ale barelor respective și în ultimă instanță în modificarea de la o etapă la alta a matricei de rigiditate a structurii.

Se prezintă o formă generală de alcătuire a matricelor de rigiditate ale barelor, care se utilizează în toate etapele analizei elastico-plastice, modificarea caracteristicilor de rigiditate și deci a elementelor acestor matrice fiind realizată prin introducerea unor simboluri de alternanță δ_{ij} pentru fiecare capăt de bară, cu alternativele :

$$\delta_{ij} = 1 \text{ dacă } M_{ij} < M_{ij}^{(p)}, \tag{22a}$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ dacă } M_{ij} = M_{ij}^{(p)}, \tag{22b}$$

M_{ij} reprezentînd momentul în capătul i al barei $(i - j)$ într-o etapă oarecare de calcul, iar $M_{ij}^{(p)}$ momentul plastic al secțiunii aceluiași capăt de bară.

Matricea de rigiditate a unei bare se va exprima — pentru scopul propus — ca o sumă a două produse de matrice :

$$[k] = [b]\,[k_1] + [c]\,[k_2]. \tag{23}$$

Pentru cazul barelor la care se ţine cont şi de influenţa forţelor axiale, cele patru matrice din relaţia (23) au următoarele forme :

$$[b] = \begin{bmatrix} \delta_{ij}\delta_{ji} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij}\delta_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{ij}\delta_{ji} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \rho_{ij} & \rho_{ji}\gamma_{ji} & 0 & \bar{\rho}_{ij} \\ \rho_{ij}\gamma_{ij} & \rho_{ji} & 0 & \bar{\rho}_{ji} \\ 0 & 0 & \rho_{ij(N)} & 0 \\ t_{ij} & t_{ji} & 0 & \bar{t}_{ij} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} \delta_{ij}(1-\delta_{ji}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ji}(1-\delta_{ij}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{ij}(1-\delta_{ji}) & \delta_{ji}(1-\delta_{ij}) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$[k_2] = \begin{bmatrix} \rho'_{ij} & 0 & 0 & \bar{\rho}'_{ij} \\ 0 & \rho'_{ji} & 0 & \bar{\rho}'_{ji} \\ t'_{ij} & 0 & 0 & \bar{t}'_{ij} \\ 0 & t'_{ji} & 0 & \bar{t}'_{ji} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Elementele matricei de rigiditate a unei bare vor avea, în consecinţă următoarele expresii generale :

$$k_{11} = \delta_{ij}\delta_{ji}\rho_{ij} + \delta_{ij}(1-\delta_{ji})\,\rho'_{ij}, \tag{28}$$

$$k_{21} = \delta_{ij}\delta_{ji}\rho_{ij}\gamma_{ij}, \tag{29}$$

$$k_{41} = \delta_{ij}\delta_{ji}t_{ij} + \delta_{ij}(1-\delta_{ji})t'_{ij}, \tag{30}$$

$$k_{12} = \delta_{ij}\delta_{ji}\rho_{ji}\gamma_{ji}, \tag{31}$$

$$k_{22} = \delta_{ij}\delta_{ji}\rho_{ji} + \delta_{ji}(1-\delta_{ij})\rho'_{ji}, \tag{32}$$

$$k_{42} = \delta_{ij}\delta_{ji}t_{ji} + \delta_{ji}(1-\delta_{ij})\,t'_{ji}, \tag{33}$$

$$k_{33} = \rho_{ij(N)}, \tag{34}$$

$$k_{14} = \delta_{ij}\delta_{ji}\bar{\rho}_{ij} + \delta_{ij}(1-\delta_{ji})\bar{\rho}'_{ij}, \tag{35}$$

$$k_{24} = \delta_{ij}\delta_{ji}\bar{\rho}_{ji} + \delta_{ji}(1-\delta_{ij})\,\bar{\rho}'_{ji}, \tag{36}$$

$$k_{44} = \delta_{ij}\delta_{ji}\bar{t}_{ij} + \delta_{ij}(1-\delta_{ji})\,\bar{t}'_{ij} + \delta_{ji}(1-\delta_{ij})\bar{t}'_{ji}. \tag{37}$$

În relaţiile (25), (27) şi (28) ÷ (37), caracteristicile de rigiditate notate cu „prim" corespund barei cu legătură rigidă la un capăt şi articulaţie la celălalt capăt, iar cele fără acest indice corespund barei cu legături rigide la ambele capete.

În acest fel, în funcţie de valorile simbolurilor de alternanţă δ_{ij} şi δ_{ji}, se obţin toate cele patru cazuri posibile de forme ale matricei de rigiditate a barei, corespunzătoare tipurilor de legături din capete.

Dacă nu se ţine cont de influenţa forţei axiale, caracteristicile de rigiditate au formele cunoscute ($N_{ij}^{(k-1)}=0$ în relaţiile prezentate), iar din matricele de rigiditate ale barei dispar linia şi coloana a patra; dacă se neglijează influenţa deformaţiilor axiale, dispar linia şi coloana a treia.

3.3. DETERMINAREA ROTIRILOR DIN CAPETELE BARELOR

Se prezintă mai întîi relaţiile de determinare a rotirilor pentru cele trei tipuri de bare care pot exista în structură, în funcţie de legăturile din capete.

a) Bară cu legături rigide la ambele capete (fig. 4).

În acest caz, rotirile φ_{ij}, φ_{ji} ale capetelor barei sînt egale cu rotirile elastice φ_i, φ_j ale nodurilor din care fac parte, relaţiile de legătură dintre

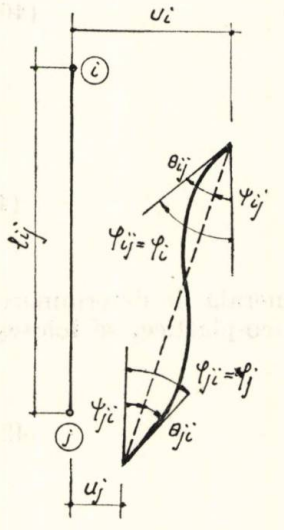


Fig. 4

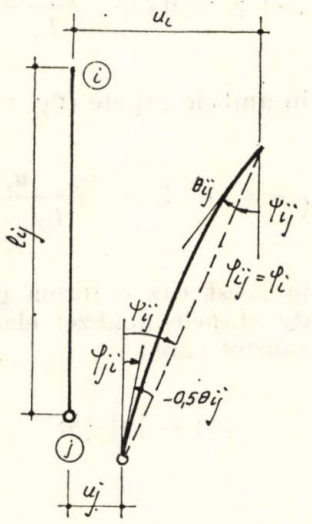


Fig. 5

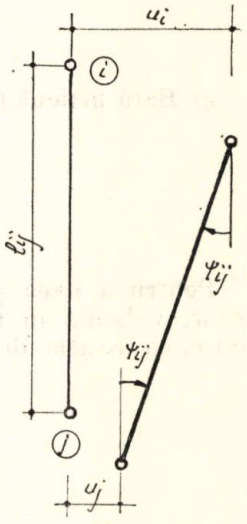


Fig. 6

aceste rotiri şi rotirile θ_{ij}, θ_{ji}, măsurate faţă de dreapta care uneşte capetele deplasate ale barei şi deplasările transversale, u_i, u_j ale capetelor barei, fiind

$$\varphi_{ij} = \varphi_i = \theta_{ij} + \psi_{ij} = \theta_{ij} + \frac{u_i - u_j}{l_{ij}}, \tag{38a}$$

$$\varphi_{ji} = \varphi_j = \theta_{ji} + \psi_{ij} = \theta_{ji} + \frac{u_i - u_j}{l_{ij}}. \tag{38b}$$

b) Bară cu legătură rigidă într-un capăt și articulație în celălalt capăt (fig. 5).

În acest caz, rotirea din capătul articulat nu mai coincide cu rotirea nodului, relațiile de calcul al rotirilor fiind

$$\varphi_{ij} = \varphi_i = \theta_{ij} + \frac{u_i - u_j}{l_{ij}}, \tag{39a}$$

$$\varphi_{ji} = -0{,}5\ \varphi_i + 1{,}5\frac{u_i - u_j}{l_{ij}}. \tag{39b}$$

Dacă bara este articulată în i și cu legătură rigidă în j:

$$\varphi_{ij} = -0{,}5\ \varphi_j + 1{,}5\frac{u_i - u_j}{l_{ij}}, \tag{40a}$$

$$\varphi_{ji} = \varphi_j = \theta_{ji} + \frac{u_i - u_j}{l_{ij}}. \tag{40b}$$

c) Bară articulată în ambele capete (fig. 6)

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ij} = \frac{u_i - u_j}{l_{ij}}. \tag{41}$$

Pentru a avea și în acest caz o formă generală de determinare a rotirilor, valabilă în toate etapele analizei elastico-plastice, se folosește următoarea relație de transformare:

$$\{\varphi\} = [g]\ \{\delta\} \tag{42a}$$

sau

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{ij} \\ \varphi_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \tag{42b}$$

Elementele matricei $[g]$ se alcătuiesc utilizînd simbolurile de alternanță δ_{ij}, δ_{ji} ale căror valori 0 sau 1 — relațiile (22a) și (22b) — conduc la obținerea rotirilor pentru oricare din cele patru cazuri posibile de legături (cele patru cazuri rezultă din faptul că la bara de tipul al doilea, ar-

ticulația poate apărea fie în i, fie în j). Aceste elemente au următoarele forme generale:

$$g_{11} = \delta_{ij}, \tag{43}$$

$$g_{12} = -0{,}5(1 - \delta_{ij})\,\delta_{ji}, \tag{44}$$

$$g_{13} = 1{,}5\,\frac{(1 - \delta_{ij})\,\delta_{ji}}{l_{ij}} + \frac{(1 - \delta_{ij})\,(1 - \delta_{ji})}{l_{ij}}, \tag{45}$$

$$g_{14} = -1{,}5\,\frac{(1 - \delta_{ij})\,\delta_{ji}}{l_{ij}} + \frac{(1 - \delta_{ij})\,(1 - \delta_{ji})}{l_{ij}}, \tag{46}$$

$$g_{21} = -0{,}5(1 - \delta_{ji})\,\delta_{ij}, \tag{47}$$

$$g_{22} = \delta_{ji}, \tag{48}$$

$$g_{23} = 1{,}5\,\frac{(1 - \delta_{ji})\,\delta_{ij}}{l_{ij}} + \frac{(1 - \delta_{ij})\,(1 - \delta_{ji})}{l_{ij}}, \tag{49}$$

$$g_{24} = -1{,}5\,\frac{(1 - \delta_{ji})\,\delta_{ij}}{l_{ij}} - \frac{(1 - \delta_{ij})\,(1 - \delta_{ji})}{l_{ij}}. \tag{50}$$

Rotirile $\varphi_{ij}^{(k)}$ calculate în fiecare etapă a analizei elastico-plastice, se cumulează cu cele din etapa precedentă:

$$\Phi_{ij}^{(k)} = \Phi_{ij}^{(k-1)} \pm \varphi_{ij}^{(k)}, \tag{51}$$

unde

$\Phi_{ij}^{(k-1)}$) reprezintă rotirea cumulată, calculată la sfîrșitul etapei precedente;

$\varphi_{ij}^{(k)}$ — variația rotirii în etapa (k) de creștere sau descreștere a factorului de încărcare, reprezentînd fie rotirea elastică, fie rotirea plastică din capetele în care s-au format articulații plastice.

În mod similar se cumulează și deplasările nodurilor:

$$Y_i^{(k)} = Y_i^{(k-1)} \pm y_i^{(k)}. \tag{52}$$

3.4. DESCRIEREA ETAPELOR DE CALCUL

Utilizînd calea generală bazată pe variația progresivă a factorului de încărcare [10], [16], într-o primă etapă (preliminară) a procesului de calcul, se stabilesc o serie de elemente generale, valabile în toate etapele ulterioare ale analizei elastico-plastice și anume:

— matricea de transformare $[A]$;

— vectorul $\{F\}$, determinat pentru o variație arbitrară λ_a a factorului de încărcare;

— matricele [b] și [c] din relațiile de alcătuire a matricelor de rigiditate ale barelor și matricele [g] din relațiile de determinare a rotirilor din capetele barelor.

Pentru fiecare ciclu (k) de variație a factorului de încărcare, etapele de calcul sînt apoi următoarele (în cele ce urmează, se omite — pentru simplificarea scrierii — indicele (k) al ciclului):

1. Folosind valorile forţelor axiale $N_{ij}^{(k-1)}$ calculate la sfîrşitul ciclului precedent, se determină elementele matricelor de rigiditate $[k]$ ale barelor, ceea ce necesită :

1.a. Determinarea factorilor $\eta_1^{(1)}$, $\eta_2^{(1)}$, $\eta_3^{(1)}$, pe baza relaţiilor (7a), (7b) şi (15).

1.b. Determinarea caracteristicilor de rigiditate ale barelor (relaţiile (1) ÷ (6) pentru barele cu legături rigide în ambele capete, relaţiile (10) ÷ ÷ (14) pentru barele cu legătură rigidă la un capăt şi articulaţie la celălalt capăt şi relaţia (6) pentru barele dublu articulate).

2. Utilizînd calea generală din metoda matricei de rigiditate [11], [12], [13] etc., se determină — pentru o variaţie arbitrară λ_a a factorului de încărcare — distribuţia de momente $\Delta M_{ij}^{(1)}$.

3. Se determină o primă valoare $\lambda^{(1)}$ a factorului de încărcare corespunzătoare formării articulaţiei plastice în ciclul (k), pe calea generală expusă în [10], [16] (operaţiile principale sînt cuprinse în schema logică din figura 7).

4. Se determină distribuţiile de eforturi $M_{ij}^{(1)}$ şi $N_{ij}^{(1)}$ corespunzătoare factorului de încărcare $\lambda^{(1)}$.

5. Se corectează momentele plastice ale secţiunilor critice ţinînd îcont de influenţa forţelor axiale mari [14], [15], [16] etc.

6. Pe baza noilor diferenţe :

$$M_{ij}^{*} = M_{ij}^{(p)^{*}} - M_{ij}^{(1)}, \tag{53}$$

în care

$M_{ij}^{(p)^{*}}$ este momentul plastic al secţiunii critice $(i - j)$, corectat ţinînd cont de influenţa forţei axiale ;

$M_{ij}^{(1)}$ — momentul încovoietor în secţiunea $(i-j)$ determinat în etapa 4, se stabileşte o nouă valoare $\lambda^{(2)}$ pentru factorul de încărcare.

7. Se determină distribuţiile de eforturi $M_{ij}^{(2)}$, $N_{ij}^{(2)}$ corespunzătoare factorului de încărcare $\lambda^{(2)}$.

8. Se recalculează elementele matricelor $[k]$ ale barelor, folosind valorile forţelor axiale determinate în etapa precedentă (în acest caz etapa 7) şi efectuînd operaţiunile din etapa 1.

9. Pentru acelaşi factor de încărcare $\lambda^{(2)}$ determinat în etapa 6, se determină o nouă distribuţie de momente $M_{ij}'^{(2)}$ şi de forţe axiale $N_{ij}'^{(2)}$.

10. Se repetă ciclul 5....9, pînă cînd se obţine precizia necesară.

11. Se calculează deformaţiile structurii (deplasări de noduri şi rotiri ale capetelor de bare), corespunzătoare variaţiei $\lambda^{(k)}$ a factorului de încărcare, în modul indicat în § 3.3.

12. Se determină valorile cumulate ale deformaţiilor şi se verifică compatibilitatea lor cu deformaţiile admisibile.

În cazul general al structurilor cu forţe axiale mari, analiza elastico-plastică în etape succesive cuprinde deci trei procese de iteraţie şi anume :

a) Iteraţia generală de determinare a succesiunii articulaţiilor plastice.

b) Iteraţia de determinare a caracteristicilor de rigiditate ale barelor.

c) Iteraţia de corectare a momentelor plastice ale secţiunilor critice.

Evident că un calcul manual este laborios, dar programarea analizei elastico-plastice efectuată pe calea prezentată, pentru rezolvarea cu ajutorul calculatoarelor cifrice, este relativ simplă.

În figura 7 este prezentată schema operaţiunilor principale de calcul pentru varianta propusă de utilizare a metodei matricei de rigiditate în analiza elastico-plastică a structurilor. În figurile 8, 9 şi 10 sînt prezentate schemele unor blocuri auxiliare şi anume :

Blocul A : Corectarea momentelor plastice ale secţiunilor critice ţinînd cont de influenţa forţelor axiale mari.

Blocul B : Calculul caracteristicilor de rigiditate pentru bare la care, într-o anumită etapă, apar în capete articulaţii plastice.

Blocul C : Calculul deformaţiilor cumulate ale structurii şi verificarea compatibilităţii lor.

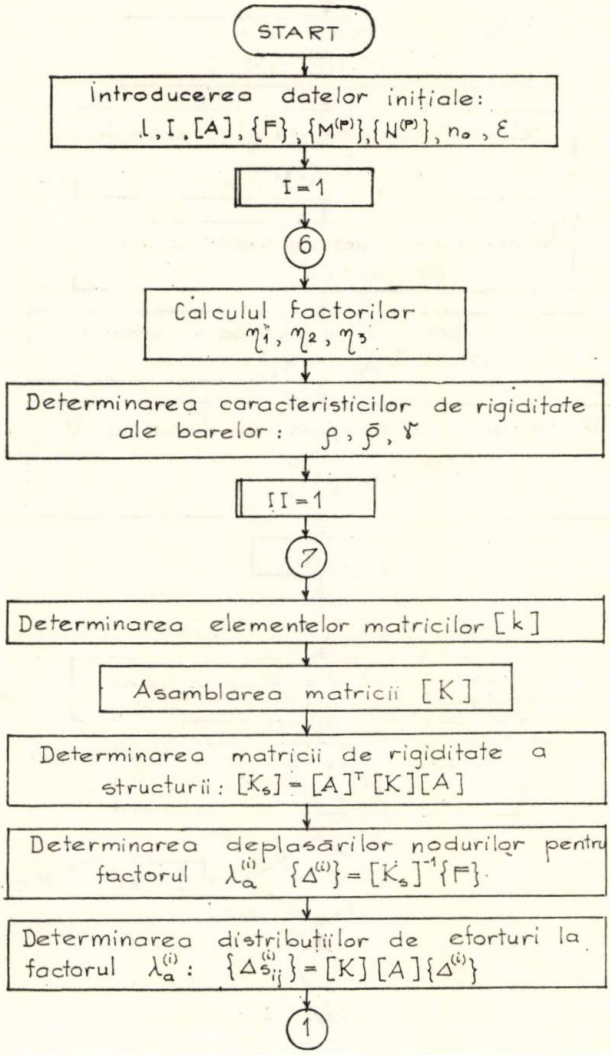


Fig. 7a

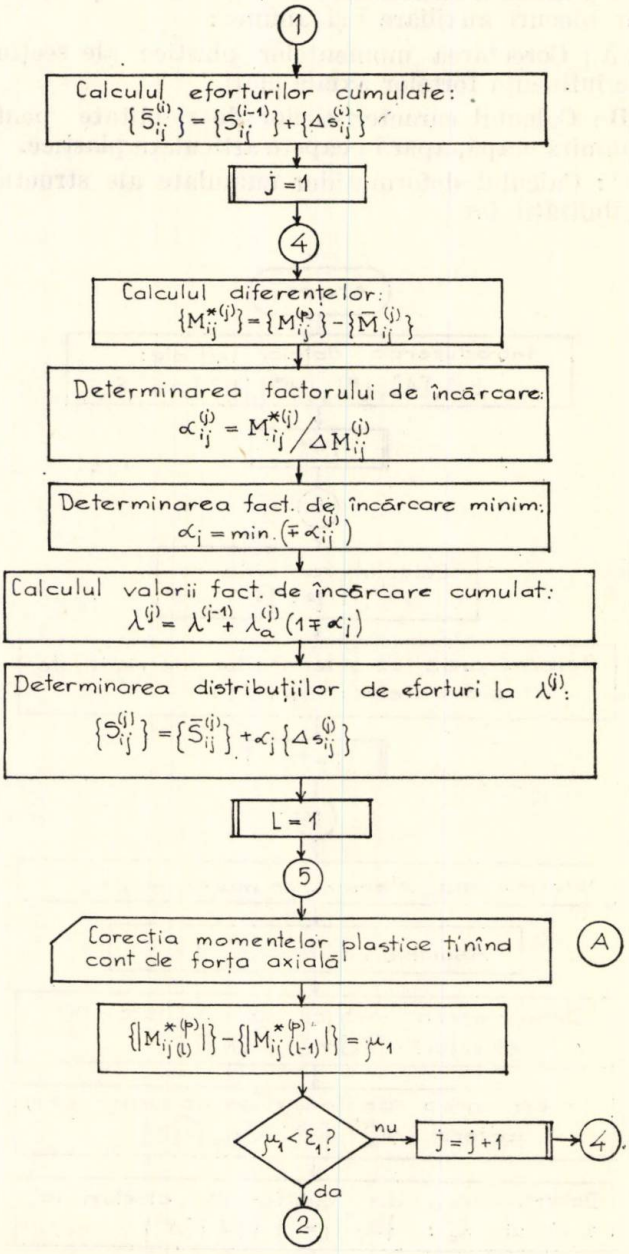
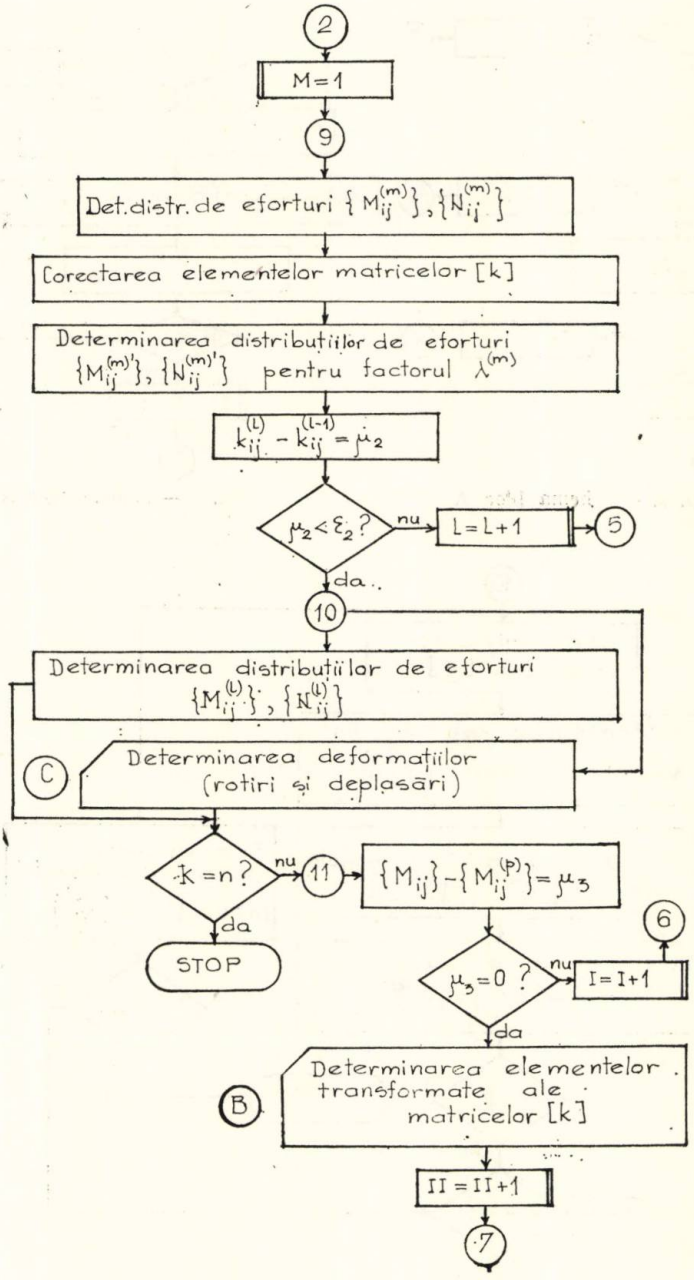

1
Calculul eforturilor cumulate:
$\{\bar{S}_{ij}^{(j)}\} = \{S_{ij}^{(i-1)}\} + \{\Delta s_{ij}^{(j)}\}$
j = 1
4
Calculul diferențelor:
$\{M_{ij}^{*(j)}\} = \{M_{ij}^{(p)}\} - \{\bar{M}_{ij}^{(j)}\}$
Determinarea factorului de încărcare:
$\alpha_{ij}^{(j)} = M_{ij}^{*(j)} / \Delta M_{ij}^{(j)}$
Determinarea fact. de încărcare minim:
$\alpha_j = \min.(\mp \alpha_{ij}^{(j)})$
Calculul valorii fact. de încărcare cumulat:
$\lambda^{(j)} = \lambda^{(j-1)} + \lambda_a^{(j)}(1 \mp \alpha_j)$
Determinarea distribuțiilor de eforturi la $\lambda^{(j)}$:
$\{S_{ij}^{(j)}\} = \{\bar{S}_{ij}^{(j)}\} + \alpha_j \{\Delta s_{ij}^{(j)}\}$
L = 1
5
Corecția momentelor plastice ținînd cont de forța axială
A
$\{|M_{ij(l)}^{*(p)}|\} - \{|M_{ij(l-1)}^{*(p)}|\} = \mu_1$
$\mu_1 < \varepsilon_1$?
nu
j = j + 1
4
da
2

Fig. 7 *b*



c

Fig. 7*a*, *b*, *c*. — Schema operațiunilor de calcul

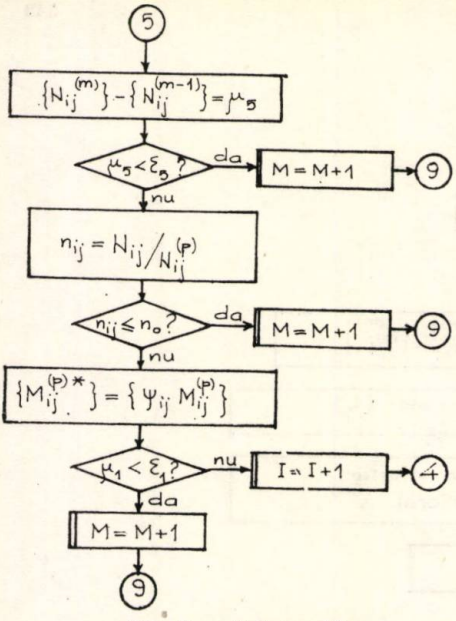


Fig. 8. — Schema bloc A

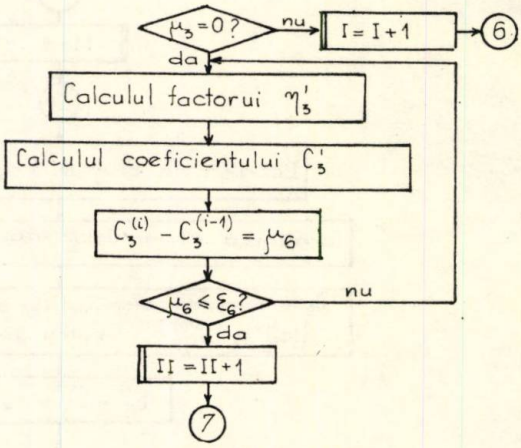


Fig. 9 — Schema bloc B

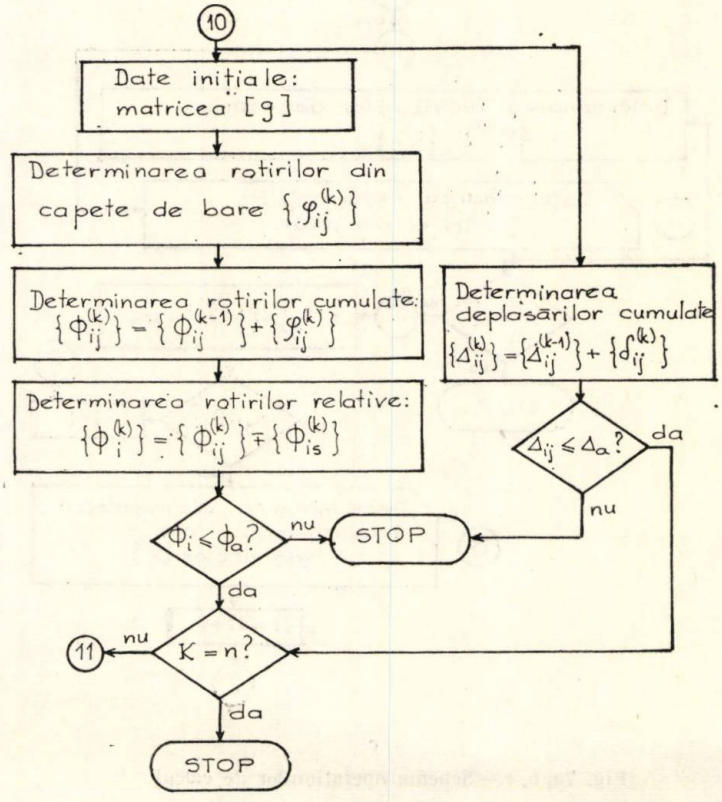


Fig. 10. — Schema bloc C.

4. EXEMPLU DE CALCUL

Se prezintă aplicarea metodei de calcul propuse, pentru analiza comportării elastico-plastice a unui cadru portal cu o singură deschidere, în următoarele două ipoteze de încărcare :

1. *Cadrul încărcat cu o sarcină orizontală* λ (fig. 11*a*), pentru care se efectuează analiza comportării elastico-plastice fără a se ţine cont de influenţa forţelor axiale.

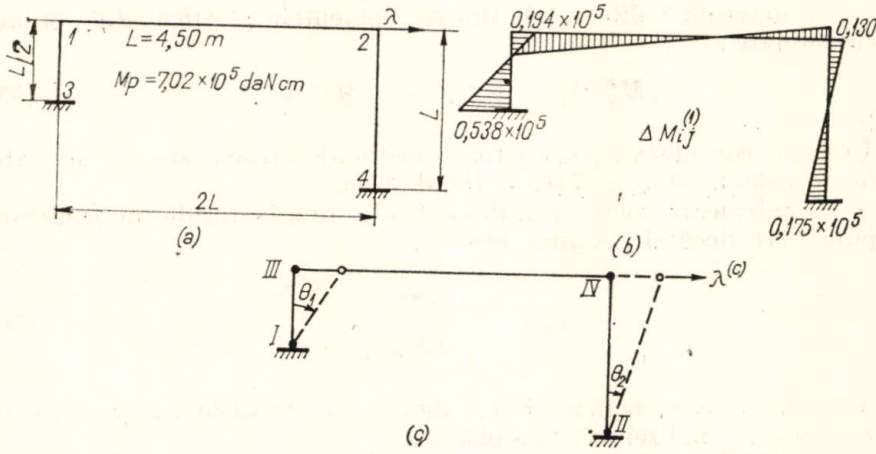


Fig. 11

Avînd în vedere configuraţia şi dimensiunile geometrice ale cadrului, matricea $[A]$ de transformare a deplasărilor nodurilor în deformaţii ale capetelor de bare are — pentru toate etapele analizei elastico-plastice — următoarea alcătuire :

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/225 \\ 1 & 0 & -1/225 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/450 \\ 0 & 0 & -1/450 \end{bmatrix},$$

iar vectorul termenilor liberi este de forma

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}4 \times 10^3 \end{Bmatrix}.$$

Folosind calea generală de rezolvare a cadrului prin metoda matricei de rigiditate, se obţine, pentru valoarea arbitrară a factorului de încărcare $\lambda_a = 0{,}4 \times 10^3$ daN, distribuţia de momente $\{\Delta M_{ij}^{(1)}\}$ din figura 11*b*.

În continuare, calculul se conduce astfel (se descriu operațiile pentru un ciclu oarecare (k) de calcul, valabile pentru toate etapele sintetizate în tabelele 1,2 și 3) [10]:

— Se determină valorile momentelor sumate cu momentele din etapa precedentă:

$$\{\bar{M}_{ij}^{(k)}\} = \{M_{ij}^{(k-1)}\} + \{\Delta M_{ij}^{(k)}\}. \tag{54}$$

Pentru etapa I de calcul, evident, $\{M_{ij}^{(0)}\} = \{0\}$.

— Se determină diferențele dintre momentele plastice $M_{ij(k)}^{(p)}$ și momentele sumate:

$$\{M_{ij}^{*(k)}\} = \{M_{ij(k)}^{(p)}\} - \{|\bar{M}_{ij}^{(k)}|\}. \tag{55}$$

În cazul considerat, pentru toate secțiunile critice și pentru toate etapele de calcul, $M_{ij(k)}^{(p)} = 7{,}02 \times 10^5$ daNcm.

— Se calculează coeficienții de multiplicare a factorului de încărcare corespunzători fiecărei secțiuni critice:

$$\{\alpha_{ij}^{(k)}\} = \frac{\{M_{ij}^{*(k)}\}}{\{|\Delta M_{ij}^{(k)}|\}}. \tag{56}$$

Valorile acestor coeficienți sînt indicate în tebelele 1,2 și 3 pentru fiecare etapă a analizei elastico-plastice.

— Se stabilește secțiunea în care se formează articulația plastică (k) și coeficientul corespunzător de multiplicare a factorului de încărcare, pe baza criteriului:

$$\alpha_k = \min\ (\max)\ \{\pm\ \alpha_{ij}^{(k)}\}. \tag{57}$$

Pentru etapa I de calcul (tabela 1), $\alpha_1 = 12{,}05$.

— Se determină valoarea factorului de încărcare la care se formează articulația plastică (k):

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \lambda_a^{(k)}\ (1 \pm \alpha_k). \tag{58}$$

Pentru etapa I de calcul, rezultă

$$\lambda^{(1)} = 0 + 0{,}4 \times 10^3\ (1 + 12{,}05) = 5{,}18 \times 10^3\ \text{daN}.$$

— Se determină distribuția de momente corespunzătoare factorului de încărcare $\lambda^{(k)}$:

$$\{M_{ij}^{(k)}\} = \{\bar{M}_{ij}^{(k)}\} \pm \alpha_k\{\Delta M_{ij}^{(k)}\} = \{M_{ij}^{(k-1)}\} + (1 \pm \alpha_k)\ \{\Delta M_{ij}^{(k)}\}. \tag{59}$$

Pentru fiecare etapă a analizei elastico-plastice, modificarea caracteristicilor de rigiditate ale barelor în capetele cărora au apărut în etapa precedentă articulații plastice și în consecință a elementelor matricelor de rigiditate puse sub forma generală (23), se face prin modificarea valorilor

coeficienților de alternanță δ_{ij} și δ_{ji} în relațiile (28) ÷ (36), conform cu variantele (22a) și (22b).

Distribuțiile de momente corespunzătoare fiecărei etape a analizei elastico-plastice sînt indicate în tabelele 1,2 și 3, în care sînt cuprinse și valorile deplasării pe orizontală a nodului 2.

Tabela 1

Încărcare pînă la cedare

Secț.	Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3		Etapa 4	
	$\alpha_{ij}^{(1)}$	$M_{ij}^{(1)}$	$\alpha_{ij}^{(2)}$	$M_{ij}^{(2)}$	$\alpha_{ij}^{(3)}$	$M_{ij}^{(3)}$	$\alpha_{ij}^{(4)}$	$M_{ij}^{(4)}$
1—3	35,3	$2,53\times10^5$	11,2	$6,32\times10^5$	**0,053**	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$
2—4	52,8	$1,70\times10^5$	16,75	$4,78\times10^5$	4,13	$5,23\times10^5$	**−0,61**	$7,02\times10^5$
3—1	**12,05**	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$
4—2	39,2	$2,29\times10^5$	**9,28**	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$
$\lambda^{(k)}$	$5,18\times10^3$daN		$8,60\times10^3$		$9,01\times10^3$		$9,38\times10^3$	
$\delta_2^{(k)}$	2,13 cm		6,76		7,74		15,80	

Tabela 2

Secț.	Descărcare de la $\lambda^{(2)} - 8,60 \times 10^3$		Reîncărcare în același sens.					
			Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3	
	$M_{ij}^{(d)}$	m_{ij}	$\alpha_{ij}^{(1)}$	$M_{ij}^{(1)}$	$\alpha_{ij}^{(2)}$	$M_{ij}^{(2)}$	$\alpha_{ij}^{(3)}$	$M_{ij}^{(3)}$
1—3	$-4,18\times10^5$	$2,13-10^5$	24,3	$6,32\times10^5$	**0,053**	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$
2—4	$-2,81\times10^5$	$1,98\times10^5$	37,6	$4,78\times10^5$	4,13	$5,23\times10^5$	**− 0,61**	$7,02\times10^5$
3—1	$-11,58\times10^5$	$-4,56\times10^5$	**20,6**	7.02×10^5	—	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$
4—2	$-3,77\times10^5$	$3,25\times10^5$	**20,6**	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$	—	$7,02\times10^5$
$\lambda^{(k)}$	$-8,60\times10^3$	0	$8,60\times10^3$		$9,01\times10^3$		$9,38\times10^3$	
$\delta_2^{(k)}$	3,55	321	6,76		7,74		15,80	

În figura 11*c* este prezentată ordinea de formare a articulațiilor plastice și mecanismul de cedare, iar în figura 12 diagrama ($\lambda - \delta_2$) pentru următoarele ipoteze de acționare:

a) Încărcare pînă la cedare (tabela 1).

b) Descărcare de la formarea celei de-a doua articulații plastice și apoi reîncărcare în același sens pînă la cedare (tabela 2).

Tabela 3

Reîncărcare în sens invers

Secț.	Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3		Etapa 4	
	$\alpha_{ij}^{(1)}$	$M_{ij}^{(1)}$	$\alpha_{ij}^{(2)}$	$M_{ij}^{(2)}$	$\alpha_{ij}^{(3)}$	$M_{ij}^{(3)}$	$\alpha_{ij}^{(4)}$	$M_{ij}^{(4)}$
1—3	46,2	$1,24\times10^5$	21,5	$-6,32\times10^5$	0,053	$-7,02\times10^5$	—	$-7,02\times10^5$
2—4	68,2	$1,39\times10^5$	26,9	$-4,78\times10^5$	4,13	$-5,23\times10^5$	−0,61	$-7,02\times10^5$
3—1	35,7	$-7,02\times10^5$	—	$-7,02\times10^5$	—	$-7,02\times10^5$	—	$-7,02\times10^5$
4—2	57,6	$2,45\times10^5$	19,5	$-7,02\times10^5$	—	$-7,02\times10^5$	—	$-7,02\times10^5$
λ^k	$-1,83\times10^3$		$-8,60\times10^3$		$-9,01\times10^3$		$-9,38\times10^3$	
δ_2^k	2,49		−6,76		−7,74		−15,80	

c) Descărcare de la formarea celei de-a doua articulații plastice și apoi reîncărcare în sens invers pînă la cedare (tabela 3).

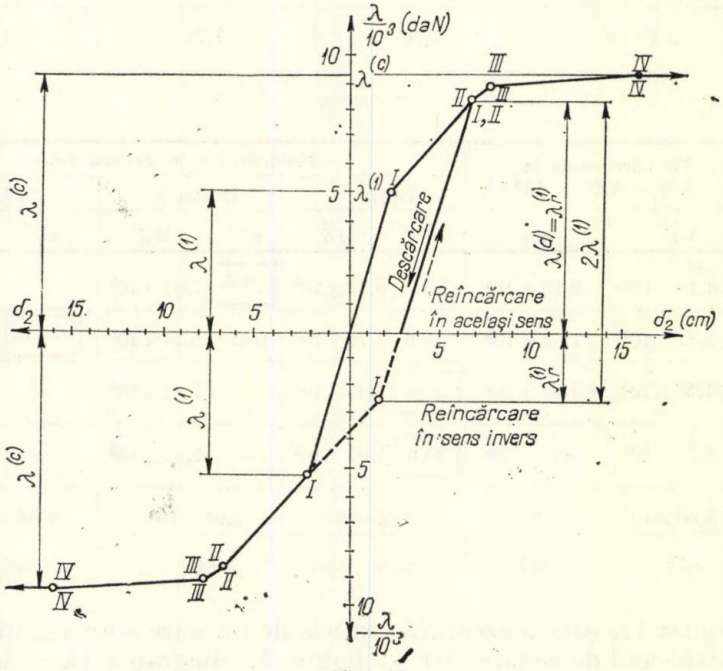


Fig. 12

În tabela 4 sînt prezentate deformațiile elementelor structurii (rotiri ale capetelor de bare, rotiri relative în noduri și deplasări ale nodurilor), pentru cele patru etape ale ciclului complet de încărcare pînă la cedare.

Rotirile din capetele barelor se obţin folosind relaţiile generale de forma (42), prin modificarea în fiecare etapă a simbolurilor de alternanţă, corespunzător apariţiei articulaţiilor plastice.

2. *Cadrul încărcat cu sarcina orizontală* λ *şi sarcini axiale* 5λ *pe stîlpi.* În acest caz (fig. 13*a*), este necesar un calcul prin corecţii succesive pentru fiecare etapă a analizei elastico-plastice, conform celor precizate în § 3.4 al lucrării.

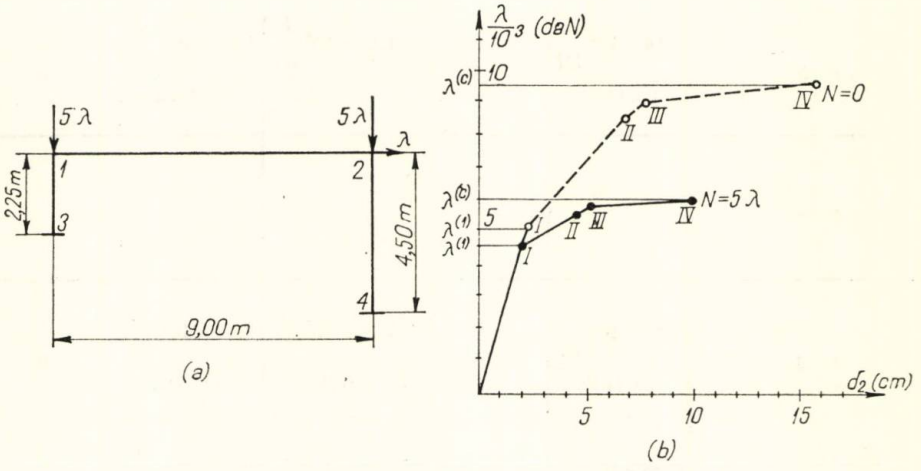


Fig. 13

În tabela 5 sînt prezentate, pentru exemplificare, cele cinci cicluri de corecţii succesive necesare obţinerii factorului de încărcare şi a distribuţiei de momente corespunzătoare formării primei articulaţii plastice.

Faţă de prima ipoteză de încărcare, se efectuează în plus etapele notate cu 5,6,7,8 şi 9 în § 3.4, iar pentru determinarea caracteristicilor de rigiditate din etapa 1 se folosesc relaţiile prezentate în § 2.

Corectarea momentelor plastice ţinînd cont de influenţa forţelor axiale mari din stîlpi (determinarea momentelor $M_{ij(k)}^{(p)*}$) s-a făcut pe baza relaţiei :

$$M_{ij(k)}^{(p)*} = M_{ij(k)}^{(p)} \times 1{,}18[1 - N_{ij}^{(k)}/N_{ij(k)}^{(p)}], \tag{60}$$

considerînd următoarele date numerice :

$$M_{ij(k)}^{(p)} = W_p \cdot \sigma_c = 7{,}02 \times 10^5 \text{daNcm},$$

$$N_{ij(k)}^{(p)} = A \cdot \sigma_c = 95{,}475 \times 10^3 \text{ daN}.$$

Se obţin astfel următoarele valori ale factorului de încărcare şi ale deplasării orizontale a nodului 2, corespunzătoare celor patru etape ale analizei elastico-plastice :

Tabel

Capăt de bară	Etapa I			Etapa
	$\varphi_{el}^{(1)}$	$\varphi_{pl}^{(1)}$	$\Phi_{\text{total}}^{(1)}$	$\varphi_{el}^{(2)}$	$\varphi_{pl}^{(2)}$
3—1	0	0	0	0	$\dfrac{2{,}45\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}02452}$
1—3	$\dfrac{1{,}14\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}01142}$	0	$\dfrac{1{,}14\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}01142}$	$\dfrac{1{,}48\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}01482}$	0
Φ_1^{relativ}			0		
1—2	$\dfrac{1{,}14\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}01142}$	0	$\dfrac{1{,}14\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}01142}$	$\dfrac{1{,}48\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}01482}$	0
2—1	$\dfrac{0{,}30\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}00300}$	0	$\dfrac{0{,}30\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}00300}$	$\dfrac{0{,}81\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}00810}$	0
Φ_2^{relativ}			0		
2—4	$\dfrac{0{,}30\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}00300}$	0	$\dfrac{0{,}30\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}00300}$	$\dfrac{0{,}81\times10^5\dfrac{L}{EI}}{0{,}00810}$	0
4—2	0	0	0	0	0
δ_1 (cm) $\delta_1^{(k)}$	2,13			4,63	
δ_1 (cm) δ_1^{total}	2.13			6,76	
$\lambda^{(k)}$ (daN)	$5{,}18\times10^3$			$8{,}60\times10^3$	

$EI = 4{,}494\times10^9$ daN cm^2
$L = 4{,}5\times10^2$ cm

II	Etapa III			Etapa IV		
$\Phi^{(2)}_{total}$	$\varphi^{(3)}_{el}$	$\varphi^{(3)}_{pl}$	$\Phi^{(3)}_{total}$	$\varphi^{(4)}_{el}$	$\varphi^{(4)}_{pl}$	$\Phi^{(4)}_{total}$
$2{,}45\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02452	0	$0{,}50\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,00500	$2{,}95\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02952	0	$3{,}5\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,03504	$6{,}45\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,06456
$2{,}62\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02624	$0{,}32\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,00320	0	$2{,}95\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02952	0	$3{,}5\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,03504	$6{,}45\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,06456
0			0			$4{,}10\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,04104
$2{,}62\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02624	$0{,}32\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,00320	0	$2{,}95\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02952	0	$-0{,}59\times10^5\frac{L}{EI}$ −0,00590	$2{,}35\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02354
$1{,}11\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,01110	$0{,}07\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,00070	0	$1{,}18\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,01180	$1{,}16\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,01162	0	$2{,}35\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02354
0			0			0
$1{,}11\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,01110	$0{,}07\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,00070	0	$1{,}18\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,01180	$1{,}16\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,01162	0	$2{,}35\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02354
0	0	$0{,}30\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,00300	$0{,}30\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,00300	0	$2{,}05\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02052	$2{,}35\times10^5\frac{L}{EI}$ 0,02354
	3.11			8,06		
	7,74			15,80		
	$9{,}02\times10^3$			$9{,}41\times10^3$		

Rotirile în radiani.

Tabel

Sect.	Ciclul 1			Ciclu 2		
	$M^{*(1)}_{ij/10^5}$	$\alpha^{(1)}_{ij(1)}$	$M^{(1)}_{ij/10^5}$	$M^{*(1)}_{ij/10^5}$	$\alpha^{(1)}_{ij(2)}$	$M^{(1)}_{ij/10^5}$
1—3	6,826	35,30	2,53	5,846	30,13	2,18
2—4	6,890	52,80	1,70	5,910	45,46	1,46
3—1	6,483	12,05	7,02	5,503	10,25	6,04
4—2	6,845	39,20	2,29	5,865	33,51	1,97
$N^{(1)}_{ij}$	0			$25{,}9\times10^3$ daN		
$M^{(p)*}_{ij(1)}$	$7{,}02\times10^5$ da N cm			$6{,}04\times10^5$		
α_1	12,05			10,25		
$\lambda^{(1)}$	$5{,}18\times10^3$ daN			$4{,}5\times10^3$		

$$\lambda^{(1)} = 4{,}65 \times 10^3 \text{ daN}, \quad \delta_2^{(1)} = 1{,}93 \text{ cm},$$
$$\lambda^{(2)} = 5{,}60 \times 10^3 \text{ daN}, \quad \delta_2^{(2)} = 4{,}42 \text{ cm}.$$
$$\lambda^{(3)} = 5{,}70 \times 10^3 \text{ daN}, \quad \delta_2^{(3)} = 4{,}98 \text{ cm},$$
$$\lambda^{(4)} = 5{,}85 \times 10^3 \text{ daN}, \quad \delta_2^{(4)} = 9{,}80 \text{ cm},$$

cu care s-a trasat diagrama ($\lambda - \delta_2$) din figura 13*b*, în care s-a reprezentat punctat şi diagrama corespunzătoare primei ipoteze de încărcare.

Comparînd cele două cazuri de acţionare considerate, rezultă următoarele :

a) Sarcina limită elastică precum şi deformaţia limită elastică nu sînt mult afectate de prezenţa forţelor axiale mari în stîlpi (pentru cazul analizat, sarcina limită elastică se reduce cu circa 10 % în cea de-a doua ipoteză de încărcare).

b) Comportarea elastico-plastică este în schimb substanţial modificată, fapt ilustrat de următoarele date comparative :

— Sarcina de cedare este cu circa 40 % mai mică în ipoteza a doua, faţă de prima ipoteză de acţionare.

— Coeficienţii de adaptare statică, determinaţi cu relaţiile

$$\beta(\lambda) = \frac{\lambda^{(c)} - \lambda^{(1)}}{\lambda^{(c)}} \times 100, \tag{61a}$$

$$\beta(\delta) = \frac{\delta_2^{(c)} - \delta_2^{(1)}}{\delta_2^{(c)}} \times 100, \tag{61b}$$

Ciclul 3			Ciclul 4			Ciclul 5		
$M^{*(1)}_{ij/10^5}$	$\alpha^{(1)}_{ij(3)}$	$M^{(1)}_{ij/10^5}$	$M^{*(1)}_{ij/10^5}$	$\alpha^{(1)}_{ij(4)}$	$M^{(*)}_{ij/10^5}$	$M^{(1)}_{ij/10^5}$	$\alpha^{(1)}_{ij(5)}$	$M^{(1)}_{ij/10^5}$
6,019	31,91	2,29	6,046	31,16	2,25	6,076	31,32	2,27
6,20	47,69	1,53	6,110	47,00	1,51	6,140	47,23	1,52
5,79	**10,78**	6,33	5,703	**10,62**	6,24	5,733	**10,68**	6,27
6,16	35,2	2,06	6,065	34,66	2,03	6,095	34,83	2,04
$22,5 \times 10^3$			$23,55 \times 10^3$			$23,25 \times 10^3$		
$6,33 \times 10^5$			$6,24 \times 10^5$			$6,27 \times 10^5$		
10,78			10,62			10,68		
$4,71 \times 10^3$			$4,65 \times 10^3$			$4,67 \times 10^3$		

au următoarele valori :

prima ipoteză de încărcare : $\beta(\lambda) = 45\,\%$;

$\beta(\delta) = 86{,}5\,\%$,

ipoteza doua a de încărcare : $\beta(\lambda) = 20{,}5\,\%$,

$\beta(\delta) = 80{,}3\,\%$

Se constată deci o reducere de circa 50 % a coeficientului de adaptare referitor la încărcări, în timp ce coeficientul de adaptare referitor la deplasări se modifică foarte puțin

Primită la redacție la 15 martie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Bălan, V. Petcu, *Un concept nou de exprimare a gradului de siguranță în calculul structurilor elasto-plastice*, St. cerc. mec. apl., *4*, 897–918 (I); 5, 1125–1152 (II) (1970).
2. V. Petcu, *Calculul plastic al structurilor de oțel pe baza concepției stărilor limită*, St. cerc. mec. apl., *5*, 1257–1282 (1966).

3. A. Gheorghiu, C. Pacoste, M. Iordănescu, *Privire de sinteză asupra căilor eficiente de rezolvare prin etape succesive a structurilor în domeniul elasto-plastic*, St. cerc. mec. apl. *6*, 1369—1394 (1970).
4. M. Hangan, *O metodă de calcul prin aproximații succesive a structurilor multiplu nedeterminate în domeniul plastic*, St. cerc. mec. apl., *3*, 795—817 (1959).
5. J. M. English, *Design of Frames by Relaxation of Yield Hinges*, Journal ASCE *79* 322 (1953).
6. U. Fuxa, *Sul calcolo a rottura delle strutture iperstatiche*, Il Cemento, *2*, **62**, p. 17 (I) (1962) : *3*, **88**, p. 9 (II) (1965).
7. P. Pozzati. *Sul calcolo a rottura delle strutture iperstatiche*, Giornale del Genio Civile, 1955, mai, pp. 298—304.
8. R. J. Alvarez, Ch. Birnstiel, *Elasto-Plastic Analysis of Plane Rigid Frames*, New York University, School of Engineering and Science, 1967, Oct.
9. C. K. Wang, *General Computer Program for Limit Analysis*. J. Struct. Div., ASCE, 1963, ST—6, pp. 101—117.
10. C. Amariei, *O cale generală de analiză a comportării elastico-plastice a structurilor metalice plane alcătuite din bare*, Bul. șt. al Inst. Polit. Iași **XVIII**, *3, 4* (1972).
11. E. Pestel, F. A. Leckic, *Matrix Methods in Elastomechanics*, 1963.
12. H. C. Martin, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, 1966.
13. Ping-Chum Wang, *Numerical and Matrix Method in Structural Mechanics*, New York, 1966 (trad. în lb. română).
14. Ch. Massonnet, M. Save, *Calcul plastique des constructions*, vol. I, ed. 2, Bruxelles, 1967.
15. B. G. Neal, *The Plastic Method of Structural Analysis*, London, ed. 2, 1963.
16. C. Amariei, *Contribuții privind calculul în domeniul plastic al structurilor metalice plane alcătuite din bare*, Teză de doctorat, Iași, 1972.

STUDII

STUDIUL STABILITĂȚII GENERALE A BARELOR COMPRIMATE DE SECȚIUNE COMPUSĂ CU AJUTORUL UNUI MODEL FIZIC ÎMBUNĂTĂȚIT

de DAN COȘA
Universitatea Brașov

Constatînd o deficiență importantă a modelului clasic al barei de secțiune compusă (valabilitatea sa se limitează doar la cazurile în care legătura între ramuri este puternică), în lucrare se propune un model îmbunătățit aplicabil la toate tipurile de legături, indiferent de gradul lor de tărie. Modelul consideră ramurile ca bare cu deformabilitate axială și la încovoiere, caracteristica legăturilor între ramuri fiind așa numita „rigiditate distribuită la distorsiune". Relațiile de calcul obținute pe această bază sînt foarte simple și permit o comodă aplicare a lor în diversele situații concrete care se pot ivi.

După cum este cunoscut, găsirea de către F. Engesser [1] în anul 1891 a efectului forței tăietoare asupra valorii sarcinii critice de flambaj a barei drepte, a permis prin analogie și efectuarea calculului la stabilitate generală a barei de secțiune compusă ale cărei ramuri sînt solidarizate între ele, fie prin plăcuțe, fie prin zăbreluțe.

Căutarea unor explicații pentru prăbușirea podului de la Quebec (Canada) a prilejuit efectuarea a numeroase studii [2], [3], [4], [5] privind stabilitatea generală a barelor de secțiune compusă, studii care au consolidat teoretic și experimental modelul fizic propus de Engesser; se poate afirma chiar că cercetările efectuate după anul 1914 nu au mai adăugat nimic esențial la bazele teoretice și la verificările experimentale existente. Prescripțiile noastre oficiale (STAS 763—66), ca și cele din alte țări, recomandă folosirea modelului Engesser în proiectarea stîlpilor metalici de secțiune compusă.

Trebuie observat că în toate situațiile în care rezultatele teoretice concordă satisfăcător cu experiența (sau sînt acoperitoare) este vorba despre bare de secțiune compusă la care *legătura între ramuri este puternică.*

Ce se întîmplă însă în cazul structurilor elastice care pot fi interpretate ca bare de secțiune compusă dar la care *legătura între ramuri este slabă* (cum sînt diafragmele antiseismice cu goluri de mărime medie sau calea ferată fără joante)?

Nu este greu de intuit că la structuri cu o astfel de alcătuire, forța critică la care ansamblul își pierde stabilitatea depinde mai puțin de rezerve de stabilitate a ansamblului considerat ca bară monolită și mai mult de cea a ramurilor barei considerate că lucrează independent, pentru ca în cazuri limită cînd *legăturile între ramuri sînt foarte slabe* (*practic nule*)

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 4, 1975, P. 561—571

forța critică să depindă exclusiv de capacitatea de a rezista a fiecărei ramuri în parte.

Modelul Engesser consideră ca esențială comportarea monolită a barei de secțiune compusă, iar în cazul cînd legăturile între ramuri sînt nule (deci atunci cînd ultimul argument de „monolit" dispare) rezultă pe baza sa că forța critică a barei „degenerate" este nulă ceea ce este în contradicție flagrantă cu realitatea.

Desigur, s-ar putea afirma că întrucît aplicarea modelului Engesser în cazul legăturilor slabe conduce la valori ale sarcinii critice mai mici decît cele reale, utilizarea sa în proiectare este acoperitoare și, în consecință, acceptabilă chiar dacă s-ar putea formula unele rezerve.

Există totuși fenomene de instabilitate elastică cum ar fi cel al șerpuirii căii ferate fără joante supusă la variații de temperatură, fenomene pe care modelul în discuție nu le poate explica cît de cît satisfăcător; în lucrarea [12], am demonstrat necesitatea unui model îmbunătățit al barei de secțiune compusă valabil pentru întreaga gamă de tărie a legăturilor între ramuri.

Modelul fizic pe care îl vom adopta pentru bara de secțiune compusă trebuie să răspundă în mod optim la următoarele deziderate cu caracter antagonic :

1. Să exprime cît mai fidel comportarea ansamblului și a părților sale componente.

2. Să fie suficient de simplu astfel încît avantajele ce decurg din utilizarea sa să fie evidente.

Considerăm că un model de bară cu secțiunea compusă care îndeplinește satisfăcător ambele condiții enunțate anterior, este exprimat prin următoarele caracteristici :

(C.1) Bara de secțiune compusă este alcătuită din două ramuri, fiecare ramură fiind o bară monolită, deformabilă la forță axială și la moment încovoietor.

(C. 2) Între fiecare pereche de puncte omoloage P_1 și P_2 ale ramurilor (puncte cu aceeași abscisă pe axa fiecărei ramuri) există cîte o legătură care le obligă la deplasări transversale egale și se opune elastic la distorsiunea ramurilor în punctele considerate.

(C.3) Legătura între punctele omoloage P_1 și P_2 este independentă de legăturile între perechile de puncte omoloage infinit vecine.

Un element dintr-o bară cu secțiunea compusă care îndeplinește cele trei condiții de definiție este reprezentat în figura 1.

Modele asemănătoare cu cel descris anterior au mai fost folosite și de către alți autori [6], [7], [8] la calculul de ordinul I al diafragmelor antiseismice cu un singur rînd de goluri, solicitate la forțe orizontale.

În cele ce urmează ne propunem găsirea forței critice de flambaj a unei bare drepte dublu articulate, avînd secțiunea compusă în sensul caracteristicilor (C.1), (C.2) și (C.3).

Bara are lungimea l și este alcătuită din ramurile 1 și 2 realizate din același material și ale căror arii și momente de inerție sînt A_1 și I_1, respectiv A_2 și I_2; centrele de greutate ale ramurilor se află la distanța h, iar în centrul de greutate al întregii secțiuni acționează forța axială N.

Să presupunem că la o anumită valoare a solicitării axiale bara admite pe lîngă forma rectilinie și o formă curbilinie de echilibru.

Fie un element infinitezimal al barei delimitat în poziția nedeformată prin două secțiuni paralele, normale pe axa barei, aflate la distanța

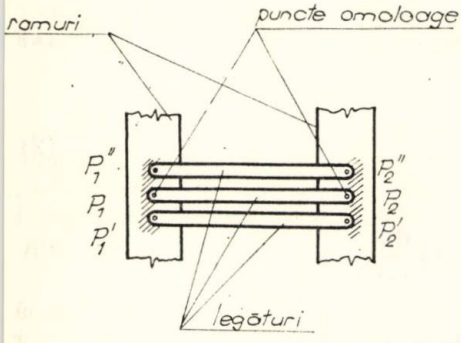


Fig. 1

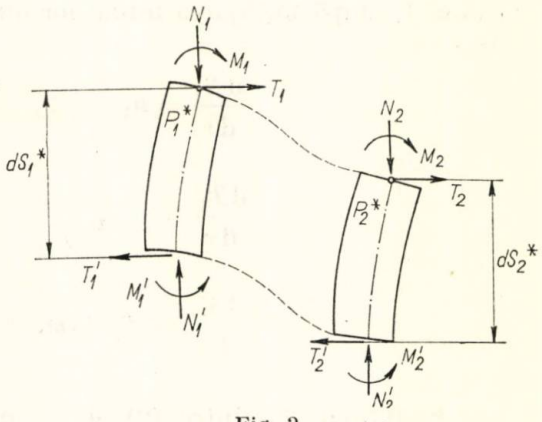


Fig. 2

ds; același element în poziția deplasată solicitat de eforturile interioare evidențiate prin secționare este reprezentat în figura 2.

Asupra fiecărui element de ramură inclus în elementul de bară, legăturile între ramuri acționează sub forma unor forțe de legătură dis-

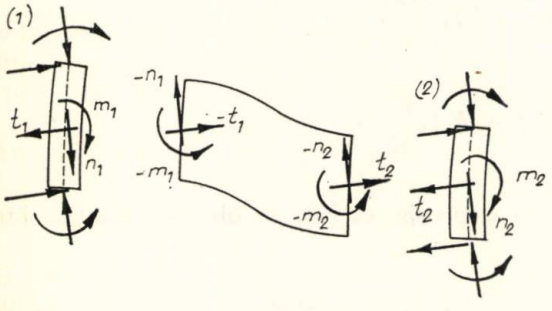


Fig. 3

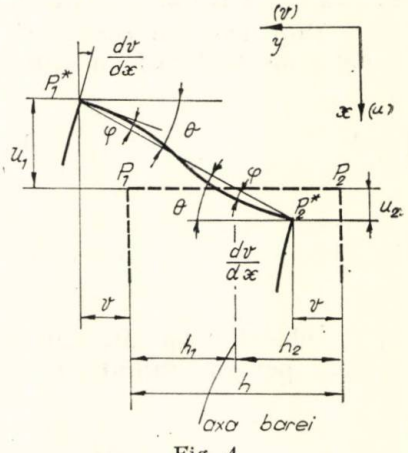


Fig. 4

tribuite n_1, t_1 și m_1 (asupra ramurii 1) și n_2, t_2 și m_2 (asupra ramurii 2) la nivelul liniei centrelor de greutate ale ramurilor; punerea în evidență a acestor forțe de legătură se realizează prin detașarea de ramuri a pachetului de legături (figura 3).

Poziția deplasată a barei este complet determinată dacă se cunosc deplasările transversale v, aceleași pentru punctele omoloage P_1 și P_2, și deplasările longitudinale u_1 și u_2, diferite pentru P_1 și P_2. În figura 4

a fost reprezentată poziția deplasată a secțiunii de bară ce trece prin punctele omoloage P_1 și P_2 cu indicarea tuturor caracteristicilor primare și secundare ale deformatei.

Scriind condițiile de echilibru în poziție deplasată ale elementului ds_1^* din ramura 1, asimilînd deplasările u_1 și v cu niște infiniți mici de ordinul I, după neglijarea infiniților mici de ordin superior se obțin relațiile :

$$\frac{dN_1}{dx} = n_1, \tag{1}$$

$$\frac{dT_1}{dx} = -t_1, \tag{2}$$

$$\frac{dM_1}{dx} = T_1 + m_1 + N_1^0 \frac{dv}{dx}. \tag{3}$$

Eliminînd T_1 între (2) și (3) obținem relația

$$\frac{d^2M_1}{dx^2} = -t_1 + \frac{dm_1}{dx} + N_1^0 \frac{d^2v}{dx^2}. \tag{4}$$

Cu N_1^0 s-a notat forța de compresiune (considerată ca pozitivă) în ramura 1 a barei aflată în poziție nedeformată.

Eforturile interioare M_1 și N_1 din punctul P_1^* se exprimă în funcție de deplasări cu ajutorul relațiilor

$$M_1 = -EI_1 \frac{d^2v}{dx^2}, \tag{5}$$

$$N_1 = N_1^0 - EA_1 \frac{du_1}{dx}. \tag{6}$$

Înlocuind pe M_1 din (4) cu expresia sa (5), se obține relația de sinteză pentru ramura 1

$$-EI_1 \frac{d^4v}{dx^4} = -t_1 + \frac{dm_1}{dx} + N_1^0 \frac{d^2v}{dx^2}. \tag{7}$$

O relație analogă (8) se obține și pentru ramura 2,

$$-EI_2 \frac{d^4v}{dx^4} = -t_2 + \frac{dm_2}{dx} + N_2^0 \frac{d^2v}{dx^2}. \tag{8}$$

Sumînd membru cu membru relațiile (7) și (8) rezultă

$$-E(I_1 + I_2)\frac{d^4v}{dx^4} = -(t_1 + t_2) + \frac{d}{dx}(m_1 + m_2) + (N_1^0 + N_2^0)\frac{d^2v}{dx^2}. \quad (9)$$

Potrivit lui (C. 2) suma momentelor distribuite m_1 și m_2 poate fi exprimată printr-o relație de forma

$$m_1 + m_2 = -K\varphi, \quad (10)$$

în care φ este unghiul de distorsiune al ramurilor, iar K o caracteristică elastică *convențională* a legăturii între ramuri pe care am denumit-o *„rigiditate distribuită la distorsiune"*.

Prin distorsiune se înțelege de regulă obligarea unui corp elastic la rotiri egale în jurul a două puncte fixe ale sale, rigiditatea la distorsiune avînd o semnificație fizică clară.

În cazul unui pachet de legături independente între ele dar care stabilesc conexiuni între perechi de puncte omoloage infinit vecine, o interpretare fizică a rigidității la distorsiune în sensul staticii construcțiilor este greu de găsit; dacă însă ținem seama de faptul că în aplicațiile practice legăturile între ramuri sînt discontinui și la distanțe finite, că ceea ce interesează este modul de calcul al caracteristicii K într-un anume caz concret, rezultă că esențial este nu caracterul convențional al lui K ci faptul că prin variația sa de la infinit la zero este acoperită întreaga gamă a stîlpilor de secțiune compusă, de la cei cu ramurile puternic solidarizate care conferă stîlpului caracter monolit pînă la cei cu legături foarte slabe al căror rol se rezumă doar la obligarea celor două ramuri la deplasări transversale egale.

În lucrare va fi prezentat și modul de calcul al rigidității distribuite K pentru diverse modalități practice de solidarizare a ramurilor stîlpului.

Revenind la problema pe care ne-am propus-o spre rezolvare, unghiul φ de distorsiune al ramurilor poate fi exprimat în funcție de v, u_1 și u_2 observîndu-se figura 4. Admițînd că rotirile φ, θ și dv/dx sînt pozitive dacă se produc în sens orar, rezultă:

$$\varphi = \frac{dv}{dx} - \theta = \frac{dv}{dx} - \frac{1}{h}(u_2 - u_1). \quad (11)$$

Ținînd seama de (10) și (11), de faptul că $N_1^0 + N_2^0 = N$ și de una din condițiile de echilibru ale pachetului de legături care dă $t_1 + t_2 = 0$, relația (9) devine

$$-E(I_1 + I_2)\frac{d^4v}{dx^4} = -K\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{K}{h}\left(\frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx}\right) + N\frac{d^2v}{dx^2}. \quad (12)$$

Derivatele deplasărilor longitudinale u_1 și u_2 pot fi exprimate în funcție de deplasarea transversală v cu ajutorul relațiilor de echivalență

$$N_1 + N_2 = N, \tag{13}$$

$$-N_1 h_1 + N_2 h_2 + M_1 + M_2 = Nv. \tag{14}$$

Înlocuind N_1, N_2, M_1 și M_2 prin expresiile lor de tip (5) și (6), ținînd seama de relațiile de echivalență scrise pe poziția nedeformată ($N_1^0 + N_2^0 = N$; $N_1^0 h_1 = N_2^0 h_2$) relațiile (13) și (14) devin (15) și, respectiv, (16).

$$A_1 \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + A_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{15}$$

$$A_1 h_1 \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} - A_2 h_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} = (I_1 + I_2) \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + \frac{N}{E} v. \tag{16}$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (15) și (16), avînd ca necunoscute derivatele deplasărilor u_1 și u_2, obținem,

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{A_1 h}\left[(I_1 + I_2)\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + \frac{N}{E} v\right], \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{A_2 h}\left[(I_1 + I_2)\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + \frac{N}{E} v\right], \tag{18}$$

expresii care se introduc în (12), iar relația astfel obținută se ordonează sub forma

$$E(I_1 + I_2)\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} + \left[N - K\left(1 + \frac{I_1 + I_2}{h^2} \cdot \frac{A}{A_1 A_2}\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} - \frac{NK}{E}\frac{A}{h^2 A_1 A_2} \cdot v = 0. \tag{19}$$

Ținînd seama că $h^2 A_1 A_2 / A = I - (I_1 + I_2)$, I fiind momentul de inerție al întregii secțiuni, ecuația (19) devine:

$$E(I_1 + I_2)\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} + \left[N - \frac{KAI}{h^2 A_1 A_2}\right]\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} - N\frac{KA}{Eh^2 A_1 A_2} v = 0. \tag{20}$$

Ecuația (20) admite o soluție de forma $v = v_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ cu $v_0 \neq 0$ dacă este îndeplinită condiția

$$E(I_1 + I_2)\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \left(N - \frac{KAI}{h^2 A_1 A_2}\right)\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - N\frac{KA}{Eh^2 A_1 A_2} = 0. \tag{21}$$

Valoarea lui N care satisface relația (21) este forța critică N_{cr}^{K} corespunzătoare rigidității distribuite la distorsiunea K.

$$N_{cr}^{K}=\frac{E(I_1+I_2)\frac{\pi^2}{l^2}+\frac{KAI}{h^2A_1A_2}}{1+\frac{KA\,l^2}{\pi^e Eh^2A_1A_2}}. \tag{22}$$

Ținînd seama că $\pi^2E(I_1+I_2)/l^2=N_{cr}^{0}$, $\pi^2\cdot EI/l^2=N_{cr}^{\infty}$, relația (22) poate fi adusă la oricare din formele

$$N_{cr}^{K}=N_{cr}^{0}\,\frac{1+C_KC_I}{1+C_K}, \tag{23}$$

$$N_{cr}^{K}=N_{cr}^{\infty}\,\frac{1}{C_I}\cdot\frac{1+C_kC_I}{1+C_k}, \tag{24}$$

în care coeficienții adimensionali C_k și C_i au expresiile (24)

$$C_K=\frac{KA}{EA_1A_2}\left(\frac{l}{\pi\cdot h}\right)^2;\quad C_I=\frac{I}{I_1+I_2}. \tag{25}$$

Se observă că pentru $K=0$, $N_{cr}^{0}=N_{cr,1}+N_{cr,2}$, iar pentru $K=\infty$, $N_{cr}=\pi^2EI/l^2$.

Calculul rigidității distribuite la distorsiune K. Legăturile între ramurile unei bare cu secțiunea compusă fiind de regulă grupate în panouri, se consideră un panou cu legăturile care îi revin și îl obligăm la o deformație tip distorsiune care se va realiza exclusiv pe seama deformării legăturilor (potrivit modelului adoptat ramurile au fost deja considerate în calcul cu deformabilitatea lor reală).

Corespunzător unei distorsiuni $\bar{\varphi}$ se pot găsi momentele reacțiune $\bar{M}_1$ și $\bar{M}_2$ cu care un anumit tip de legătură acționează asupra ramurilor (figura 5*a*).

Rigiditatea distribuită la distorsiune K se calculează în mod convențional cu relația

$$K=\frac{1}{\mathrm{d}}\cdot\frac{\bar{M}_1+\bar{M}_2}{\bar{\varphi}}. \tag{26}$$

a) Solidarizare cu plăcuțe (figura 5*b*)

$$K_p=\frac{1}{d}\cdot\frac{12E_pI_p}{h}. \tag{27}$$

b) Solidarizare cu zăbreluțe (figura 5*c*)

$$K_z = E_d A_d \cos^3 \psi. \tag{28}$$

Prin I_p și A_d s-au notat suma momentelor de inerție ale plăcuțelor unui panou de bară, respectiv suma ariilor tuturor diagonalelor panoului, care se deformează datorită distorsiunii.

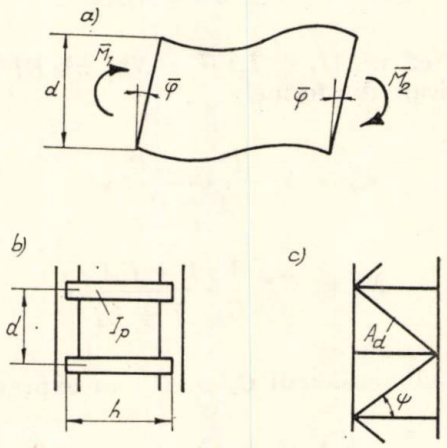


Fig. 5

Utilizarea modelului îmbunătățit în proiectarea și calculul la stabilitate al barei de secțiune compusă. Avînd efectuat calculul în domeniul elastic al forței critice a barei dublu articulate cu secțiunea compusă în accepțiunea acestei lucrări, se pune problema utilizării sale la calculul unor bare care au la capete alte legături decît duble articulații și a cărorpierdere a stabilității se poate produce nu numai în domeniul elastic.

Considerăm că pînă la găsirea unei rezolvări specifice poate fi acceptată ca metodologie de calcul cea recomandată de către actualele prescripții oficiale pentru bara cu secțiune compusă în sensul Engesser.

Cînd afirmăm că pentru calculul barei cu secțiunea compusă avînd diverse legături la capete și fără cunoașterea aprioricăa naturii (elastică sau superelastică) instabilității, ar fi necesară o metodologie specifică, ne referim nu numai la faptul că pentru modelul tratat în lucrare ea încă nu există, ci și la unele rezerve serioase care pot fi formulate cu privire la „specificitatea" metodologiei recomandate în prescripțiile oficiale cu privire la utilizarea modelului Engesser.

În spiritul prescripțiilor în vigoare, vom proceda la aplicarea modelului îmbunătățit la bare care au la capete alte legături de cît cele din cazul studiat, folosindu-ne de un coeficient de zvelțețe transformat, λ_{tr}.

Expresia (24) a forței critice poate fi adusă prin transformări elementare la forma

$$\sigma_{cr}^{K} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{C_I} \cdot \frac{1 + C_K C_I}{1 + C_K}, \tag{29}$$

ceea ce ne conduce la coeficientul de zvelteţe transformat

$$\lambda_{tr}^{K} = \lambda_i \sqrt{C_I \cdot \frac{1 + C_K}{1 + C_K C_I}}. \tag{30}$$

Într-un anume caz concret, se consideră lungimea de flambaj l_f corespunzătoare prinderilor la capete, se calculează coeficientul de zvelteţe ideal λ_i pentru bara de secţiune compusă considerată ca monolită.

Se calculează apoi coeficienţii adimensionali C_I şi C_K (în expresia lui C_K, l se înlocuieşte cu l_f) şi coeficientul de zvelteţe transformat (27), după care calculul se poate continua cu oricare din metodele cunoscute (de ex. metoda coeficienţilor de flambaj φ).

Aplicaţie numerică. O bară avînd lungimea de 8 m are secţiunea compusă din două profile U 8 solidarizate la fiecare 50 cm prin cîte două plăcuţe a căror grosime t_p este 0,5 cm; legăturile la capetele barei sînt articulaţii. Se cere să se efectueze un studiu comparat al efectului de secţiune compusă asupra stabilităţii la compresiune a barei prin metoda clasică (Engesser) şi pe baza modelului propus în lucrare. Pentru secţiunile de stîlp reprezentate în figurile 6*a* şi 6*b* se va considera înălţimea plăcuţelor h_p egală cu 0,5 cm, 1 cm. 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm şi 10 cm.

Studiul comparativ al efectului de bară cu secţiunea compusă, evaluat corespunzător modelului clasic (T) şi celui propus în lucrare (K), va fi făcut prin intermediul coeficienţilor μ şi ν definiţi astfel:

$$\mu_T = \frac{N_{cr}^{T}}{N_{cr}^{\infty}}; \quad \mu_K = \frac{N_{cr}^{K}}{N_{cr}^{\infty}},$$

$$\nu_T = \frac{\lambda_{tr}^{T}}{\lambda_i}; \quad \nu_K = \frac{\lambda_{tr}^{K}}{\lambda_i}.$$

Corespunzător solidarizării cu plăcuţe, coeficienţii ν_T, μ_T, ν_K şi μ_K se calculează cu relaţiile următoare:

$$\nu_T = \sqrt{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi d}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{I}{I_p} \cdot \frac{h}{d} \cdot \frac{I}{2I_1}\right)}; \quad \mu_T = \frac{1}{\nu_T^2},$$

$$\nu_K = \sqrt{\frac{C_I + C_K \cdot C_I}{1 + C_K C_I}}; \quad \mu_K = \frac{1}{\nu_k^2},$$

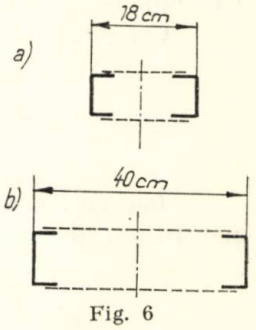


Fig. 6

C_I şi C_K au expresiile (25), iar rigiditatea distribuită la distorsiune K_p care intervine în calculul lui C_K are expresia (27).

Potrivit datelor iniţiale $l_f = 8$ m, $d = 50$ cm, $I_1 = 19{,}4$ cm^4, $A_1 = 11$ cm^2.

Cazul I (fig. 6*a*):

$$h = 16{,}1 \text{ cm}; \quad I = 1290 \text{ cm}^4; \quad i = 7{,}66 \text{ cm}.$$

$$\lambda_i = \frac{800}{7{,}66} = 105.$$

Întrucît, indiferent de tăria legăturii între ramuri, pierderea stabilității are un caracter elastic, este indicat ca comparația între rezultatele obținute prin cele două metode să se facă cu referire la coeficienții μ_T și μ_K.

Corespunzător datelor concrete avem

$$\mu_T = \frac{1}{1{,}107 + \frac{16{,}05}{h_p^3}}; \quad \mu_K = \frac{1 + 1{,}88\, h_p^3}{33{,}3 + 1{,}88\, h_p^3}.$$

Pentru diversele valori ale lui h_p (în cm.) valorile calculate pentru μ_T și μ_K sînt următoarele:

h_p	0,5 cm	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	10 cm
μ_T	0,0073	0,0584	0,322	0,588	0,737	0,810	0,893
μ_K	0,0369	0,0820	0,332	0,603	0,790	0,880	0,985

Este interesant de remarcat că în timp ce $(\mu_T)_{\lim} = 0{,}9$, $(\mu_K)_{\lim} = 1$.

Cazul II (fig. 6*b*):

$$h = 38{,}1 \text{ cm}; \quad I = 7360 \text{ cm}^4; \quad i = 18{,}6 \text{ cm},$$

$$\lambda_i = \frac{800}{18{,}6} = 43.$$

Deoarece în funcție de tăria legăturilor pierderea stabilității poate avea fie un caracter elastic, fie elastoplastic, presupunînd că o eventuală verificare la flambaj s-ar face prin metoda coeficienților φ, este indicat ca comparația între cele două modele să se facă cu referire la coeficienții ν.

Corespunzător datelor concrete cazului II avem

$$\nu_T = \sqrt{1{,}107 + \frac{224}{h_p^3}}; \quad \nu_K = \sqrt{\frac{196 + 0{,}834\, h_p^3}{1 + 0{,}834\, h_p^3}}.$$

Pentru aceleași valori ale lui hp (ca și în cazul I) valorile calculate pentru ν_T și ν_K sînt următoarele:

h_p	0,5 cm	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	10 cm
ν_T	42,20	14,95	6,25	3,07	2,15	1,71	1,15
ν_K	13,30	10,45	5,06	3,07	2,15	1,69	1,11

Rezultatele numerice obținute ne permit să formulăm două importante concluzii cu caracter calitativ :

1. Potrivit modelului rigidității distribuite la distorsiune coeficientul de siguranță la stabilitate al unei bare cu secțiunea compusă este mai mare sau cel puțin egal cu cel calculat pe baza modelului clasic.

2. Diferențele cele mai mici corespund unor legături de tărie medie (ceea ce poate constitui și un criteriu pentru definirea unor astfel de legături), iar diferențele cele mai mari corespund barelor cu secțiune compusă ale căror legături sînt slabe.

Primită la redacție la 27 martie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. F. Engesser, Zentr. Bauverwaltung vol. 11, p. 483, 1891.
2. F. Engesser, Zentr. Bauverwaltung vol. 27, p. 609, 1907.
3 L. Prandtl, Z. Ver. deut. ingr. 1907.
4 S. Timoshenko, *Flambajul barelor de secțiune variabilă*, Bul. Inst. Politehnic Kiev, 1908.
5 S. Timoshenko, Annales des Ponts et Chaussées, Seria *9*, vol. **3**, 551 (1914).
6. M. Albiges, J. Goulet, Contreventement des bâtiments Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics (A.I.T.B.T.P.) MAI 1960.
7. A. Decauchy, Contreventement des bâtiments A.I.T.B.T.P. Janvier 1964.
8. R. Rosman, *Aproximate analysis of Shear Walls Subject to Lateral Loads*, Journal of the American Concrete Institute (J.A.C.I.), June, 1964.
9. J. Schwaighoffer, Door Openings in Shear Walls J.A.C.I. Nov. 1967.
10 I. Macleod, Conected Shear Walls of Unequal Width. J.A.C.I. May 1970.
11. R. Agent, *Calculul diafragmelor cu goluri după metoda Albigès-Goulet este un calcul de diafragmă sau un calcul de cadru etajat*? Revista Construcțiilor *6* (1965).
12. D. Coșa, D. Țiței, M. Ionescu, *Stabilitatea căii ferate fără joante supusă la variații de temperatură*, Sesiunea științifică, Univ. Brașov, mai, 1972.
13. S. Timoshenko, S. Gere, *Theory of Elastic Stability*, Mc. Graw-Hill Book Company, New York, 1961.

STAREA DE EFORTURI UNITARE ÎN FUNDUL PLAN AL REZERVOARELOR CILINDRICE, VERTICALE, REZEMATE PE MEDIU ELASTIC

de Z. I. MANOLACHE şi R. I. IATAN

Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se prezintă o metodă de calcul al eforturilor unitare dezvoltate în fundul plan al rezervoarelor cilindrice verticale aşezate pe mediu elastic. Se are în vedere solicitarea simultană dată de presiunea hidrostatică a lichidului depozitat, de greutatea proprie a fundului, de reacţiunea mediului elastic şi de sarcinile de contur din îmbinarea fund-manta.

În final rezultatele teoretice obţinute sînt exemplificate pentru un rezervor dat.

1. GENERALITĂŢI

Rezervoarele cilindrice verticale au o largă utilizare pentru depozitarea lichidelor tehnologice. Una din problemele care preocupă pe proiectanţii şi cercetătorii unor astfel de utilaje este, pe de o parte, cea a reducerii greutăţii proprii a acestora, prin utilizarea cît mai judicioasă a materialelor de construcţie şi, pe de altă parte, folosirea unor metode de calcul care să redea cît mai veridic fenomenul real.

Zona cea mai solicitată a rezervoarelor cilindrice verticale, rezemate ca în figura 1, o constituie îmbinarea dintre manta şi fundul plan [1] — [4], motiv pentru care, în cele ce urmează, se urmăreşte determinarea stării de eforturi unitare şi în această zonă.

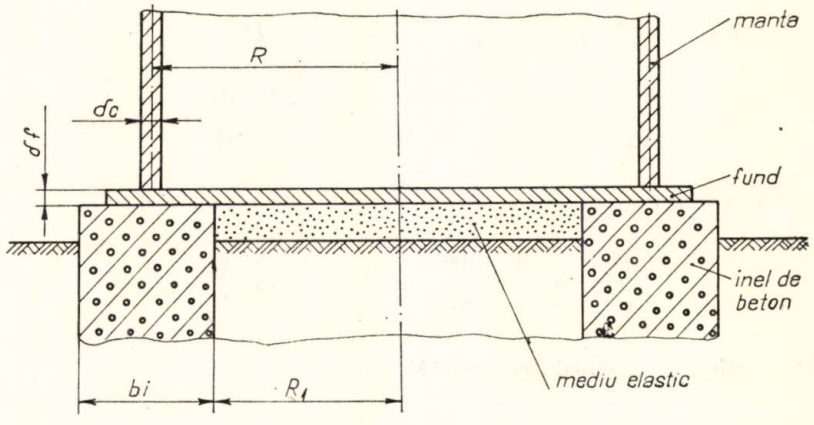


Fig. 1

2. STABILIREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A SĂGEȚII FUNDULUI

Fundul plan al rezervorului, considerat ca o placă plană circulară de grosime constantă, așezată pe mediu elastic, este solicitat de presiunea hidrostatică h, de greutatea proprie raportată la unitatea de suprafață p, de reacțiunea mediului elastic $-k_m w$ și de sarcinile (de contur) din îmbinarea manta-fund P_0 și M_0, conform reprezentării din figura 2.

Dacă se izolează din fundul plan un element de volum ca în figura 3, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru:

$$N_r \cdot r \cdot \frac{d^2w}{dr^2} + \left(N_r + r\frac{dN_r}{dr}\right)\frac{dw}{dr} + r\frac{dQ}{dr} + Q - qr = 0, \tag{1}$$

$$r\frac{dN_r}{dr} + N_r - N_\theta = 0, \tag{2}$$

$$r\frac{dM_r}{dr} + M_r - M_\theta + Qr = 0, \tag{3}$$

unde s-a notat

$$q = h + p - k_m w \tag{4}$$

pentru $0 \leqslant r \leqslant R_1$, respectiv

$$q = h + p \tag{5}*$$

pentru $R_1 \leqslant r \leqslant R$.

Cunoscînd relațiile [1]

$$M_r = -D_f(\chi_r + \mu\chi_\theta), \qquad M_\theta = -D_f(\chi_\theta + \mu\chi_r), \tag{6}$$

$$\chi_r = \frac{d^2w}{dr^2}, \qquad \chi_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}, \tag{7}$$

ecuația (3) devine

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D_f} \tag{8}$$

sau, după unele transformări matematice,

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D_f \cdot r}\cdot\frac{d}{dr}(Q \cdot r), \tag{9}$$

*) Inelul de beton (fig. 1) se consideră perfect rigid ($k_m = 0$).

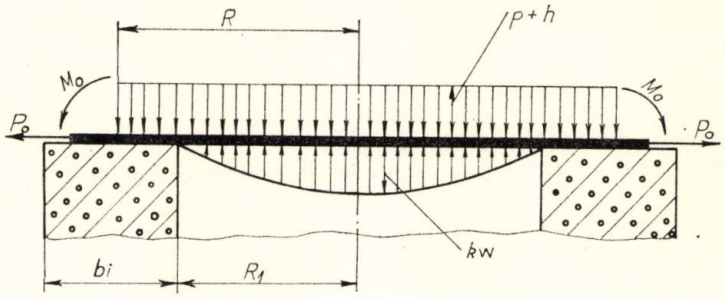

R
p + h
Mo
Mo
Po
Po
kw
bi
R1

Fig. 2

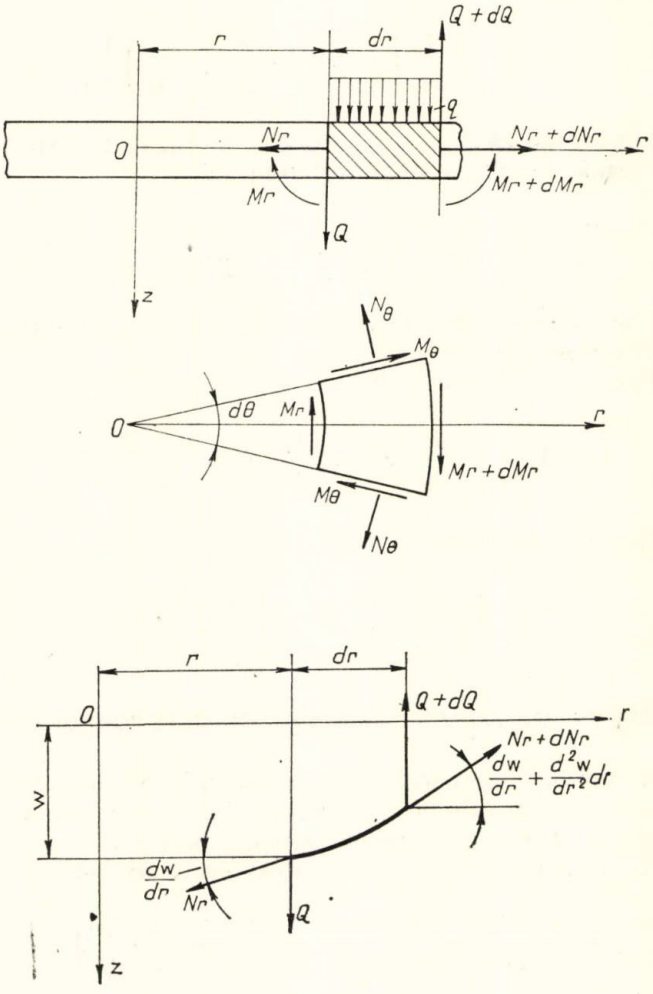

Q + dQ
r
dr
q
0
Nr
Nr + dNr
r
Mr
Mr + dMr
Q
z
Nθ
Mθ
dθ
Mr
r
Mr + dMr
Mθ
Nθ
r
dr
Q + dQ
0
r
Nr + dNr
dw/dr + d²w/dr² dr
w
dw/dr
Nr
Q
z

Fig. 3

în care

$$\Delta w = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} \tag{10}$$

este operatorul diferențial al lui Laplace.

Se observă că ecuația (1) poate fi restrînsă astfel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(N_r \cdot r \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(Q \cdot r) - q \cdot r = 0. \tag{11}$$

Substituind pe $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(Qr)$ din relația (9) cu expresia corespunzătoare din (11), se obține

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D_f}\left[q - \frac{N_r}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right], \tag{12}$$

unde s-a ținut seama că $N_r = P_0 = \text{const.}$ pe rază. Folosind notația (10), în cele din urmă, rezultă ecuația diferențială

$$\Delta\Delta w + \frac{N_r}{D_f} \Delta w = \frac{q}{D_f}. \tag{13}$$

Avînd în vedere figura 1 și expresiile (4) și (5), ecuația diferențială (13) se modifică corespunzător, pentru

— porțiunea I ($0 \leqslant r \leqslant R_1$)

$$\Delta\Delta w + \frac{P_0}{D_f} \Delta w + \frac{k_m}{D_f} w = \frac{p + h}{D_f}, \tag{14}$$

— porțiunea II ($R_1 \leqslant r \leqslant R$)

$$\Delta\Delta w + \frac{P_0}{D_f} \Delta w = \frac{p + h}{D_f}. \tag{15}$$

3. DETERMINAREA EXPRESIEI SĂGEȚII FUNDULUI PE PORȚIUNEA I

Întrucît fundul rezervorului pe porțiunea II rămîne plan (în contact cu inelul de beton), în cele ce urmează se va integra numai ecuația diferențială a săgeții fundului corespunzătoare porțiunii I.

Ecuația diferențială (14), scrisă dezvoltat, are forma

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} - a\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) - bw = \frac{p + h}{D_f}, \tag{16}$$

unde s-au făcut notaţiile

$$a = -\frac{P_0}{D_f} \quad \text{şi} \quad b = -\frac{k_m}{D_f}; \tag{17}$$

O soluţie a ecuaţiei omogene corespunzătoare ecuaţiei (16) se caută sub forma unei serii de puteri

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n, \tag{18}$$

ai cărei coeficienţi c_n se vor determina prin identificare. Considerînd $c_0 \neq 0$ şi $c_2 = 0$ rezultă

$$w_1 = 1 + \frac{b}{2^4(2!)^2} r^4 + \frac{ab}{2^6(3!)^2} r^6 + \frac{a^2b + b^2}{2^8(4!)^2} r^8 +$$

$$+ \frac{a^3b + 2ab^2}{2^{10}(5!)^2} r^{10} + \frac{a^4b + 3a^2b^2 + b^3}{2^{12}(6!)^2} r^{12} + \ldots \tag{19}$$

$$\ldots + \frac{N_k}{2^{2k}(k!)^2} r^{2k} + \ldots,$$

unde

$$N_k = bN_{k-2} + aN_{k-1} \tag{20}$$

este numărătorul termenului general al seriei pentru $k \geqslant 4$.

Adoptîndu-se $c_0 = 0$ şi $c_2 \neq 0$ se obţine o a doua soluţie sub forma

$$w_2 = r^2 + \frac{a}{2^2(2!)^2} r^4 + \frac{a^2 + b}{2^4(3!)^2} r^6 + \frac{a^3 + 2ab}{2^6(4!)^2} r^8 +$$

$$+ \frac{a^4 + 3a^2b + b^2}{2^8(5!)^2} r^{10} + \ldots + \frac{N_k}{2^{2k-2}(k!)^2} r^{2k} + \ldots, \tag{21}$$

unde N_k este dat de expresia (20) pentru $k \geqslant 3$.

Se poate verifica uşor, calculînd wronskianul, că cele două soluţii w_1 şi w_2 sînt liniar independente.

Se caută alte două soluţii sub forma

$$w_{3,4} = w_{1,2} \ln r + F_{3,4}(r), \tag{22}$$

unde $w_{1,2}$ sînt soluţiile (19), respectiv (21), urmînd să se determine funcţiile $F_{3,4}(r)$ din condiţia ca $w_{3,4}$ să fie soluţii ale ecuaţiei diferenţiale

omogene rezultată din (16). În urma calculelor necesare și a unor transformări matematice se obține

$$F_3(r) = -\frac{3b}{2^7} r^4 - \frac{17ab}{2^{11} \cdot 3^3} r^6 - \ldots, \tag{23}$$

$$F_4(r) = -2ar^4 - \frac{194a^2 + 5b}{2^7 \cdot 3^3} r^6 - \frac{391a^3 + 404ab}{2^{14} \cdot 3^3} r^8 - \ldots . \tag{24}$$

O soluție particulară a ecuației neomogene (16) este

$$w_p = \frac{p + h}{k_m}, \tag{25}$$

soluția generală devenind

$$w_I = C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 + C_4 w_4 + \frac{p + h}{k_m}, \tag{26}$$

unde w_1, w_2, w_3 și w_4 sînt soluțiile date de funcțiile (19), (21), (22), (23), (24), iar C_1, C_2, C_3 și C_4 sînt constante de integrare ce urmează a se determina din condițiile la limită ale problemei. Astfel, pentru porțiunea I, avînd în vedere figura 1, condițiile la limită sînt

$$\left(\frac{\mathrm{d}w_I}{\mathrm{d}r}\right)_{r=0} = 0, \tag{27}$$

$$\left(r\frac{\mathrm{d}^3 w_I}{\mathrm{d}r^3} + \frac{\mathrm{d}^2 w_I}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}w_I}{\mathrm{d}r}\right)_{r=0} = 0, \tag{28}$$

$$(w_I)_{r=R_1} = 0, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}w_I}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R_1} = 0. \tag{30}$$

Pentru îndeplinirea ultimei condiții la limită este necesar ca presiunea hidrostatică și greutatea proprie a fundului să nu permită ridicarea acestuia de pe inelul de sprijin sub acțiunea momentelor încovoietoare din zona de îmbinare manta-fund și a deformării fundului rezervorului pe porțiunea I. Pentru aceasta trebuie să fie îndeplinită inegalitatea

$$M_0 \leqslant \frac{\pi}{8}(h + p)b_i^2. \tag{31}$$

Utilizînd primele două condiţii la limită se obţine $C_3 = C_4 = 0$, soluţia (26) devenind

$$w_I = C_1 w_1 + C_2 w_2 + \frac{p + h}{k_m}. \tag{32}$$

Avînd în vedere condiţiile la limită (29), (30) şi soluţia (32), rezultă expresiile pentru calculul celorlalte două constante de integrare

$$C_1 = -\frac{\left(\frac{dw_2}{dr}\right)_{r=R_1}}{(w_1)_{r=R_1}\left(\frac{dw_2}{dr}\right)_{r=R_1} - (w_2)_{r=R_1}\left(\frac{dw_1}{dr}\right)_{r=R_1}} \cdot \frac{p + h}{k_m}, \tag{33}$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{dw_1}{dr}\right)_{r=R_1}}{(w_1)_{r=R_1}\left(\frac{dw_2}{dr}\right)_{r=R_1} - (w_2)_{r=R_1}\left(\frac{dw_1}{dr}\right)_{r=R_1}} \cdot \frac{p + h}{k_m}. \tag{34}$$

4. CALCULUL EFORTURILOR UNITARE

4.1. ÎN ÎMBINAREA FUND-MANTA

Pentru calculul eforturilor unitare în îmbinarea fund-manta este necesar să se determine mai întîi efortul P_0 şi momentul încovoietor M_0, dezvoltate în zona indicată. În acest scop se folosesc ecuaţiile de continuitate ale deformaţiilor corespunzătoare celor două elemente îmbinate

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_l g}{4k_c^4 D_c} H^* + \frac{2k_c R^2}{\delta_c E} P_0 - \frac{2k_c^2 R^2}{\delta_c E} M_0 = 0, \\ \frac{\rho g}{4k_c^4 D_c} - \frac{2k_c^2 R^2}{\delta_c E} P_0 + \frac{4k_c^3 R^2}{\delta_c E} M_0 = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

de unde rezultă

$$P_0 = \frac{\rho_l g \delta_c E}{4k_c^6 D_c R^2}\left(k_c H^* - \frac{1}{2}\right), \tag{36}$$

$$M_0 = \frac{\rho_l g \delta_c E}{8k_c^7 D_c R^2}(k_c H^* - 1). \tag{37}$$

Efortul unitar total în fibrele extreme ale fundului se calculează cu relaţia

$$\sigma_{fII} = \frac{P_0}{\delta_f} \pm \frac{6M_0}{\delta_f^2}. \tag{38}$$

4.2. PE PORŢIUNEA I A FUNDULUI REZERVORULUI

Momentul încovoietor se determină, după cum se ştie, cu relaţia

$$M_{fI} = -D_f\left(\frac{\mathrm{d}^2 w_I}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mu}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}w_I}{\mathrm{d}r}\right), \tag{39}$$

iar eforturile unitare în fibrele extreme sînt date de

$$\sigma_{fI} = \frac{P_0}{\delta_f} \pm \frac{6M_{fI}}{\delta_f^2}. \tag{40}$$

5. EXEMPLU NUMERIC

Pentru exemplificarea rezultatelor teoretice obţinute în cele ce preced, se consideră un rezervor cilindric, vertical, avînd următoarele caracteristici [3]:

— diametrul interior la bază, $D_{ib} = 22\,790$ mm,
— înălţimea rezervorului, $H = 11\,845$ mm,
— volumul geometric, $V = 4\,320$ m^3,
— greutatea mantalei, $G_m = 43{,}56$ tf,
— grosimea virolei de bază, $\delta_c = 10$ mm,
— greutatea fundului, $G_f = 19{,}38$ tf,
— grosimea tablei fundului, $\delta_f = 6$ mm,
— greutatea capacului, $G_c = 21{,}235$ tf,
— înălţimea coloanei de apă, $H^* = 8\,000$ mm,
— constanta elastică a mediului de rezemare, $k_m = 7$ daN/cm^3.

Cu ajutorul acestor date se obţin, în urma calculelor, mărimile: $p = 4{,}75\times10^{-3}$ daN/cm^2; $h = 800\times10^{-3}$ daN/cm^2; $P_0 = 20$ daN/cm, $M_0 = 267$ daNcm/cm; $a = -4{,}8\times10^{-4}$ cm^{-2} şi $b = 1{,}68\times10^{-4}$ cm^{-4}. Raza interioară a inelului de beton se alege $R_1 = 11\,100$ mm.

Folosind relaţia (38) rezultă valorile eforturilor unitare $\sigma_{fII} = 4\,513$ daN/cm^2 în fibra interioară (dinspre lichid), respectiv $\sigma_{fII} = -4\,447$ daN/cm^2 în fibra exterioară a fundului rezervorului, în zona de îmbinare cu mantaua.

Datorită complexităţii expresiilor de calcul ale constantelor de integrare C_1 şi C_2 [vezi relaţiile (33) şi (34)] problema nu poate fi rezolvată în timp util prin calcule obişnuite, astfel încît este necesară utilizarea unui calculator electronic. Cu ajutorul unui program de calcul elaborat în acest scop s-au evaluat mărimile $(w_1)_{r=R_1}$, $(w_2)_{r=R_1}$, $\left(\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R_1}$ şi $\left(\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R_1}$, pe baza cărora s-au determinat valorile constantelor de integrare $C_1 =$

$= 76{,}8 \times 10^{-52}$ cm, $C_2 = -6{,}5 \times 10^{-52}$ cm^{-1}. Utilizînd acelaşi program de calcul s-au determinat şi valorile pentru $\left(\frac{d^2w_1}{dr^2}\right)_{r=R_1}$, $\left(\frac{d^2w_2}{dr^2}\right)_{r=R_1}$, $\left(\frac{d^2w_1}{dr^2}\right)_{r=0}$, $\left(\frac{d^2w_2}{dr^2}\right)_{r=0}$, cu care au fost calculate eforturile unitare în centrul fundului deformat, $\sigma_{fI} = 33$ daN/cm^2, şi pe circumferinţa de rază R_1, $\sigma_{fI} = 3\,083$ daN/cm^2 în fibra interioară, respectiv $\sigma_{fI} = 3\,017$ daN/cm^2 în fibra exterioară.

După cum se vede din calculele anterioare, zona cea mai solicitată este îmbinarea dintre mantaua rezervorului şi fundul acestuia.

NOTAŢII UTILIZATE

$D_c = \frac{E\delta_c^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea cilindrică a virolei de bază a rezervorului;

$D_f = \frac{E\delta_f^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a fundului rezervorului;

E — modulul de elasticitate longitudinală a materialului de construcţie pentru rezervor şi fund;

g — acceleraţia gravitaţiei;

H^* — înălţimea lichidului din rezervor;

h — presiunea hidrostatică la baza rezervorului;

k_m — constanta elastică a mediului de rezemare a fundului;

M_0 — momentul încovoietor meridional;

N_r — efortul radial într-un punct oarecare al suprafeţei mediane a fundului;

P_0 — efortul radial la baza rezervorului;

R — raza suprafeţei mediane a virolei de bază;

R_1 — raza interioară a inelului de beton;

r — raza curentă a fundului;

p — greutatea fundului raportată la unitatea de suprafaţă;

δ_c — grosimea virolei de bază a rezervorului;

δ_f — grosimea fundului rezervorului;

ρ_l — densitatea lichidului depozitat;

μ — coeficientul contracţiei transversale;

b_i — lăţimea inelului de beton.

Primită la redacţie la 18 mai 1973

BIBLIOGRAFIE

1. P. S., Timoşhenko, S. Woinowski-Krieger, *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Editura tehnică Bucureşti, 1968.
2. D. S. Ponomariov, ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. 2, Editura tehnică, Bucureşti, 1963.
3. A. Pavel, *Depozitarea produselor volatile*, vol. 1, Institutul central de documentare tehnică, Bucureşti, 1968.
4. R. I. Iatan, *Contribuţii la aprecierea concentrării de eforturi unitare la rezervoarele cilindrice*, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, **XXXVI**, *1*, 71—82 (1974).

EFECTUL BARODIFUZIEI ÎN STRATUL-LIMITĂ

de IOAN STAN

Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca
Facultatea de matematică-mecanică

Lucrarea studiază efectul barodifuziei la scurgerea unui fluid vîscos, incompresibil, peste o suprafaţă, considerîndu-se că între ele se stabileşte o reacţie eterogenă. După ce se dau ecuaţiile ce guvernează fenomenul în stratul-limită, se stabileşte profilul concentraţiei unui component, la o scurgere exterioară de forma $U = U_0\ e^{nt}$, presupunînd că mărimea concentraţiei variază exponenţial, în masa fluidului.

INTRODUCERE

Scurgerea unui fluid peste un corp solid este însoţită, în multe cazuri, de unele procese chimice sau fizico-chimice. Printre ele putem aminti dizolvarea corpului de un lichid, reacţia chimică dintre un metal (Fe,Zn etc.) şi un acid diluat, reacţiile chimice generate în fluid ca urmare a proprietăţilor catalitice ale suprafeţei etc.

Aceste procese chimice sau fizico-chimice, care au loc la limita de separare a două faze, intră în categoria reacţiilor eterogene [1], fiind caracterizate prin aceea că dintre substanţele care reacţionează, una sau mai multe sînt repartizate între cele două faze.

Scurgerile unui fluid peste o suprafaţă, între care se stabileşte o reacţie eterogenă, prezintă un dublu aspect şi anume, pe de o parte transportul hidrodinamic al fluidului peste suprafaţă, iar pe de altă parte, mecanismul formării reacţiei chimice pe suprafaţă. Deoarece la scurgerea unui fluid vîscos peste o suprafaţă apare un strat-limită hidrodinamic în imediata vecinătate a suprafeţei, reacţiile eterogene au loc în acest strat, formîndu-se un al doilea strat, numit de difuzie. Studiul stratului-limită de difuzie a fost, în ultimii ani, obiectul a mai multor cercetări, care au stabilit profilul concentraţiei substanţelor ce reacţionează în acest strat. În aceste lucrări [2] — [4], se neglijează efectul barodifuziei asupra profilului concentraţiei, considerîndu-se că transportul de masă datorat gradientului de presiune poate fi neglijat în raport cu cel datorat variaţiei concentraţiei.

În această lucrare ne propunem să stabilim în ce condiţii efectul barodifuziei nu se poate neglija, să deducem ecuaţia ce guvernează acest efect şi să o aplicăm la o scurgere nestaţionară.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 4, 1975, P. 583—593

ECUAȚIA DIFUZIEI CONVECTIVE

Ori ce reacție eterogenă conține trei etape care nu au, în general, același rol. Prima etapă constă în transportul substanțelor care reacționează către suprafață, a doua etapă este a reacției propriu-zise, iar a treia constă în îndepărtarea produșilor de reacție de pe suprafață.

Viteza cu care se realizează aceste etape diferă de la caz la caz, dar de fiecare dată un rol important îl joacă transportul substanțelor de la și în spre suprafață. Acest proces dublu, care asigură de fapt continuarea reacției eterogene, se realizează prin difuzie moleculară. Ca urmare a acestui proces de difuzie, apare o variație a concentrației, în apropierea suprafeței, atît a reactanților, cît și a produșilor de reacție.

Profilul concentrației unui component se determină cu ajutorul ecuației difuziei convective [5], [6]. În cele ce urmează, noi vom considera numai un amestec binar. Notînd prin c concentrația unui component, ecuația transportului de masă, spre sau de la suprafață, este

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -\nabla \vec{i}_{\mathrm{dif}}, \tag{1}$$

unde $\vec{i}$, intensitatea fluxului de masă, este dat de numărul particulelor difuzate în unitatea de timp prin unitatea de suprafață.

Fluxul de masă este dat de relația

$$\vec{i}_{\mathrm{dif}} = -\alpha \nabla \mu, \tag{2}$$

unde $\alpha > 0$ este un coeficient de proporționalitate, iar μ, potențialul chimic, este funcție de concentrație c, presiune p, și temperatură T, astfel că (2) devine

$$\vec{i}_{\mathrm{dif}} = -\alpha\left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T} \nabla c + \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{c,T} \nabla p + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{c,p} \nabla T\right]. \tag{3}$$

Limitîndu-ne la procese izoterme, scopul nostru fiind studierea efectului barodifuziei, putem scrie

$$\vec{i}_{\mathrm{dif}} = -D \operatorname{grad} c + k \operatorname{grad} p, \tag{4}$$

unde $D = \alpha\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T}$ este coeficientul de difuzie moleculară, iar $k = -\alpha\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{c,T}$ este coeficientul de barodifuzie [7]. Înlocuind (4) în (1) obținem ecuația

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \nabla (D \nabla c) - \nabla (k \nabla p). \tag{5}$$

Pentru fluide incompresibile şi în condiţii izoterme coeficienţii de difuzie şi barodifuzie pot fi consideraţi constanţi, astfel că (5) devine

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, c = D \Delta c - k \Delta p, \tag{6}$$

$\vec{v}$ fiind viteza de scurgere a fluidului.

Aceasta este ecuaţia difuziei convective a scurgerii izoterme, în care transportul de masă al componenţilor apare ca urmare a convecţiei fluidului, difuziei moleculare şi a barodifuziei.

CINETICA REACŢIILOR CHIMICE

Mecanismul reacţiilor chimice şi a factorilor care influenţează viteza de reacţie este foarte complex. Pe noi ne interesează doar reacţiile eterogene care apar în stratul-limită, mai precis la limita de separaţie dintre fluid şi suprafaţă. Distingem două tipuri de reacţii, şi anume, în care suprafaţa acţionează catalitic sau în care suprafaţa participă la reacţie. Ca exemplu ne poate servi disocierea sau recombinarea catalitică a moleculelor şi atomilor unui gaz în prezenţa unei suprafeţe, care nu-şi modifică structura şi forma geometrică sau dizolvarea unui metal într-un acid.

Reacţia catalitică a unei suprafeţe o putem da sub forma generală [1]

$$A + \text{suprafaţă} \underset{k_{s_2}}{\overset{k_{s_1}}{\rightleftharpoons}} B + \text{suprafaţă}, \tag{7}$$

k_{s_1} şi k_{s_2} fiind constantele de viteză pentru reacţia directă şi opusă, pe suprafaţă. În ceea ce priveşte cantitatea de substanţă ce reacţionează în unitatea de timp şi pe unitatea de suprafaţă $I_{A,s}$, avem expresia

$$I_{A,s} = - k_s (c_A)^{n_1} + k_s (c_B)^{n_2}, \tag{8}$$

unde c_A şi c_B sînt concentraţiile celor două elemente, iar n_1 şi n_2 ordinele de reacţie corespunzătoare.

La cele mai multe reacţii k_{s_2} este mic ca urmare a faptului că reacţia opusă este neglijabilă, astfel că putem scrie pentru reacţile catalitice de suprafaţă

$$I_{A,s} = - k_s (c_A)^n. \tag{9}$$

O relaţie asemănătoare se poate obţine uneori şi în cazul unei reacţii chimice la care unul din reactanţi este suprafaţa.

ECUAȚIA DIFUZIEI CONVECTIVE ÎN STRATUL-LIMITĂ

Scurgerea unui fluid vîscos peste o suprafață este caracterizată prin apariția unui strat-limită hidrodinamic. Limitîndu-ne la cazul bidimensional, ecuațiile stratului-limită, în lipsa forțelor de volum, sînt [8,9]

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{10b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{10c}$$

u și v fiind componentele vitezei, ρ densitatea, iar ν vîscozitatea fluidului, Ox fiind în lungul suprafeței, iar Oy perpendiculară pe ea. În afara stratului-limită, unde fluidul e considerat ideal, ecuația scurgerii este

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{11}$$

Condițiile la limită sînt date de viteza fluidului pe suprafață și la distanțe mari de ea

$$y=0,\quad u=v=0, \tag{12a}$$

$$y=\infty,\quad u=U. \tag{12b}$$

Datorită antrenării fluidului, variația concentrației ca urmare a difuziei componentelor, are loc numai în vecinătatea suprafeței, formîndu-se un al doilea strat-limită, de difuzie. Ecuația difuziei convective în stratul-limită o vom deduce prin analizarea ordinului de mărime ai termenilor ecuației (6). Introducînd variabilele adimensionale

$$t'=\frac{U}{L}t,\quad x'=\frac{x}{L},\quad y'=\frac{y}{L}\mathcal{R},\quad u'=\frac{u}{U},\quad v'=\frac{v}{U}\mathcal{R},\quad p'=\frac{p}{U},\quad c'=\frac{c}{C},$$

unde L și C sînt o lungime, respectiv concentrație caracteristică, iar $\mathcal{R}=\dfrac{LU}{\nu}$ este numărul lui Reynolds. Înlocuirea acestor variabile în (6) ne dă după calcule simple

$$\frac{\partial c'}{\partial t'}+u'\frac{\partial c'}{\partial x'}+v'\frac{\partial c'}{\partial y'}=\frac{1}{\mathcal{P}e}\frac{\partial^2 c'}{\partial x'^2}+\frac{1}{\mathcal{S}e}\frac{\partial^2 c}{\partial y'^2}-k'\frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2}, \tag{13}$$

$\mathcal{P}e = \frac{LU}{D}$ fiind numărul lui Peclet, $\mathcal{S}e = \frac{\nu}{D}$ numărul lui Schmidt, iar $k' = \frac{kU}{LC}$. La stabilirea acestei ecuații am ținut cont că în stratul-limită $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, (10c).

Numărul lui Peclet este în general mare, ca urmare a faptului că viteza de difuzie moleculară este mică în comparație cu viteza fluidului. Aceasta ne permite să neglijăm termenul $\frac{\partial^2 c'}{\partial x'^2}$, presupus finit. Ecuația difuziei convective în stratul-limită, sub formă adimensională devine

$$\frac{\partial c'}{\partial t'} + u' \frac{\partial c'}{\partial x'} + v' \frac{\partial c'}{\partial y'} = \frac{1}{\mathcal{S}e} \frac{\partial^2 c'}{\partial y'^2} - k' \frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2}. \tag{14}$$

Observăm că efectul barodifuziei este de ordinul de mărime al difuziei moleculare dacă $K \sim \frac{1}{\mathcal{S}e}$. Întrucît pentru gaze $\mathcal{S}e \sim 1$, trebuie să avem $K' \sim 1$, iar pentru lichide, unde $\mathcal{S}e \sim 10^3$, $k' \sim 10^{-3}$, valori care se pot realiza în anumite condiții legate de dimensiunea corpului, viteza scurgerii exterioare și a concentrației în masa fluidului.

Revenind la notațiile inițiale, ecuația difuziei convective în stratul-limită devine

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Condițiile la limită sînt date de raportul în care se găsesc cele două viteze ale unei reacții eterogene și anume viteza de reacție și viteza de difuzie. Dacă procesul este staționar din punct de vedere chimic, adică întreaga masă difuzată pe suprafață și cea care intră în reacție sînt egale, avem condiția

$$D\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0} = k_s (c_s)^n \tag{16}$$

obținută prin egalarea lui (4) cu (9), ținînd cont de (10c). Dacă însă viteza de reacție este mult mai mare decît cea de difuzie, concentrația substanțelor reactante este practic nulă, întreaga cantitate de substanță difuzată fiind reactată practic instantaneu. Avem în acest caz condiția

$$c_s = 0. \tag{17}$$

Dimpotrivă, la viteze mici de reacţie, în comparaţie cu cea a transportului de substanţă, condiţia este

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \tag{18}$$

Pe lîngă acestea, se mai dă valoarea concentraţiei în masa fluidului.

Ecuaţiile stratului-limită de difuzie sînt date de ecuaţiile stratului-limită hidrodinamic (10a), (10b) şi de ecuaţia (15). În vederea aplicaţiilor este mai util să dăm o altă formă acestor ecuaţii, introducînd viteza scurgerii potenţiale exterioare prin ecuaţia (11), astfel că obţinem final

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{19a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{19b}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial u} + v\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} + U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right], \tag{19c}$$

unde $K = k\rho$. Condiţiile la limită rămîn cele amintite mai sus.

Observăm că dacă viteza scurgerii exterioare este constantă, efectul barodifuziei lipseşte, ecuaţiile difuziei în stratul-limită reducîndu-se la cele cunoscute [2]. Aceasta se explică prin faptul că gradientul de presiune este nul (11). Aceleaşi ecuaţii cunoscute se obţin dacă transportul de masă ca urmare a existenţei unui gradient al presiunii este mic în comparaţie cu cel al gradientului concentraţiei, $K \approx 0$.

PROFILUL CONCENTRAŢIEI LA SCURGEREA EXTERIOARĂ EXPONENŢIALĂ

Aplicăm acum ecuaţiile deduse mai sus la scurgerea unui fluid vîscos, incompresibil, peste un cilindru, viteza scurgerii potenţiale fiind

$$U(x, t) = U_0(x)\, e^{nt}. \tag{20}$$

Presupunem că suprafaţa acţionează catalitic, generînd o reacţie eterogenă cu viteză mare (17), ordinul de reacţie fiind egal cu unitatea. Facem de asemenea ipoteza că datorită unor cauze exterioare — descărcări electrice, temperatură înaltă — acţionînd asupra fluidului înainte de a ajunge pe corp (fig. 1), concentraţia variază în mod exponenţial, în raport cu o valoare dată C_s

$$c(x, \infty, t) = C_s(x) + C_m(x)\, e^{mt}. \tag{21}$$

Stratul-limită hidrodinamic al unei scurgeri potențiale de forma (20) a fost studiat de Watson [10], utilizînd metoda aproximațiilor succesive. Este cunoscut [8] că pentru scurgerile care pornesc din repaus, în cazul nostru repausul îl avem la $t = -\infty$, este satisfăcută condiția

$$\left| U \frac{\partial U}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|, \tag{22}$$

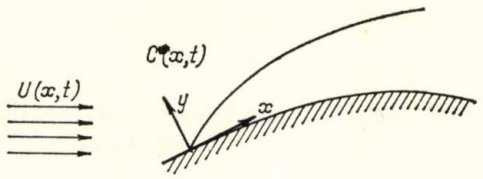


Fig. 1.

ceea ce permite să se caute soluția de forma

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t), \tag{23a}$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + v_1(x, y, t), \tag{23b}$$

unde u_0, v_0, u_1, v_1, sînt componentele vitezei în aproximația de ordinul zero, respectiv întîi.

Aproximația de ordinul zero, singura care ne va interesa în continuare, este

$$u_0 = U_0(x)\,(1 - e^{-\eta})\,e^{nt}, \tag{24a}$$

$$v_0 = -\sqrt{\frac{\nu}{n}}\,U_0'(x)\,(e^{-\eta} + \eta - 1)\,e^{nt}, \tag{24b}$$

unde

$$\eta = \sqrt{\frac{n}{\nu}}\,y. \tag{25}$$

Considerînd că difuzia convectivă este mică la începutul mișcării, raportată la difuzia moleculară, putem scrie condiția

$$\left| u \frac{\partial c}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial c}{\partial t} \right|. \tag{26}$$

Din (22) avem

$$\left| U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial t} \right| \tag{27}$$

presupunînd că $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ este de ordin superior.

Căutînd o soluţie de forma

$$c = c_0 + c_1, \tag{28}$$

prin înlocuire în ecuaţia (19a) şi identificarea termenilor de acelaşi ordin de mărime, obţinem ecuaţiile aproximaţiilor de ordinul zero şi întîi

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} = K \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial t}, \tag{29a}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_1}{\partial y_2} = KU \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - u_0 \frac{\partial c_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial c_0}{\partial y}, \tag{29b}$$

cu condiţiile la limită

$$y = 0. \qquad c_0 = c_1 = 0, \tag{30a}$$

$$y = \infty, \qquad c_0 = C_s + C_m \, \mathrm{e}^{mt}. \tag{30b}$$

Condiţia la limită a aproximaţiei de ordinul zero ne sugerează soluţia de forma

$$c_0 = C_s f_1 (y, t) + C_m f_2 (y) \, \mathrm{e}^{mt}, \tag{31}$$

care, înlocuită în (29a), ne dă, ţinînd cont de liniaritatea ecuaţiilor,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \tag{32a}$$

$$mC_m f_2 - DC_m f_2'' \, \mathrm{e}^{mt} = mKU_0' \, \mathrm{e}^{nt}, \tag{32b}$$

cu condiţiile la limită

$$y = 0, \quad f_1 = f_2 = 0, \tag{33a}$$

$$y = \infty, \; f_1 = f_2 = 0 \tag{33b}$$

Introducînd notaţia

$$\xi = \frac{y}{2\sqrt{Dt}} \tag{34}$$

ecuaţia, (32a) devine

$$f_1'' + 2\xi f_1' = 0, \tag{35}$$

care admite soluţia binecunoscută [8]

$$f_1 = \operatorname{erf} \xi. \tag{36}$$

Ecuaţia (32b) admite o soluţie independentă de timp dacă $m = n$. Introducînd variabila η, (25) putem scrie

$$f_2'' - \mathcal{S}e f_2 = -\frac{KU_0}{C_m} \mathcal{S}e, \tag{37}$$

care admite soluţia

$$f_2 = 1 - e^{-\sqrt{\mathcal{S}e}\,\eta} \tag{38}$$

dacă

$$C_m = KU_0'. \tag{39}$$

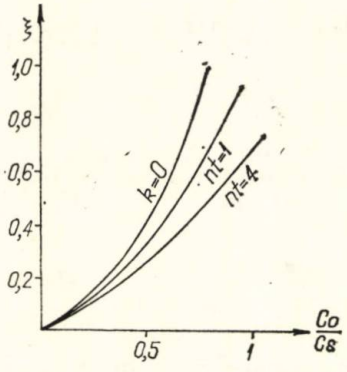


Fig. 2.

Aproximaţia de ordin zero este în acest mod

$$c_0 = C_s \operatorname{erf} \xi + KU_0' (1 - e^{-\sqrt{\mathcal{S}e}\,\eta})\, e^{nt}, \tag{40}$$

unde primul termen corespunde difuziei moleculare, iar al doilea termen al barodifuziei. Se observă că dacă transportul masei prin barodifuzie este neglijabil $K \approx 0$, profilul concentraţiei este stabilit numai de difuzia moleculară.

În figura 2 dăm profilul concentraţiei la diferite momente, în ipoteza că $C_s = C_m$, precum şi pentru $k = 0$.

Trecem acum la calcularea aproximaţiei de ordinul întîi. Înlocuind în (29b) expresiile componentelor vitezei (24a), (24b), şi a concentraţiei (40) obţinem

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - \frac{u}{\mathcal{S}e}\frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta} = [(a-b)\,e^{-\sqrt{\mathcal{S}e}\,\eta} + (b-a)\,e^{-(1+\sqrt{\mathcal{S}e})\,\eta} + \tag{41}$$

$$+ ae^{-\eta} + b\eta e^{-\sqrt{\mathcal{S}e}\,\eta}]e^{2nt},$$

unde

$$a = K\,U_0\,U_0'', \quad b = K\,U_0'^2. \tag{42}$$

Căutăm o soluţie de forma

$$c_1 = C_1(x)\,f(y)\,e^{2nt} \tag{43}$$

cu condiţiile la limită

$$y = 0, \quad f = 0; \quad y = \infty, \quad f = 0. \tag{44}$$

După calcule simple obţinem soluţia

$$c_1 = C_1(A + H\eta)\,e^{-\sqrt{\mathcal{S}e}\,\eta} + Be^{-1+\sqrt{\mathcal{S}e}\,\eta} + Fe^{-\eta} - (A+B+F)e^{-\sqrt{2\mathcal{S}e}\,\eta}, \tag{45}$$

unde

$$A = \frac{a-b}{nC_1} - \frac{2b}{nC_1\,\mathcal{S}e}, \quad B = \frac{a-b}{nC_1^1}\,\frac{1}{1-\mathcal{S}e\,2\mathcal{S}e},$$

$$F = \frac{\mathcal{S}e}{n\,C_1}\,\frac{a}{2\mathcal{S}e-1}, \quad H = \frac{b}{nC_1}.$$

Pentru valori mari ale numărului Schmidt se poate da o expresie mai simplă a acestei relaţii.

Se observă că dacă $k \approx 0$, aproximaţia de ordinul întîi se anulează.

Am obţinut în acest mod profilul concentraţiei în stratul-limită luînd în considerare pe lîngă difuzia moleculară şi difuzia datorită unui gradient de presiune. Efectul barodifuziei se poate calcula dacă se cunoaşte viteza scurgerii potenţiale, funcţie de x şi t. În cazul considerat de noi am putut calcula primele două aproximaţii viteza fiind de forma generală. Dacă ea depinde numai de x efectul barodifuziei apare numai în aproximaţia de ordinul întîi, iar dacă este numai funcţie de timp nu avem acest efect, lipsind un gradient de presiune.

Primită la redacţie la 2 aprilie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. P. M. Chung, *Advances in Heat Transfer*, vol. 2, Academic Press, New York 1965.
2. W. E. Stewart, *Diffusion and first Order Reaction in Time Dependent Flow*, Chem. Engng. Sci, *5*, 483 (1968).
3. P. L. Chambré, A. Acrivos, *On Chemical Surface Reactions in Laminar Boundary Layer Flows*, J. of Appl. Phys. *27*, 1322 (1956).
4. P. M. Chung, *Chemicalty Reacting Nonequilibrium Boundary Layers*, The Phys. of Fluids *1*, 53 (1969).
5. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mehanika sploșnth sred*, Gosud. tehniko-teoret. lit. Moskva, 1953.
6. V. G. Levici, *Fiziko-himiceskaia gidrodinamika*, Fizmatgiz, Moskva, 1959.
7. T. W. Kao, *Establishment of Concentration Profile for the Flow of a Binary Fluid Mixture*, The Phys. of Fluids, *6*, 1216 (1966).
8. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
9. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Ed. Academiei, București, 1967.
10. E. J. Watson, *Boundary Layer Growth*, Proc. Roy. Soc. A 231, 1955, p. 104.

TEMPERATURA CA ELEMENT INDICATOR FUNCȚIONAL ȘI AL NATURII UNOR PROCESE DE CURGERE ÎN LAGĂRELE RADIALE CU ALUNECARE*

de GH. MANEA, M. PASCOVICI

Academia R.S. România Institutul politehnic București

Sînt prezentate constatări cu caracter de generalitate din considerarea de ansamblu a concluziilor unor îndelungate studii teoretice și experimentale, arătîndu-se evoluția modului de apreciere a comportării termice a lagărului.
Sînt exemplificate avantajele cunoașterii cîmpului de temperaturi în film în legătură cu determinarea temperaturii medii și a nivelelor critice de încălzire.
Relațiile elaborate pentru filmul de lungime infinită, cu înălțime variabilă, considerînd totodată variația viscozității medii locale, pe direcția x, au permis trasarea izotermelor care redau aspectul termic în zonele interesante.
Din această reprezentare, din considerațiile generale asupra curgerii hidrodinamice, ca și dintr-o serie de rezultate experimentale, sînt puse în evidență posibilitățile oferite de cîmpul de temperaturi pentru aprecierea unor aspecte de curgere în filmul de lubrifiant.

1. EVOLUȚIA MODULUI DE CONSIDERARE A COMPORTĂRII TERMICE A LAGĂRELOR CU ALUNECARE

În toate etapele de cunoaștere a fenomenelor caracteristice și a metodelor de calcul al lagărelor cu alunecare, *încălzirea*, pentru același cuplu de materiale, în mod determinant dependentă de condițiile geometrice, tehnologice și funcționale, a fost considerată ca un element indicativ și, totodată, limitativ pentru buna comportare a lor.

Se prezintă în cele ce urmează unele constatări cu caracter de generalitate, rezultate din considerarea de ansamblu a concluziilor și, în același timp, din adîncirea unei suite de cercetări efectuate consecvent într-o lungă perioadă de timp, de colective conduse de prof. G. Manea în cadrul catedrei de Organe de Mașini din Institutul politehnic București, unele din aceste investigații devenite lucrări de doctorat.

Schema din figura 1 reflectă de fapt evoluția în timp a modului de a aprecia încălzirea, principalele cercetări efectuate în țara noastră și în afara granițelor, ipotezele principale de studiu și domeniile funcționale de utilizare a rezultatelor.

*) Prezentat în sesiunea de comunicări științifice a Secției de Științe Tehnice a Academiei R.S.R. din 12—13 decembrie 1974.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 4, 1975, P. 595—611

De la clasicul produs *p.v.*, dedus din puterea specifică pierdută prin frecare, acceptat în trecut ca unic criteriu de verificare, respectiv de apreciere a siguranței termice a lagărului, indiferent de natura frecării, s-a trecut *la o a doua etapă*, ajutată de teoria hidrodinamică, a deducerii analitice sau grafoanalitice a *„temperaturii medii"*, în starea de regim stabil, în condiții de răcire naturală sau forțată.

Dar și această metodă „globală", ca nivel de progres superioară celei precedente prin obținerea unei mărimi fizice concrete „temperatura", conținea dificultăți legate de precizarea noțiunii de „temperatură medie" și de stabilirea unor coeficienți caracteristici globali pentru capacitatea de cedare a căldurii, dependenți de materialul, forma și masivitatea corpului lagărului [11], [13], [15].

Studiile, experimentale și teoretice, asupra *cîmpului de temperaturi* în filmul de lubrifiant, în ipoteza variației *bi- și tridimensionale*, pot fi considerate ca o *a treia etapă* care a dus, inițial, la cunoașterea *distribuției de temperaturi* pe direcția periferică și pe cea longitudinală [1], [5], [19], [22], [27], [28], [32], [34].

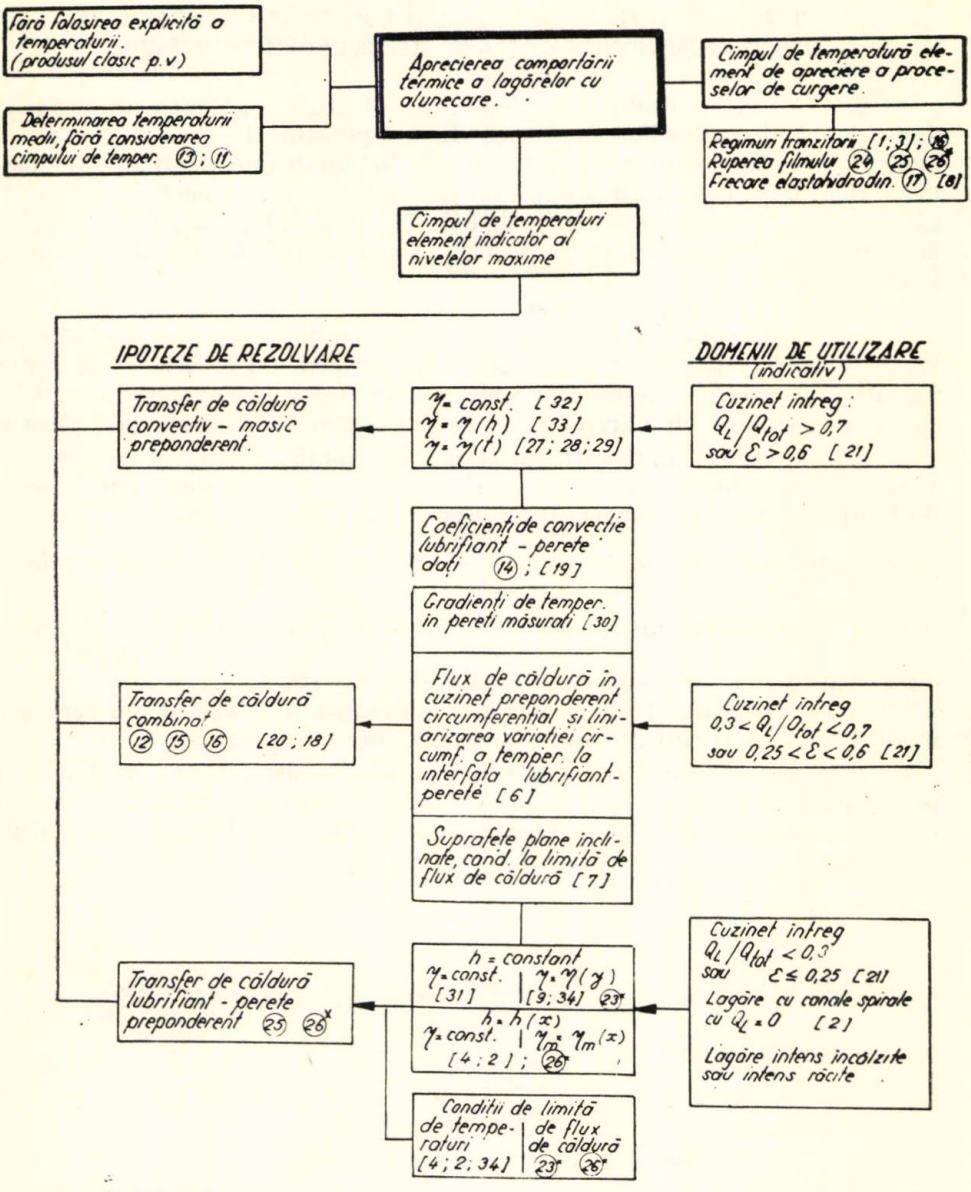
Cunoașterea cîmpului de temperaturi permite, dincolo de informația asupra unor valori medii, stabilirea nivelelor maxime de încălzire a filmului de lubrifiant, a cuzinetului și arborelui, de importanță pentru acordarea alegerii lubrifiantului în raport cu materialul cuzinetului și condițiile funcționale, în scopul asigurării fiabilității, în mod deosebit în cazul încărcărilor specifice și turațiilor ridicate, sau al utilizării unor materiale noi.

Ca *ultimă etapă*, deschizătoare de drumuri noi, considerăm aceea în care se face legătura între distribuția de temperaturi și unele aspecte ale proceselor de curgere în interstițiul din lagăr, spre a se înterpreta natura lor, de exemplu, regimuri de tranziție, ruperea filmului sau procese de natură elasto-termohidrodinamică.

Dificultăți matematice încă neînvinse stau în calea obținerii unor rezultate analitice general valabile pentru descrierea completă a proceselor *reale* ale transferului de căldură în stratul de fluid, în cuzinet și fus, către mediul ambiant, cu considerarea variației tridimensionale a temperaturii, respectiv a viscozității; ocolirea acestora a implicat introducerea unor ipoteze simplificatoare referitoare la preponderența modului de evacuare a căldurii, la forma suprafețelor care delimitează filmul, la forma interstițiului, la modul de variație a viscozității în strat, sau la direcția principală a fluxului de căldură în cuzinet (fig. 1).

De regulă, în rezolvarea analitică a problemelor privind aspectul termic al lagărelor au fost folosite condiții la limită legate de temperaturi. Cuprinderea procesului de transfer de căldură film lubrifiant-perete lasă să apară mai rațională introducerea și a unor condiții la limită legate de *fluxul* de căldură, eliminîndu-se necesitatea adoptării unor distribuții ipotetice a temperaturii la suprafețele solide [23], [26].

Limitîndu-ne numai la ultimele două etape vom demonstra *posibilitățile* lor numai cu exemplificări ale unor constatări derivate din cercetări proprii ale colectivelor noastre.


Fără folosirea explicită a temperaturii. (produsul clasic p.v)
Determinarea temperaturii medii, fără considerarea cîmpului de temper. (13); (11)
Aprecierea comportării termice a lagărelor cu alunecare.
Cîmpul de temperatură element de apreciere a proceselor de curgere.
Regimuri tranzitorii [1; 3]; (18)
Ruperea filmului (24) (25) (26)
Frecare elastohidrodin. (17) [8]
Cîmpul de temperaturi element indicator al nivelelor maxime
IPOTEZE DE REZOLVARE
DOMENII DE UTILIZARE (indicativ)
Transfer de căldură convectiv - masic preponderent.
η = const. [32]
η = η(h) [33]
η = η(t) [27; 28; 29]
Cuzinet intreg: Q_L/Q_tot > 0,7 sau ε > 0,6 [21]
Coeficienți de convecție lubrifiant - perete dați (14); [19]
Gradienți de temper. în pereți măsurați [30]
Flux de căldură în cuzinet preponderent circumferențial și liniarizarea variației circumf. a temper. la interfața lubrifiant-perete [6]
Transfer de căldură combinat (12) (15) (16) [20; 18]
Cuzinet intreg 0,3 < Q_L/Q_tot < 0,7 sau 0,25 < ε < 0,6 [21]
Suprafețe plane înclinate, cînd la limită de flux de căldură [7]
h = constant
η = const. [31] | η = η(γ) [9; 34] (23*)
h = h(x)
η = const. [4; 2]; (26*) | η = η_m(x)
Cuzinet intreg Q_L/Q_tot < 0,3 sau ε ≤ 0,25 [21]
Lagăre cu canale spirale cu Q_L = 0 [2]
Lagăre intens incălzite sau intens răcite
Transfer de căldură lubrifiant - perete preponderent (23) (26)*
Condiții de limită de temperaturi [4; 2; 34] | de flux de căldură (23*) (26*)

OBSERVAȚII:

1 – Temperatura fusului apropiat constantă pe periferie
2 – *) în cuzinet, flux de căldură preponderent radial
3 – Cazuri de utilizare valabile pentru lagăre radiale.
4 – Cifrele încercuite se referă la contribuții proprii.

Fig. 1

2. CÎMPUL DE TEMPERATURI ÎN FILM, MIJLOC PENTRU CUNOAȘTEREA TEMPERATURII MEDII REALE ȘI A NIVELELOR CRITICE DE ÎNCĂLZIRE

2.1. Amplele studii experimentale efectuate au pus în evidență dependența distribuțiilor periferice de temperaturi în planul median al lagărului, în stricta apropiere a filmului de lubrifiant, de încărcare, de viteza periferică, dar și de natura cuplului de material sub aspectul conductivității termice, exemplificată prin figurile 2, 3 și 4 [14], [15], [16]; unghiul la centru α^0 este măsurat în raport cu axa orificiului de alimentare cu lubrifiant.

Constatările importante sînt :

a) Asimetria distribuției periferice de temperaturi față de linia centrelor, confirmată și prin studii teoretice proprii, cu același efect asupra variației viscozității. Asimetria este mai evidentă la cuzineții metalici în cazul excentricităților mari dar, mai ales, la cuzineții din materiale plastice.

b) De regulă mărirea turației și a presiunilor medii au ca urmare o plasare a curbelor la un nivel superior, precum și o creștere a *diferențelor* de temperaturi și a temperaturilor *medii*. La jocuri *relative mici*, încărcări reduse $\left(\text{de exemplu } p_m = 1{,}23 \dfrac{\text{daN}}{\text{cm}^2}, \text{ ca în fig. 2}\right)$ și turații *ridicate*, deci la excentrități mici, respectiv cifre de portanță $c_p = \dfrac{\eta\omega}{p_m \Psi^2}$ mari, cînd cantitatea redusă de lubrifiant introdusă în lagăr este în principal *recirculată*, nivelul general al temperaturilor, deci și temperaturile medii, pot fi mai ridicate decît în cazul unor încărcări mari.

c) Slaba conductivitate termică a unui material, în cazul de față poliamidă, care frînează fluxul de căldură în însuși cuzinetul, are ca efect o variație periferică a temperaturii în film sensibil mai pronunțată.

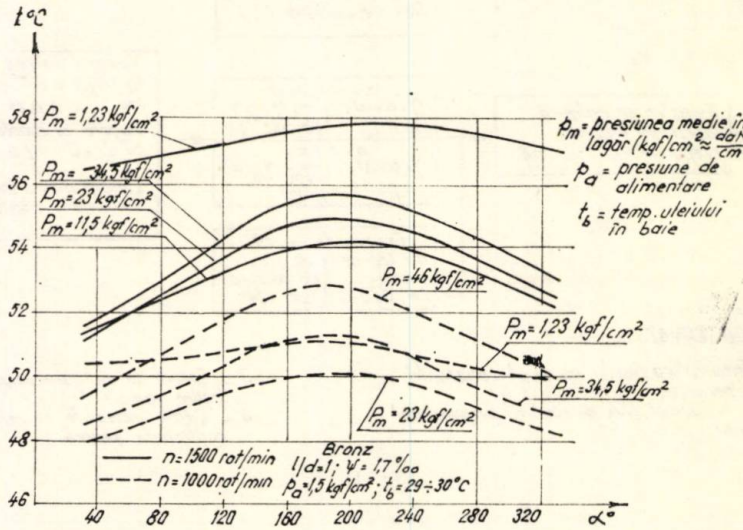


Fig. 2

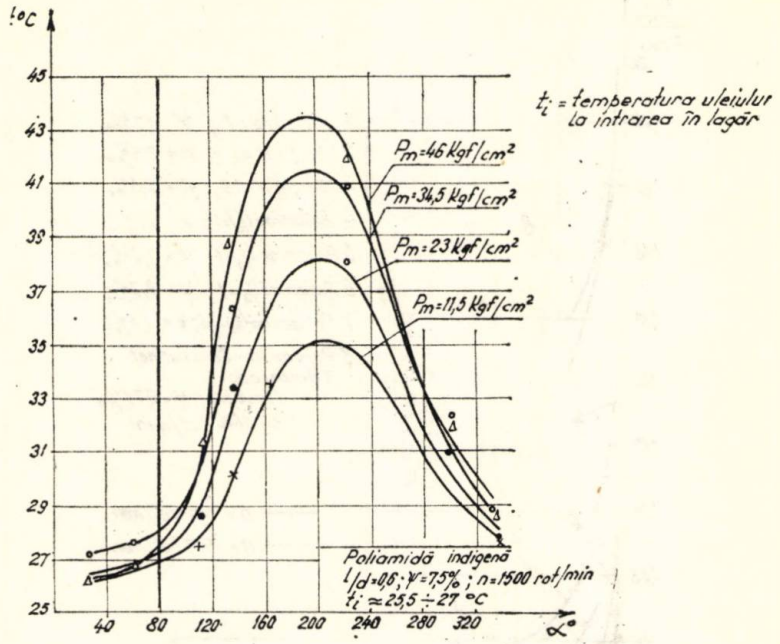


Fig. 3

d) Adaosurile ameliorative în materiale, sub aspectul conductivității termice și frecării — de exemplu grafit în poliamidă — influențează distribuția de temperaturi în sensul micșorării valorilor maxime și aplatisării curbelor (fig. 4), [16].

e) Distribuția periferică de temperaturi permite calculul și reprezentarea grafică a dependenței t_{max}/t_{med}, de coeficientul de portanță $c_p = \frac{\eta\omega}{p_m\Psi^2}$ (t_{max}, t_{med} — temperatura maximă, respectiv medie; η — viscozitatea lubrifiantului; ω — viteza unghiulară a fusului; p_m — presiunea medie a lagărului; Ψ — jocul relativ al fusului în cuzinet) utilă pentru proiectare (fig. 5).

La același joc relativ Ψ, raportul t_{max}/t_{med} crește cu scăderea coeficientului de portanță, respectiv cu creșterea excentricității fusului în cuzinet.

Se poate cunoaște, totodată, dependența raportului t_{max}/t_{med} de natura cuplului de material, de raportul l/d (l-lungimea, d-diametrul cuzinetului) și de jocul relativ Ψ, constatîndu-se existența unui joc relativ optim, pentru același l/d, sub aspectul încălzirii.

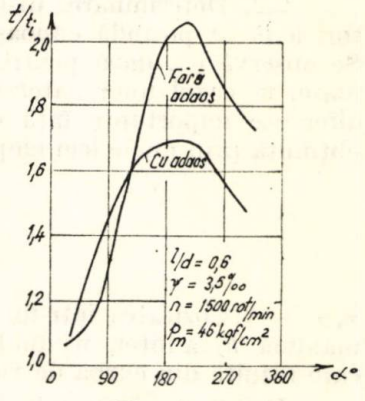


Fig. 4

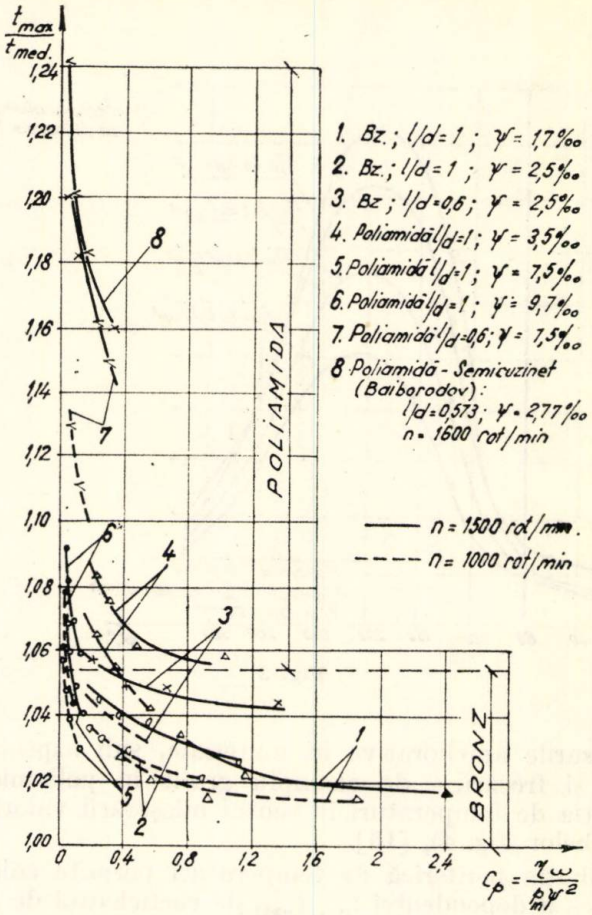


Fig. 5

2.2. Determinarea distribuţiei periferice a temperaturii prin măsurători a făcut posibilă cunoaşterea variaţiei corespunzătoare a viscozităţii. Se observă că, dacă pentru cuzineţii metalici rezultatele sînt mai apropiate, în cazul unor materiale cu calităţi izolante (poliamide fig. 6) există diferenţe importante faţă de variaţia viscozităţii pe direcţia periferică obţinută prin unele legi empirice, simple, ca

$$\eta = \eta_i \left(\frac{h}{h_i}\right)^q, \tag{1}$$

η, η_i — viscozitatea într-un punct cu înălţimea h, respectiv cu înălţimea maximă h_i a interstiţiului la intrarea în zona portantă; q — un coeficient care rezultă din curba de variaţie a viscozităţii cu temperatura.

Deducerea prin calcul a variaţiei viscozităţii în film, chiar pentru cazul simplificat al filmului mărginit *de pereţi plani*, cu considerarea coefi-

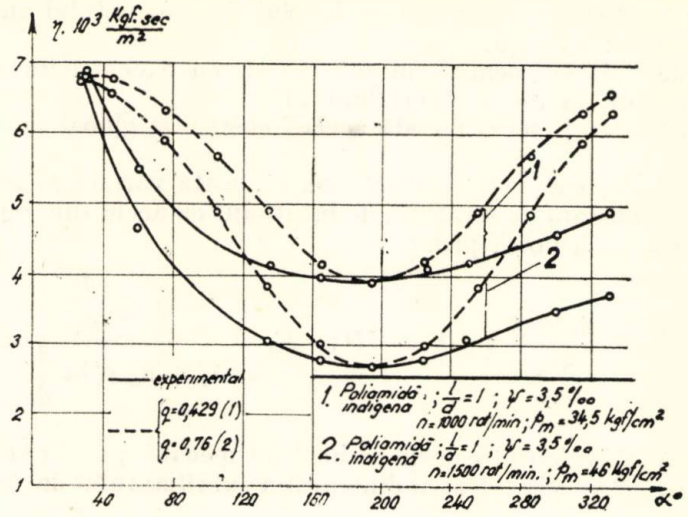

η. 10³ Kgf. sec/m²
experimental
q=0,429 (1)
q=0,76 (2)
1. Poliamidă indigenă; l/d=1; ψ=3,5‰ n=1000 rot/min; p_m=34,5 kgf/cm²
2. Poliamidă indigenă; l/d=1; ψ=3,5‰ n=1500 rot/min.; p_m=46 kgf/cm²
α°

Fig. 6

cienţilor de convecţie pentru transferul de căldură lubrifiant — perete ca valori cunoscute şi liniarizarea dependenţei viscozităţii de temperatură, pe porţiuni mici, a dus la o relaţie de forma [14]:

$$\eta = \eta_i \left(\frac{h}{h_i}\right)^{4A_2k} \cdot e^{\Omega_i(h)} \left\{1 - A_1\left[\frac{k}{\eta_i}(t_i - t_0) + 1\right] \times \right. \tag{2}$$

$$\left. \times \int_{h_i}^{h} \left(\frac{h}{h_i}\right)^{-4A_2k} \cdot e^{-\Omega_i(h)} \cdot dh \right\},$$

în care s-a notat prin

$$A_{1,2} = f_{1,2}(c_0, v, h^*, \alpha_{1,2}, \lambda_{1,2}, t_i, t_0),$$

c_0 — căldura specifică a lubrifiantului; v — viteza relativă de deplasare a pereţilor; h^* — grosimea filmului în punctul în care se anulează gradientul de presiune; $\alpha_{1,2}$ — coeficienţi de convecţie pereţi solizi — mediu exterior; $\lambda_{1,2}$ — coeficienţi de conductivitate termică a pereţilor; t_i, t_0 — temperatura uleiului la intrare, respectiv a mediului ambiant; k — un coeficient care caracterizează variaţia viscozităţii cu temperatura pe porţiuni mici; $\Omega_i(h) = f_3(h, h_i, h^*, A_{1,2}, k)$.

2.3. Deşi înălţimea foarte redusă a peliculei de fluid n-a permis, pînă în prezent, măsurarea variaţiei ei, problema a fost abordată pe cale analitică, variaţia temperaturii pe această direcţie fiind importantă pentru determinarea corectă a transferului de căldură către fus şi cuzinet. Măsu-

rătorile de temperaturi la suprafaţa fusului şi a cuzinetului au confirmat existenţa acestei variaţii.

Calcule valabile pentru un fus radial, cu excentricitate nulă, de lungime infinită, în două cazuri limită :

— ambii pereţi solizi posedă acelaşi coeficient global de transfer de căldură ;

— unul din pereţi este perfect izolant, arată variaţii de temperatură pe grosimea constantă a stratului de lubrifiant ca acele din figurile 7*a*, *b*. În aceste figuri s-a notat prin :

$$D = \frac{Av^2\beta\eta_0^*}{8\lambda_u}; \quad D' = 4D; \quad K_i = \frac{\lambda_i \alpha_{0i} \frac{d_i'}{d_i}}{\lambda_i + \alpha_{0i} d_i' \ln \frac{d_i'}{d_i}},$$

în care

A reprezintă echivalentul caloric al lucrului mecanic ; v — viteza relativă a suprafeţei ; η_0^* — viscozitatea dinamică a lubrifiantului la temperatura

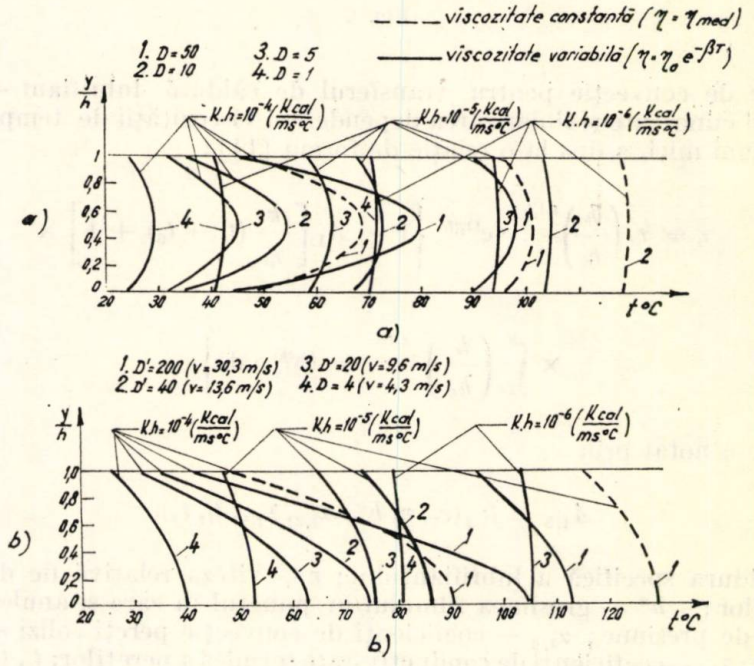

viscozitate constantă ($\eta = \eta_{med}$)
viscozitate variabilă ($\eta = \eta_0 e^{-\beta t}$)
1. D = 50
2. D = 10
3. D = 5
4. D = 1
y/h
K.h = 10⁻⁴ (Kcal/ms°C)
K.h = 10⁻⁵ (Kcal/ms°C)
K.h = 10⁻⁶ (Kcal/ms°C)
a)
t°C
1. D' = 200 (v = 30,3 m/s)
2. D' = 40 (v = 13,6 m/s)
3. D' = 20 (v = 9,6 m/s)
4. D = 4 (v = 4,3 m/s)
b)

Fig. 7 a,b

de referinţă t_0^*°C ; β — coeficientul de variaţie a viscozităţii cu temperatura : $\eta = \eta_0^* e^{-\beta t}$ dacă se consideră $t_0^* = 0$ °C ; λ_u — conductivitatea termică a lubrifiantului ; λ_i — conductivitatea termică a pereţilor 1, respectiv 2; α_{0i} — coeficienţii de convecţie perete 1,2 — medie exterior; d_i, d_i — diametrul interior, respectiv exterior al cuzinetului ; h — înălţimea filmului.

Curbele au fost trasate pentru următoarele date numerice :

$$\eta_0^* = 1{,}2 \cdot 10^{-1} \left[\frac{\text{Kgf} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}\right],$$

$$\beta = 0{,}0515 \ [1/°\text{C}],$$

$$\lambda_u = 3{,}33 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{K cal}}{\text{ms}\,°\text{C}}\right],$$

$$\left.\begin{array}{l} D = 1\,;\ 5\,;\ 10\,;\ 50 \\ D' = 4\,;\ 20\,;\ 40\,;\ 200 \end{array}\right\} \text{corespunzător vitezei relative, } v = 4{,}3\,;\ 9{,}6\,;\ 13{,}6\,;\ 30{,}6 \ [\text{m/s}],$$

$$Kh = 10^{-6}\,;\ 10^{-5}\,;\ 10^{-4} [\ \text{Kcal/ms}\,°\text{C}],$$

$$t_{01} = t_{02} = t_0 = 20\,°\text{C}.$$

Se observă că, îndeosebi la viteze relative mari şi valori ridicate ale produsului Kh, variaţiile de temperatură pe grosimea filmului pot deveni importante ; practic, asemenea cazuri corespund, între altele, fusurilor de dimensiuni mari sau celor cu răcire forţată a corpului lagărului [24].

Pentru cazul general al filmului de lubrifiant cu înălţimea variabilă, dată de o lege oarecare $h = h(x)$, considerînd o viscozitate medie locală η_m, variabilă pe direcţia x, $\eta_m = \eta_m(x)$ şi preponderenţa cedării radiale de căldură, variaţia temperaturii t *în cîmp* este dată de relaţia

$$t = t_f - K^*(t_h - t_0)y + D^* e^{-\beta(t_m - t_0^*)} \cdot \frac{1}{h^3}\left\{\Phi_1\, y - \frac{1}{h^3}\left[3\Phi_2^2\, y^4 + \right.\right. \tag{3}$$

$$\left.\left. + 2h\,\Phi_2\,\Phi_3\, y^3 + \frac{1}{2} h^2\,\Phi_3^2\, y^2\right]\right\},$$

în care, în afara notaţiilor anterioare, t_f, t_h reprezintă temperatura la suprafaţa fusului, respectiv la înălţimea h corespunzătoare suprafeţei interioare a cuzinetului ; $D^* = \dfrac{A v^2 \eta_0^*}{\lambda_u}$; t_m — temperatura medie locală ; $K^* = \dfrac{K}{\lambda_u}$.

Expresia temperaturii medii *locale*, pe grosimea h a filmului, care intră în ecuaţia temperaturii variabile în cîmp, are forma

$$t_m = \frac{t_0 + t_f}{2} + \frac{t_0 - t_f}{2(1 - K^* h)} + D^* e^{-\beta(t_m - t_0^*)}\left\{\frac{\Phi_4}{2h^2(1 + K^* h)} + \right. \tag{4}$$

$$\left. + \frac{1}{12}\left[1 + \frac{9}{5}\left(\frac{\Phi_2}{h}\right)^2\right]\right\}.$$

În sfîrșit, temperatura maximă $t_{max_{max}}$ în film, dată de relația

$$t_{max_{max}} = t_f - K^*(t_h - t_0)\, y_{max} + D^* e^{-\beta(t_m - t_0^*)} \cdot \frac{1}{h^3} \left\{ \Phi_{01} y_{max} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{h_0^3} \left[3\Phi_{02}^2 y_{max}^4 + 2h_0 \Phi_{02} \Phi_{03} y_{max}^3 + \frac{1}{2} h_0^2 \Phi_{03}^2 y_{max}^3 \right] \right\} \tag{5}$$

se află în locul cu grosimea minimă h_0 a interstițiului, la înălțimea

$$y_{max} = h_0 \left\{ \left[\frac{1}{216} \left(\frac{\Phi_{03}}{\Phi_{02}} \right)^3 - \frac{C_1 h_0^3}{12 D^* e^{-\beta(t_m - t_0^*)} \Phi_{02}^2} \right]^{\frac{1}{3}} - \frac{\Phi_{03}}{6\Phi_{02}} \right\}, \tag{6}$$

în care C_1 are valoarea

$$C_1 = \frac{D^* e^{-\beta(t_m - t_0^*)}}{h_0^3} \Phi_{01} - \frac{K^*}{(1 + K^* h)} \left[(t_f - t_0) + \frac{D^* e^{-\beta(t_m - t_0^*)}}{h_0^2} \Phi_{04} \right] \tag{7}$$

În ecuațiile (3)...(7) au fost introduse funcțiile înlocuitoare

$$\begin{aligned} 4h^2 - 6hh^* + 3h^{*2} &= \Phi_1, \text{ respectiv } \Phi_{01}, \\ h - h^* &= \Phi_2, \quad ,, \quad \Phi_{02}, \\ 3h^* - 4h &= \Phi_3, \quad ,, \quad \Phi_{03}, \\ h^2 - 2hh^* + 1{,}5\, h^* &= \Phi_4, \quad ,, \quad \Phi_{04}. \end{aligned} \qquad \text{pentru } h = h_0.$$

Se menționează că prezența mărimii h^* face legătura cu repartiția de presiuni, la rîndul ei determinată de condițiile geometrice și funcționale.

3. CÎMPUL DE TEMPERATURI, ELEMENT DE APRECIERE A UNOR ASPECTE DE CURGERE ÎN FILMUL DE LUBRIFIANT

3.1. Faptul că diferențele de temperaturi pe direcția longitudinală a lagărelor radiale sînt mici, marcînd doar o ușoară scădere către zonele marginale, a determinat majoritatea cercetătorilor să neglijeze această variație [19], [27], [32], [33].

Măsurători atente au evidențiat, totuși, o scădere mai sensibilă a temperaturii în zona de alimentare; aceasta arată că aci se produce un amestec lent al uleiului proaspăt introdus, cu cel recirculat (fig. 8).

3.2. Există recomandări de a se acorda atenție deosebită unor regimuri tranzitorii de funcționare, privind fie viteza, fie încărcarea lagărelor, îndeosebi din anumite materiale-cauciuc, materiale plastice — pentru evitarea unor vîrfuri pregnante de temperatură de scurtă durată, care pot apare și duce la deteriorarea lor.

Un studiu sistematic asupra lagărelor din materiale plastice [16] a pus în evidență faptul că răspunsul termic al lagărului la încărcări în trepte este dependent de mărimea sarcinii aplicate brusc (fig. 9). Se înțe-

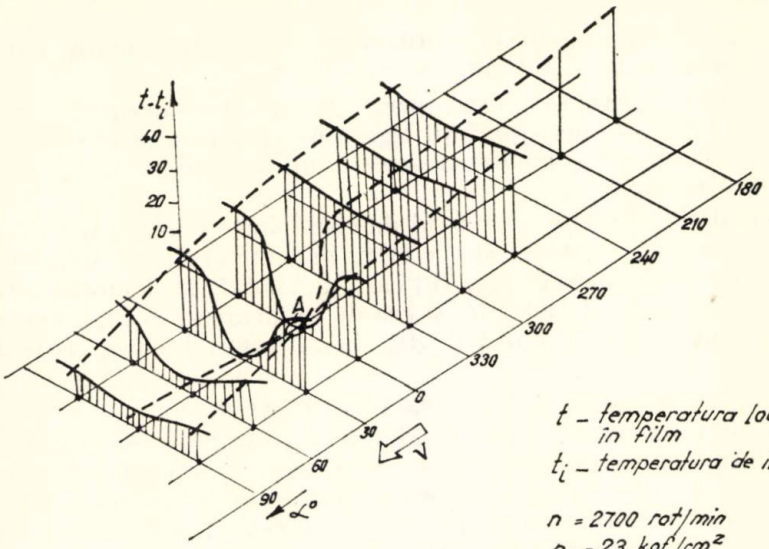

t-t_i
40
30
20
10
A
180
210
240
270
300
330
0
30
60
90
L°
t – temperatura locală în film
t_i – temperatura de intrare
n = 2700 rot/min
p_m = 23 kgf/cm²
ψ = 3,5 ‰
(plexiglas)

Fig. 8

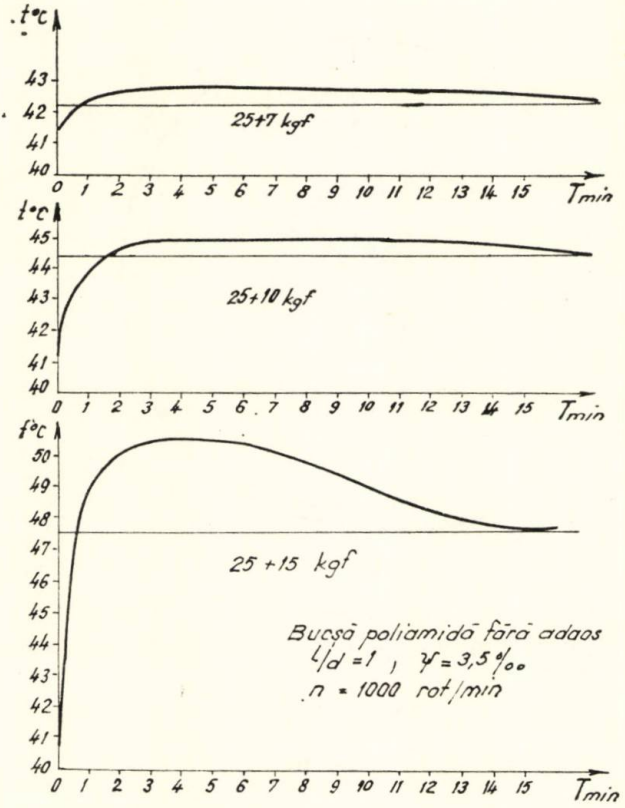

t°C
43
42
41
40
25+7 kgf
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 T min
t°C
45
44
43
42
41
40
25+10 kgf
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 T min
t°C
50
49
48
47
46
45
44
43
42
41
40
25 +15 kgf
Bucşă poliamidă fără adaos
L/d = 1 , ψ = 3,5 ‰
n = 1000 rot/min
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 T min

Fig. 9

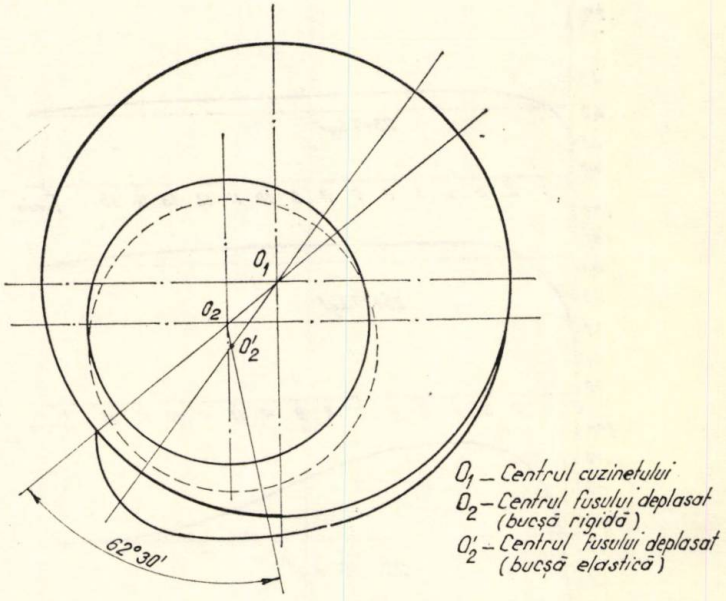
lege aci temperatura uleiului la ieşirea din lagăr, aproximată a fi egală cu temperatura medie a filmului de lubrifiant.

La apariţia acestui salt de temperatură contribuie desigur, în măsură importantă, procesele de suprafaţă legate de structura straturilor marginale, netezime, duritate, ponderea acestor influenţe fiind dependentă de însuşi stadiul de ungere.

În cazul materialelor cu modul de elasticitate redus, aspectul fenomenologic este mai complex, sub efectul presiunilor locale luînd naştere deformaţii *locale* apreciabile (fig. 10) care, la rîndul lor, modifică procesul de curgere, distribuţia de presiuni şi cea de temperaturi în film, excentricitatea şi poziţia fusului în cuzinet (fig. 11), eventual chiar stabilitatea fusului [17].

Aplicarea bruscă a sarcinii exagerează procesul.

Efectul de micşorare a grosimii minime de lubrifiant se suprapune cu adîncirea fusului în cuzinetul moale ca urmare a deplasării verticale şi unghiulare a lui, provocate de deformaţiile elastice locale rezultînd, către ieşirea din zona portantă, un „prag" care strangulează filmul. Are loc o ridicare bruscă a temperaturii care, la rîndul ei, influenţează negativ şi proprietăţile mecanice ale materialului. După un timp, pragul este nivelat în anumită măsură, iar condiţiile de ungere se îmbunătăţesc, apropiind temperatura de cea de regim.



Jocul relativ şi deformaţiile elastice mărite de 2000 ori
Diametrele şi distanţele $\overline{O_1O_2}$ $\overline{O_1O_2'}$ nu sînt reprezentate la scară
$\overline{O_2O_2'} = 3{,}36\,\mu m$
Grosimea bucşei $s = 2{,}5\ mm$.

Fig. 10

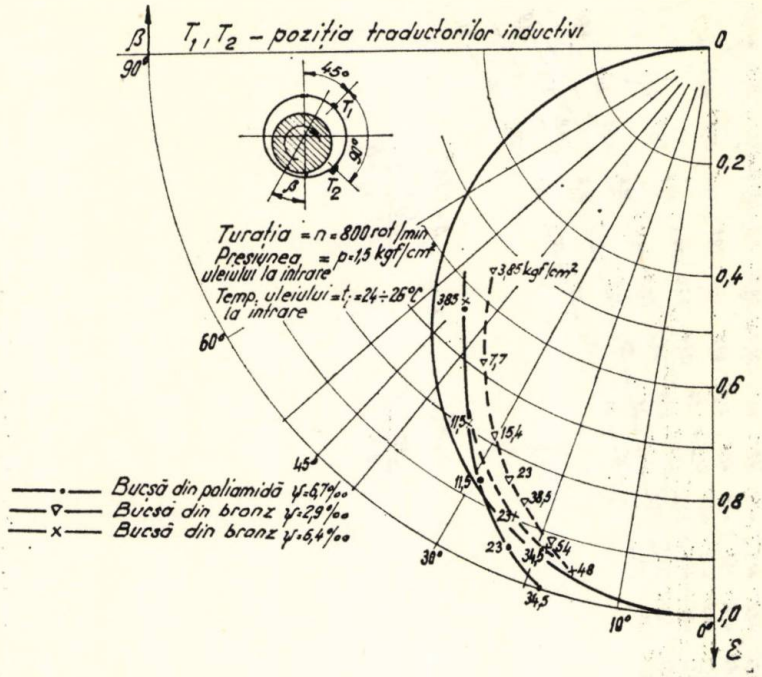


Fig. 11

Presupunem, de altfel, că măsurătorile de temperaturi pot da indicații și în studiul turbulenței.

3.3. Atît la lagărele circulare pline (fig. 12), cît și prin măsurători cu termocuple montate la distanțe periferice mici, efectuate asupra unor cuple de frecare fus-cuzinet parțial și fus-placă plană, rezultînd interstiții cu geometrie controlată, s-a constatat existența unor minime de temperaturi în zonele marginale ale cîmpului portant de fluid în care, raportul $h/h^* = 1{,}5 \ldots 2$.

Reprezentarea cîmpului de temperaturi prin izotermele determinate cu relațiile anterioare, cu ajutorul calculatorului numeric, pentru datele indicate în figură, lasă într-adevăr să apară două zone de minimum care se suprapun cu zonele de intrare, respectiv de ieșire a fluidului din porțiunea portantă (fig. 13).

Figura 14, referitoare la curgerea printr-un interstițiu convergent-divergent, oglindește principial variația presiunilor în film (fig. 14 *a*), geometria interstițiului și direcția liniilor de curent (fig. 14 *b*), distribuția vitezelor pe înălțimea variabilă a interstițiului (fig. 14 *c*), variația gradientului de viteză pe direcția periferică (fig. 14 *d*), pre-

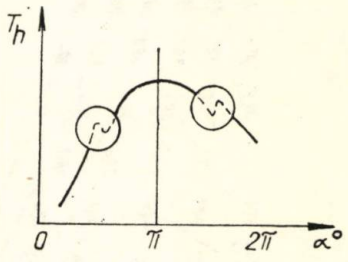
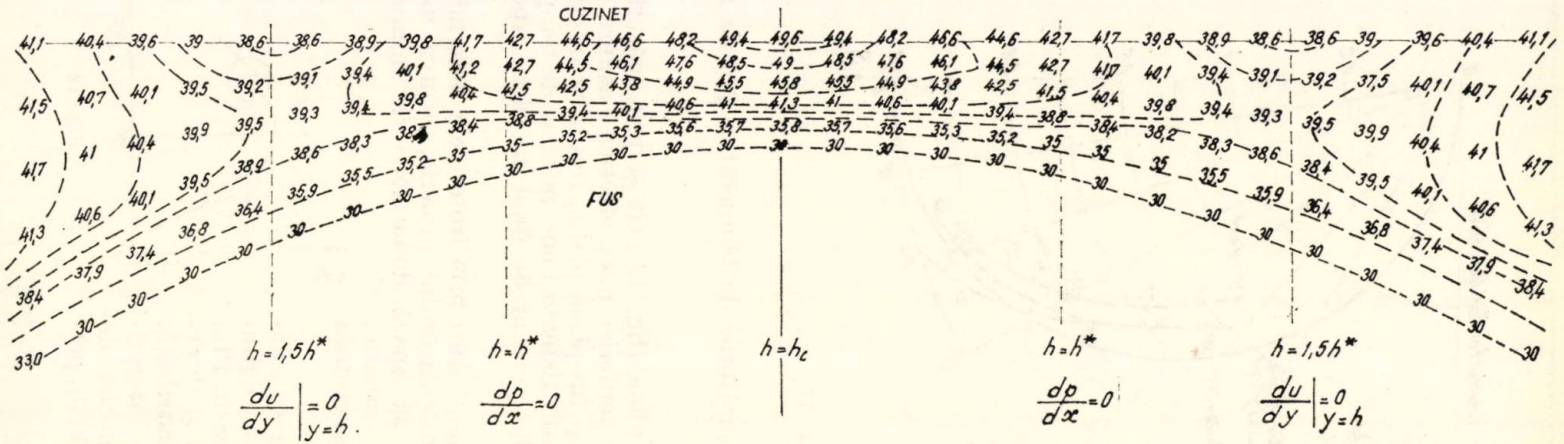


Fig. 12



$K.h_0 = 0,1$

$D^x/t_f = 2$

$\beta = 0,035$

$t_f = 30°C$

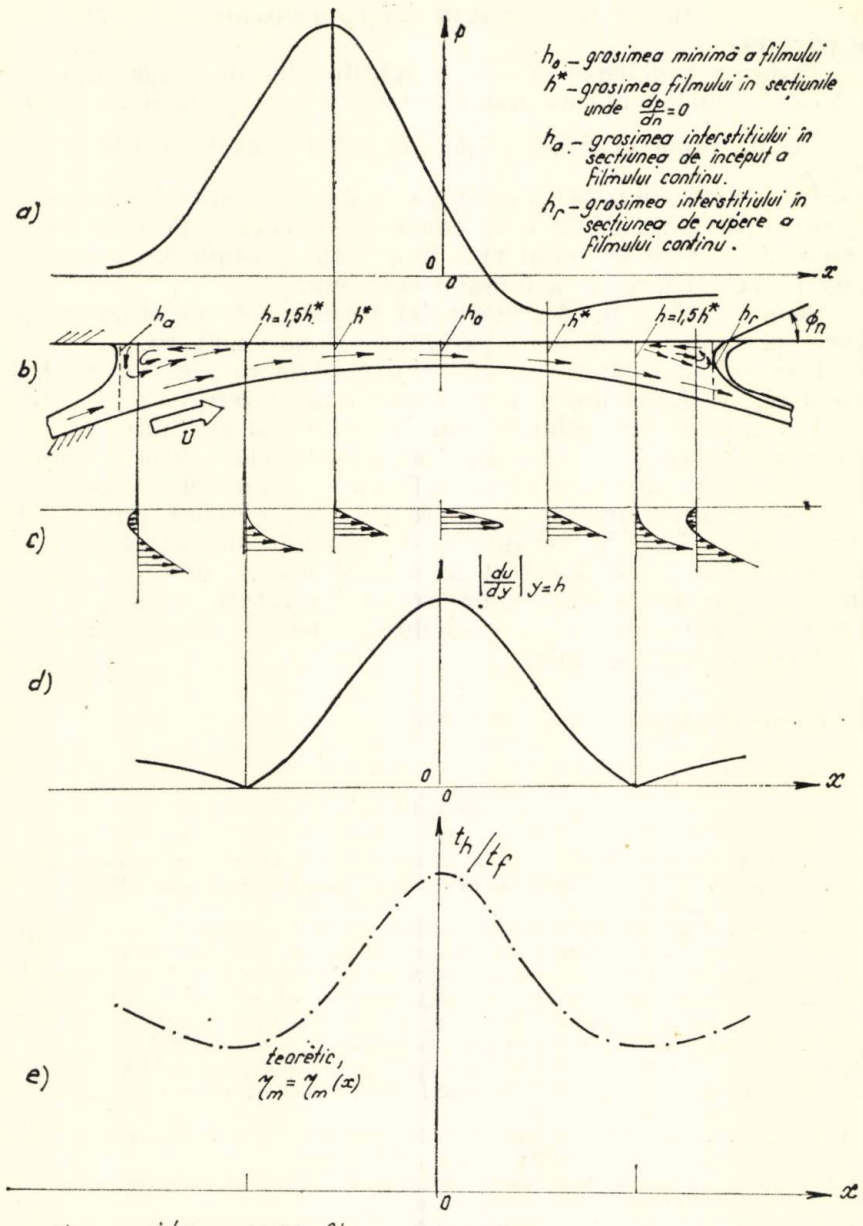
$t_0^* = 20°C$

$\frac{t_0}{t_f} = 0,33$

$h^x/h_0 = 1,26086$

Distribuția temperaturilor și izotermelor pe grosimea filmului de lubrifiant (planul x-y)

Fig. 13



a) – variația presiunii în film.
b) – geometria interstițiului și liniile de curent (orientativ)
c) – profilele de viteze
d) – variația modulului gradientului de viteze la peretele fix
e) – variația temperaturii în film.

Fig. 14 – Interdependența dintre fenomenele termice și aspectele de curgere.

cum și distribuția de temperatură corespunzătoare unor calcule numerice (fig. 14 *e*).

Tratarea problemei plane a lubrificației în regim hidrodinamic arată că în punctele în care gradientul de *viteză* la peretele fix se anulează $\left|\frac{du}{dy}\right|_{y=h} = 0$, raportul $h/h^* = 1{,}5$; în acele puncte există deci stagnare. În amonte de punctul de stagnare din zona divergentă, și în aval de punctul de stagnare în zona convergentă, există porțiuni de curgere cu recirculare, care se întind pînă în dreptul grosimii de rupere h_r, respectiv de constituire h_a a filmului continuu.

Se constată o bună coincidență între zonele de stagnare și acele în care apar minimele de temperatură menționate mai sus.

Procesul multilateral al efectelor convective aferente nucleelor de recirculare, variației însăși a gradientului de viteze în sens periferic la peretele fix, producerii căldurii prin frecare și transferului de căldură film lubrifiant — perete este intim legat de apariția celor două minime zonale de temperatură, sub aspectul cauzalității și influenței reciproce.

Prin cazurile prezentate apare procesul curgerii prin interstițiul dintre fus și cuzinet în întreaga lui complexitate de natură termo-elasto-hidrodinamică. Studiul corect al acestui proces oferă practicii baze științifice riguroase pentru cunoașterea temperaturii maxime și înălțimii minime care pot interveni, asigurîndu-se condițiile funcționale optime și fiabilitatea cerută lagărului.

Primită la redacție la 21 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. E. A. Alexandrov, *Voprost nedejnosti rabott podpiatnicov crupnîh verticalinîh ghidrogregatov, Razvitie ghidrodinamicescoi teorii smazchi*, Iz. Nauca, Moscova, 1970, p. 217—222.
2. I. Bootsma, *The Effect of Viscosity Variations with Temperature on the Performance of Spiral Groove Bearings*, ASLE, Preprint 69, LT, 1969, p. 116—125.
3. A. R. Burton, *Thermal Aspects of Bearing Seizure*, Wear, **11**, 8, 157—172 (1965).
4. N. V. Constantinescu, *Basic Relationship in Turbulent Lubrication and their Extension to include Thermal-Effects*, Trans. ASME, Ser. **95** F, *2* (1973).
5. K. A. Discicov, *Poduschi scoljenia jidcostinovo trenia*, Monitomaș, 1955.
6. B. Downson, M. T. March, *A Thermohydrodynamic Analysis of Journal Bearings*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1966—1967, vol. 181, Part. 30, 1967. p. 45—54
7. M. A. Ezzat, S. M. Rohde, *A Study of the Thermohidrodynamic Performance of Finite Slider Bearings*, Trans. ASME, Ser F., 3 (1973).
8. I. A. Greenwood, I. I. Kanlzlarich, *Inled Shear Heating in Elastohydrodynamic Lubrication* Trans. ASME, 95 F, 1973, nr. 4.
9. E. A. Hagg, *Heat Effects in Lubricating Film*, ASME, **66**, *11*, 1944.
10. A. Leyer, *Irrungen und Wirrungen in der Gleitlagerforschung*, Technika, *2* (1972).
11. G. Manea, ș.a. *Asupra calculului lagărelor radiale cu alunecare, unse cu lichide, pe baza teoriei hidrodinamice*, Metalurgia și construcția de mașini, *8.*, 5—21 (1956).
12. Gh. Manea, ș.a., *Aspecte ale comportării poliamidei ca bucșe pentru lagăre cu alunecare*, Bul. Inst. Politehnic București XXVI, Fasc. *1*, ianuarie — februarie, 69—98 (1964).
13. Gh. Manea, ș.a., *Asupra temperaturii lagărelor radiale cu alunecare și efectul izolant al cuzineților din mase plastice*, Bul. Inst. Politehnic București, XXVII, nr. 5 septembrie-octombrie 1965, p. 51—73.

14. Gh. Manea, N. Boicu, M. Pascovici, *Aspecte termice ale cuzineților pentru lagăre îndeosebi din materiale plastice*, Bul. Inst. Politehnic București, **XXVIII**, *5*, septembrie-octombrie 61—82 (1966).
15. Gh. Manea, M. Pascovici, *Particularități ale cuzineților din poliamide cu privire la efectul tehnologiei de fabricație și la comportarea termică a lor sub aspectul cîmpului de temperatură în film*, S.C.M.A., **23**, *6*, 1395—1416 (1966).
16. Gh. Manea, M. Pascovici, *Influența adaosurilor ameliorative în bucșele din material plastic asupra cîmpului de temperatură în filmul de lubrifiant*, Bul. Inst. Politehnic București, **XXXI**, *6*, noiembrie-decembrie 69—81 (1969).
17. Gh Manea, N. Boicu, M. Pascovici, *Die Lage des querbelasteten Zapfens in der aus Materialien mit geringem Elastizitätsmodul gefertigten Lagerschale*, Bulet. Inst. Politehnic Bucuresti, **XXXII**, *3*, mai—iunie 89—104 (1970).
18. F. A. Martin, D. R. Garner, *Plain Journal Bearings under Steady Loads*; *Design Guidance for Safe Operation*, Eurotrieb, London, 1973.
19. M. Motosh, *Das konstant belastete Gleitlager unter Berücksichtigung der Temperatur und Druckabhängigkeit der Viscosität*, Diss, T. H. Karlsruhe, 1962.
20. Al. Nica, G. Marin, *Cercetări experimentale asupra distribuției de temperaturi în lagărele circulare cu alunecare*, S.C.M.A. **28**, *5*, 1053—1062 (1969).
21. Al. Nica, *Note on Heat-Dissipation in Journal Bearings*. Rev. Roumain d. Sc. Techn., Série de Mécanique Appliquée, **15**, *1*, 219—223 (1970).
22. P. D. Parghin, *Rasciot temperaturnovo polia v obiome poduşchi podpiatnica hidrogheneratora Sb.* Trenie i iznos v maşinah, **XII**, Iz. AN, SSSR, 217—222 (1958).
23. M. Pascovici, *Asupra influenței transferului căldurii la mișcarea fluidelor în filme subțiri*, S.C.M.A., **28**, *5*, 1041—1051 (1969).
24. — *The circumferențial Temperature Distribution of Complete Journal Bearings*, Weare **16**, *1—2*, 143—147 (1970).
25. — *Experimental Study of the Influence of Heat Transfer on the Temperature Distribution in a Lubricant-Film*, Wear, **29**, *1*, 59—67 (1974).
26. — *Temperature Distribution in the Lubricant Film of the Slide Bearings under intensive Lubricant-Wall Heat Transfer conditions*. Wear, **29**, *4*, 277—286 (1974),
27. C. Pinkus, B. Sternlicht, *Theory of Hydrodinamic Lubrication*. Mc Graw-Hill Book Co, NewYork, 1961.
28. M. Purvis, W. Mayer, T. Benton, *Temperature Distribution in the Journal Bearing Lubricant Film*, ASME, **79**, *2* (1957).
29. A. A. Raimondi, *An adiabatic Solution for the Finite Slider Bearings*, Trans. ASME, *3*. (1966)
30. B. Romacker, *Die Temperaturverteilung im Schmierfilm konstant belasteter-Gleitlagern*, Diss, T. H. Karlsruhe, 1965.
31. Schlichtling, *Einige exakten Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung*, ZAMM, **31** (1951).
32. Al. Thelen, *Schmierung von zylindrischen Gleitlagern mit Oel-Kältemittelgemischen*, Diss. T. H. Karlarube, 1959.
33. N. Tipei, Al. Nica, L. Beiner, *A Thermohydrodynamic Analysis of Sliding Bearings*, Rev. Roumaine d . Sc. Techn. Série de Mecanique Appliquee, **15**, *1*, 193—217 (1970).
34. G. Vogelpohl, *Der Übergang der Reibungswärme von Lagern aus der Schmierschieht in die Gleitflächen*, VDI—Forschungaheft, 425, 1949.
35. * * * *Razvitie ghidrodinamicescoi teorii smaschi*, Iz. Nauca, Moscova, 1970.
36. H. Pascal, *L'equation du champ de température instationnaire dans la lubrification des surfaces planes*, C. R. Acad. Sc. Paris, **269**, 255 (1969).

ASUPRA UNEI PROBLEME DE APLICARE A TEORIEI FUNCȚIILOR ALEATORII LA SINTEZA UNUI APARAT DE MEDIERE A DIRECȚIEI VÎNTULUI ÎN TIMP FINIT

ION SEBEȘAN,
Institutul politehnic București

PAUL MAXIM
Institutul de meteorologie și hidrologie București

În acest studiu se tratează problema sintezei optime a unui aparat mecanic cu amortizare folosit în meteorologie pentru măsurarea direcției medii a vîntului în timp finit. Este o problemă de optimizare a unui sistem mecanic oscilant cu două grade de libertate supus la o excitație aleatoare, α_1, care, din condiția ca abaterea medie pătratică a mărimii de ieșire α_2 din sistem să fie minimă, urmărește găsirea unui coeficient optim de amortizare al aparatului.

Sinteza aparatelor de măsurare a valorii medii a unor mărimi unghiulare aleatoare, constituie o problemă de interes aplicativ în diverse domenii tehnice. Un astfel de aparat (fig. 1) în meteorologie servește la determinarea direcției medii a vîntului în timp finit.

Precizia măsurării este legată de problema alegerii unui coeficient optim de amortizare ρ_{2opt} în amortizorul vîscos al aparatului, problemă în rezolvarea căreia sistemul mecanic liniar cu două grade de libertate reprezintă o aproximație acceptabilă.

Observațiile efectuate au arătat că direcția vîntului dată de $\alpha(t)$, mărimea de intrare în sistem, poate fi caracterizată ca un proces aleator (fig. 2).

Caracterul staționar și ergodic al mărimii de intrare $\alpha(t)$, reprezintă două condiții esențiale pentru aplicarea practică a teoriei funcțiilor aleatoare. Funcția de transfer a sistemului $Y(\nu)$ servește la determinarea caracteristicilor statistice ale mărimii de ieșire $\alpha_2(t)$ — unghiul de rotire al rotorului amortizorului, în funcție de cele ale mărimii de intrare $\alpha(t)$.

Comportarea sistemului mecanic al aparatului va fi descrisă de ecuațiile diferențiale (1) și (1′)

$$I_1 \ddot{\alpha}_1 + \rho_1 \dot{\alpha}_1 + c(\alpha_1 - \alpha_2) = \mathcal{M}_v, \tag{1}$$

$$I_2 \ddot{\alpha}_2 + \rho_2 \dot{\alpha}_2 - c(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \tag{1′}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 4, 1975, P. 613–619

în care I_1, ρ_1; I_2, ρ_2 — momentele de inerție și coeficienții de amortizare în partea conducătoare, respectiv partea condusă a aparatului;

c — rigiditatea cuplajului și

$\mathcal{M}_v$ — momentul forței vîntului F_v față de axa de rotație a ampenajului, avînd expresia:

$$\mathcal{M}_v = M_v \sin(\alpha - \alpha_1), \text{ unde } M_v = KV^2 \text{ este valoarea} \quad (2)$$

maximă a momentului pentru cazul cînd fluxul vîntului este perpendicular pe direcția ampenajului, V fiind viteza vîntului.

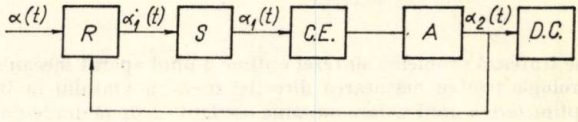


Fig. 1. Schema bloc a aparatului pentru medierea direcției vîntului în timp finit:

R — Piesa receptoare a direcției vîntului (ampenaj);
S — Sistem de selsine (transmițător și receptor);
C.E. — Cuplaj elastic:
A — Amortizor viscos;
D.C. — Dispozitiv de citire.

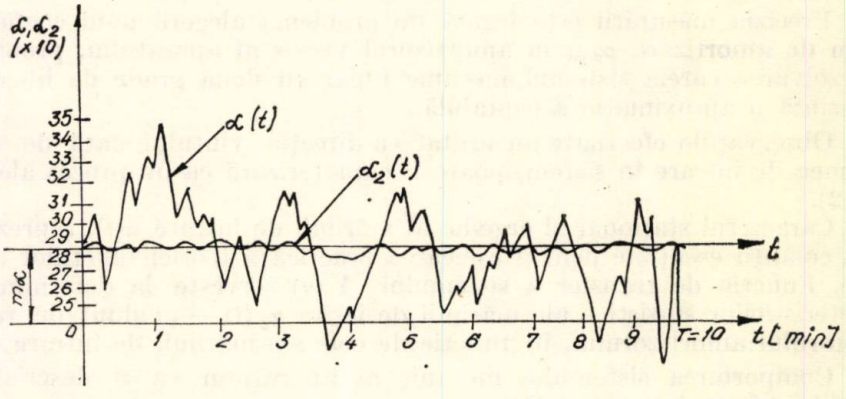


Fig. 2. — Oscilograma direcției vîntului

Notînd

$$\omega_1^2 = \frac{c}{I_1}\ ;\ \omega_2^2 = \frac{c}{I_2}\ ;\ \frac{\rho_1}{I_1} = 2\omega_1\xi_1;\ \frac{\rho_2}{I_2} = 2\omega_2\xi_2\ ;$$

$\frac{\dot{\alpha}}{\omega} = \alpha'$ și făcînd schimbarea de variabilă $\omega_1 t = t'$, ecuațiile (1) și (1') devin :

$$\alpha_1'' + 2\xi_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \alpha_1' + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\mathcal{M}_v}{I_1 \omega_2^2}, \tag{3}$$

$$\alpha_2'' + 2\xi_2 \alpha_2' + \alpha_2 - \alpha_1 = 0. \tag{3'}$$

Relația dintre $\alpha(t)$ aleatoare în timp și răspunsul sistemului $\alpha_2(t)$ se poate exprima prin integrala

$$\alpha_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t)\, h(t-p)\, dp = \int_0^{\infty} \alpha(t-\eta)\, h(\eta)\, d\eta, \tag{4}$$

unde $h(t)$ este răspunsul sistemului la un impuls unitate $\delta(t)$. Deoarece pentru $t < 0$ corespunde $\alpha(t) = 0$, $[0, T]$ cu T suficient de mare, va reprezenta domeniul de integrare, stabilit din considerente sinoptice și meteorologice.

Caracteristicile spectrale ale sistemului se definesc cu ajutorul funcției de transfer, care coincide cu factorul $Y(\nu)$ ce amplifică la ieșirea din sistem funcția invariantă $e^{i\nu t}$ aplicată la intrare. În acest caz vom avea :

$$\alpha(t) = e^{i\nu t}; \quad \alpha_2(t) = Y(\nu)\, e^{i\nu t}. \tag{5}$$

Avînd în vedere faptul că fluctuațiile direcției vîntului sînt mici în raport cu direcția medie, $\mathcal{M}_v = M_v (e^{i\nu t} - \alpha_1)$.

Introducînd (3) în (3') și pe baza relațiilor (5) se va obține expresia complexă a funcției de transfer :

$$\frac{1}{Y(\nu)} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{c}{M_v} \left(\frac{\nu}{\omega_2}\right)^4 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{c}{M_v} \left[1 + 4\xi_1 \xi_2 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \left(1 + \frac{M_v}{c}\right)\right] \left(\frac{\nu}{\omega_2}\right)^2 + 1 + i \left\{ \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{c}{M_v} 2\xi_2 \left[\frac{\xi_1}{\xi_2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} + \right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \left(1 + \frac{M_v}{c}\right)\right] \frac{\nu}{\omega_2} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{c}{M_v} 2\xi_2 \left(1 + \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \left(\frac{\nu}{\omega_2}\right)^3 \right\}$$

deoarece $\frac{\xi_1}{\xi_2} \ll \frac{\omega_1}{\omega_2} \ll 1$ și notînd $\frac{2\xi_2}{\omega_2} = \tau$ (constanta de timp a aparatului) relația (6) devine :

$$\frac{1}{Y(\nu)} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{c}{M_v}\left(\frac{\nu}{\omega_1}\right)^4 - \left[4\xi_1\xi_2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\frac{c}{M_v} + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\right]\left(\frac{\nu}{\omega_1}\right)^2 + \\ + 1 + i\left[\left(1 + \frac{c}{M_v}\right)\tau\nu - \frac{c}{M_v}\left(\frac{\nu}{\omega_1}\right)^3\right]. \tag{7}$$

Din (7) se obține modulul funcției de transfer deoarece :

$$| Y(\nu) |^2 = Y(\nu) \cdot Y^*(\nu). \tag{8}$$

Se pot distinge două tipuri constructive de aparate în funcție de valoarea rigidității cuplajului :

Cazul I : $\frac{c}{M_v} \ll 1$ pentru care pătratul modulului funcției de transfer va fi

$$|Y(\nu)|^2 \cong \frac{1}{1 + \left[1 + \frac{2}{(\tau\omega_2)^2}\right](\tau\nu)^2 + \left(\frac{\nu}{\omega_2}\right)^4}. \tag{9}$$

Cazul II : $c = \infty$ corespunzînd unei transmiteri rigide a momentului $\mathcal{M}_v$ la amortizorul vîscos.

În acest caz

$$|Y(\nu)|^2 \cong \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho_2}{M_v}\right)^2 \nu^2}. \tag{10}$$

Avantajul construirii unui aparat pentru măsurarea direcției medii a vîntului corespunzător cazului I, este că se elimină influența vitezei vîntului, asupra preciziei măsurării, deoarece în relația (9) a funcției de transfer nu apare mărimea M_v (care este proporțională cu pătratul vitezei vîntului).

Pentru a obține valoarea medie m_{α_2} și abaterea medie pătratică $\sigma^2_{\alpha_2}$ pentru răspunsul sistemului, sînt necesare valoarea medie m_α, funcția de corelație R_α și densitatea spectrală a excitației S_α.

Astfel, dacă $\alpha(t) : [0,T]$ reprezintă variabila aleatoare a direcției vîntului (fig. 3), se obține

$$m_\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha(t)\, dt. \tag{11}$$

Luînd pentru intervalul de măsurare $T = 6 \cdot 10^2$ s se obține $m_\alpha =$ $= 289$ grade.

Pentru a determina funcția experimentală de corelație (fig. 4) corespunzătoare oscilogramei din care s-a extras porțiunea considerată, se poate folosi formula:

$$R_\alpha(p) = \frac{1}{t - p - 1} \int_0^{t-p} \alpha(t)\, \alpha(t + p)\, \mathrm{d}t - m_\alpha^2. \tag{12}$$

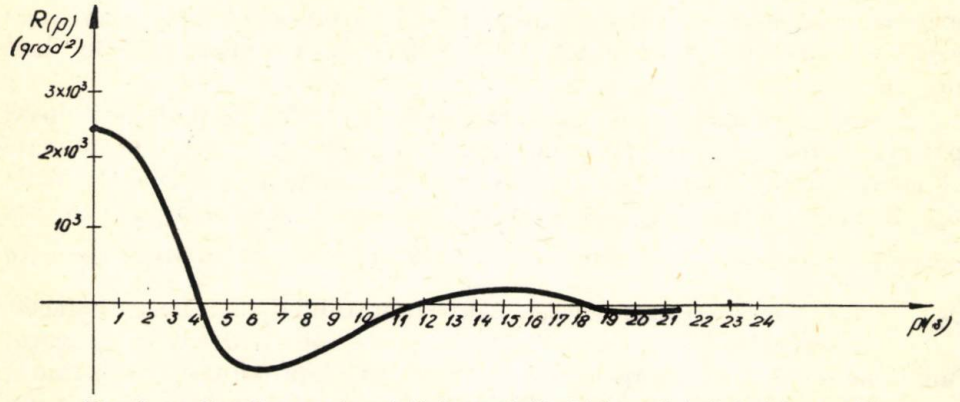


Fig. 3. — Funcția experimentală de corelație $R(p)$ a mărimii de intrare $\alpha(t)$.

Interpolarea funcției experimentale de corelație s-a făcut printr-o exponențială de forma

$$R_\alpha(p) = \sigma_\alpha^2\, \mathrm{e}^{-ap} \cos bp, \tag{13}$$

unde $a = 0{,}206\ \mathrm{s}^{-1}$; $b = 0{,}392\ \mathrm{s}^{-1}$ și $\sigma_\alpha^2 = R_\alpha(0) = 2463\ \mathrm{grad}^2$ în sistemul de axe $O'x'$ (fig. 3).

Densitatea spectrală a excitației va fi

$$S_\alpha(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_\alpha(p) \cos \nu p \mathrm{d}\nu = \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi} \frac{\nu^2 + a^2 + b^2}{(\nu^2 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2 \cdot \nu^2} \tag{14}$$

Relația dintre valoarea medie a mărimii de ieșire, care definește direcția medie a vîntului indicată de aparat și cea a excitației exterioare este

$$m_{\alpha_2} = m_\alpha\, Y(0), \text{ unde } Y(0) = 1 \text{ din relația (9).} \tag{15}$$

Abaterea medie pătratică a răspunsului pentru funcția de transfer dată de (9) rezultă:

$$\sigma_{\alpha_2}^2(\tau) = 2 \int_0^\infty |Y(\nu)|^2\, S_\alpha(\nu)\, \mathrm{d}\nu =$$

$$= 2\, \frac{\sigma_\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\nu^2 + a^2 + b^2)\mathrm{d}\nu}{[(\nu^2 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2\nu^2]\left\{1 + \left[1 + \frac{1}{(\tau\omega_2)^2}\right](\tau\nu)^2 + \left(\frac{\nu}{\omega_2}\right)^4\right\}}. \tag{16}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

Problema sintezei optimale a aparatului, problemă în rezolvarea căreia sistemul mecanic liniar considerat reprezintă o aproximație acceptabilă, se pune considerînd sistemul cu parametrii ajustabili, care urmează să fie determinați astfel încît să extremizeze un anumit indice de performanță. Astfel, pornind de la faptul că realizarea unei abateri medii pătratice minime este un criteriu satisfăcător în construcția unor astfel de aparate, problema de optimizare este legată de alegerea constantei de timp.

Rezultatele teoretice obținute au fost verificate pe un model experimental realizat de către autori avînd următoarele caracteristici: $c = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ Nm și $I = 4{,}4 \cdot 10^{-5}$ Nms^2; b, a avînd valorile date în (13).

Prin înlocuirea acestor valori în forma integrală (16) a abaterii medii pătratice, efectuînd integrarea numerică, se poate face un studiu numeric al comportării funcției în raport cu parametrul σ. Din condiția $\sigma_{adm} \geqslant \sigma_{\alpha_2}(\tau) = \min$ ($\sigma_{adm} = 5$ admis în meteorologie), rezultă valoarea optimă $\tau_{opt} = 350$ s. Din relația $\tau = \frac{\rho_2}{c}$ rezultă un coeficient de amortizare $\rho_{2opt} = 4{,}27$ Nms, care urmează să asigure aparatului o funcționare corectă.

S-a neglijat influența temperaturii asupra lui ρ_2, deoarece aparatul funcționează într-o încăpere cu temperatură aproximativ constantă, deplasarea unghiulară α_1 a ampenajului fiind transmisă cuplajului magnetic prin intermediul selsinelor.

Corespunzător unui tip constructiv de aparat și un anumit lichid de amortizare, ρ_2 se obține modificînd cantitatea de lichid din amortizor. Pentru $\rho_2 = \rho_{2opt}$ variația în timp a mărimii de ieșire din aparat (valoarea medie a direcției vîntului) este reprezentată de oscilograma 2 (fig. 2).

CONCLUZII

Aplicarea teoriei funcțiilor aleatoare la sinteza aparatului pentru măsurarea direcției medii a vîntului în timp finit, a arătat influența constantei de timp asupra preciziei.

Corespunzător valorii lui τ care minimizează abaterea medie pătratică σ_{α_2} a răspunsului aparatului la excitația aleatoare α dată de direcția vîntului, a rezultat coeficientul optim de amortizare ρ_{2opt}.

S-a arătat avantajul construirii unui aparat care să îndeplinească condiția $\frac{c}{M_v} \ll 1$, în felul acesta fiind eliminată influența vitezei vîntului asupra preciziei de măsurare.

Rezultatele teoretice obținute au fost confirmate de modelul experimental proiectat pe baza acestui studiu.

Primită la redacție la 26 octombrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. D. Acheson, H. Crouser, *A viscous damped wind vane*, — E.S.S.A. Technical Memorandum WBTM EDL *5*, oct. (1968).
2. F. Dincă, T. Teodosiu, *Vibrații neliniare și aleatoare*, Ed. Academiei, 1969.
3. S. Crandall, W. Mark, *Random vibration in mechanical systems*, New York — London, Academic Press, 1963.
4. I. Sebeșan, *The study of the permanent regime of the vibration of the locomotive electric drive*, IV. Vedeckä konferencia vysokej skoly dopravnej, Zilina, 1973.
5. I. Sebeșan, *Asupra unei metode de analiză a răspunsului sistemului mecanic de antrenare a vehiculului motor, la perturbații aleatoare*. Buletinul Institutului politehnic București, nr. 1 (1975).
6. I. Sebeșan, *Studiul vibrațiilor aleatoare ale vehiculelor de cale ferată*. Buletinul Institutului politehnic — Iași, **XX**, IV Mecanică tehnică, 1974.

INFLUENȚA VIBRAȚIILOR ASUPRA GELURILOR DE ARGILE SPĂLATE CU SOLUȚII SALINE ȘI TRATATE CU APĂ DISTILATĂ

de RADU HARET și ȘTEFAN ZAREA

Institutul politehnic București

Sînt prezentate rezultatele obținute în laborator la studiul argilelor spălate cu soluții de NaCl, avînd concentrații caracteristice, tratate cu apă distilată și supuse vibrațiilor cu amplitudini și frecvențe diferite.

S-a determinat influența concentrației soluției de NaCl asupra timpului de distrugere și a lucrului mecanic de distrugere a structurii sub acțiunea vibrațiilor. Rezultatele obținute pot fi utilizate pentru studiul stabilității argilelor marine.

1. SCOPUL LUCRĂRII. ARGILELE UTILIZATE

Modul în care sînt introduși electroliții într-un gel de argilă întărit tixotropic influențează comportarea acestuia la acțiunea solicitărilor mecanice [1], [2], [3]. În două lucrări anterioare [1], [3] s-au prezentat rezultatele obținute la studiul acțiunii vibrațiilor asupra gelurilor argiloase tratate cu apă distilată și respectiv cu diferiți electroliți.

În această lucrare se pune în evidență, cantitativ, influența pe care o are spălarea argilelor cu soluții de NaCl, avînd concentrații caracteristice, urmată de tratarea lor cu apă distilată, asupra valorilor coeficientului de tixotropie, N_d^t, a timpului, t_d, și a lucrului mecanic, L_d, de distrugere a gelurilor argiloase întărite tixotropic și supuse acțiunii unor vibrații de amplitudini și cu frecvențe diferite.

Concetrațiile soluției saline s-au ales astfel încît să rezulte pentru coeficienții de tixotropie niște valori caracteristice și anume: valoarea maximă $\left(\text{concentrația } \frac{1}{4}\ N\right)$ și o valoare egală cu cea obținută la tratarea cu apă distilată (concentrația $2N$).

Valorile amplitudinilor A și frecvenței f s-au păstrat aceleași ca și în lucrările precedente, $f = 20 \ldots 300$ Hz, $A = (5 \ldots 13)\ 10^{-6}$ m.

Pentru determinarea variației coeficientului de tixotropie s-au folosit trei tipuri de argile: Cîmpia Turzii ($N_d^t = 3{,}9$), Vlădeasa ($N_d^t = 7{,}9$) și Valea Chiuarului ($N_d^t = 12{,}3$). Variațiile timpului de distrugere a structurii, t_d și a lucrului mecanic de distrugere L_d, s-au studiat numai pentru argile cu tixotropie mare din Valea Chiuarului.

2. TEHNICA DE EXPERIMENTARE UTILIZATĂ

Ca și în cazul experiențelor descrise în lucrările anterioare [1], [3] fiecare probă de argilă utilizată a fost uscată pînă la 105°C într-o etuvă,

pentru a se elimina apa absorbită, apoi a fost mojarată şi trecută printr-o sită cu diametrul orificiilor de 0,06 mm, ceea ce a permis obţinerea unor soluţii coloidale. Astfel preparată, argila a fost introdusă într-o eprubetă de sticlă cu diametrul interior de 8 mm, spălată şi degresată în prealabil. S-au introdus în eprubetă probe de cîte 0,5 g, care au fost îmbibate în exces cu o soluţie de NaCl, avînd o concentraţie precizată $\left(\frac{1}{4}N$, respectiv $2N\right)$, apoi s-a scurs surplusul de soluţie şi a fost din nou uscată în etuvă. Ulterior, argila din eprubetă a fost tratată prin picurare cu apă distilată. Gelul astfel rezultat a fost supus la vibraţii într-o instalaţie de concepţie proprie şi care a fost descrisă anterior [1].

S-au determinat valorile coeficientului de tixotropie în funcţie de concentraţia soluţiei de NaCl, precum şi timpul şi lucrul mecanic de distrugere a gelului unei argile de tixotropie mare, în funcţie de frecvenţa şi amplitudinea vibraţiilor. Rezultatele experimentale sînt prezentate sub formă de grafice.

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pentru argilele studiate valoarea maximă a coeficientului de tixotropie a rezultat la concentraţia de $\frac{1}{4}$ N a soluţiei de NaCl (fig. 1). În

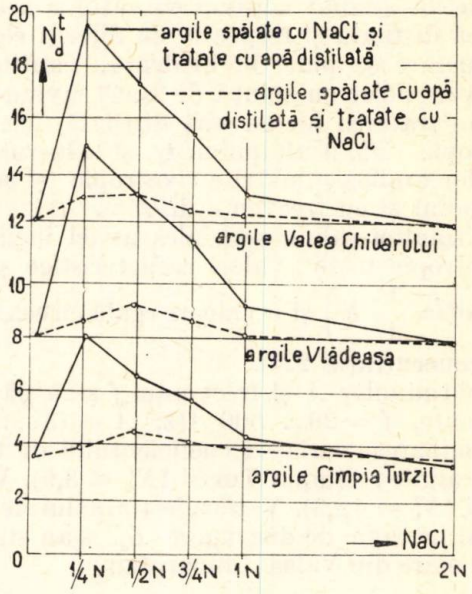


Fig. 1

cazul tratării argilei cu apă distilată şi apoi a introducerii prin picurare a soluţiei de NaCl, valoarea maximă a coeficientului de tixotropie s-a obţinut la concentraţia de $\frac{1}{2}$ N [3].

Valoarea maximă a coeficientului de tixotropie în cazul spălării argilei cu o soluție de NaCl este mult mai mare, uneori cu peste 100%, la argilele cu tixotropie mică, față de cazul tratării acestora cu apă distilată.

3.1. ARGILE SPĂLATE CU NaCl ÎN CONCENTRAȚIA $\frac{1}{4}N$ ȘI TRATATE CU APĂ DISTILATĂ

Din figura 2 rezultă că timpul necesar distrugerii gelului întărit tixotropic, $t_d = t_d(A\,;f)$ prin spălare cu NaCl, avînd concentrația de $\frac{1}{4}N$, este mult mai mare decît în cazul tratării cu apă distilată, datorită reținerii de către argilă a clorurii de sodiu în moleculă.

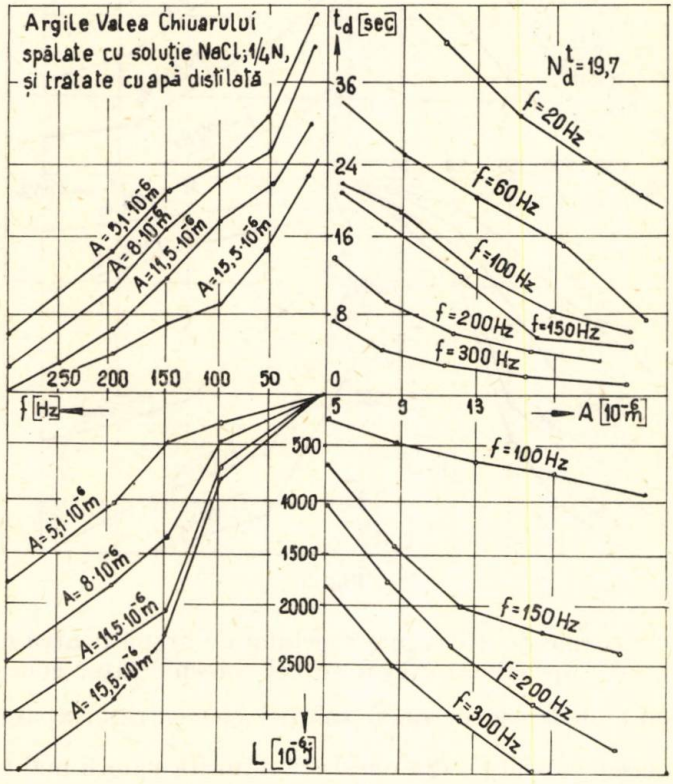


Fig. 2

Lucrul mecanic pentru distrugerea gelului format în condițiile menționate anterior crește la valori aproape duble față de experiențele efectuate cu apă distilată (fig. 2), dar creșterile sînt monotone, fără a prezenta maxime relative ca în cazul tratării numai cu apă distilată.

3.2. ARGILE SPĂLATE CU NaCl ÎN CONCENTRAȚIE 2N ȘI TRATATE CU APĂ DISTILATĂ

Pentru argilele spălate cu soluții de NaCl avînd concentrația $2N$, coeficientul de tixotropie revine la valoarea corespunzătoare apei distilate.

Timpul de rupere a gelului întărit tixotropic, preparat după tehnologia descrisă, este cu aproximativ 50% mai mare decît în cazul concentraţiei de $\frac{1}{4}N$(fig. 3).

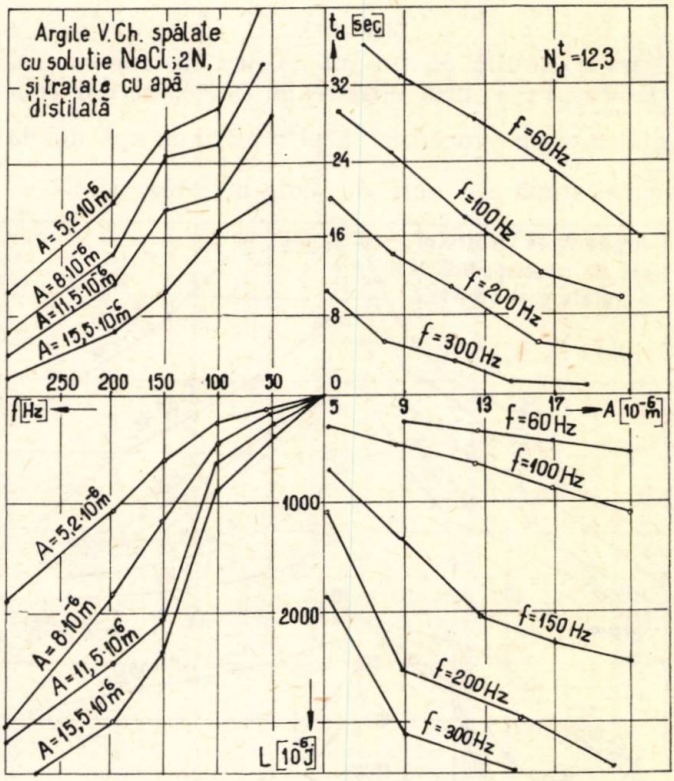


Fig. 3

Lucrul mecanic de distrugere a gelului de argilă pentru concentraţia 2 N (fig. 3), este aproximativ egal cu cel corespunzător concentraţiei de $\frac{1}{4}N$ de NaCl, deoarece în cazul soluţiei concentrate, apare o scădere sensibilă a masei substanţei din eprubetă datorită valorii mai mici a coeficientului de tixotropie.

Primită la redacţie la 7 august 1974

BIBLIOGRAFIE

1. R. HARET, ŞT. ZAREA, *L'influence des vibrations sur la thixotropie des argiles*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl. **19**, 1 (1974).
2. G. ŢIŢEICA, Teză de doctorat, Bucureşti, 1968.
3. R. HARET, ŞT. ZAREA *Recherches expérimentales pour la détermination de l'influences des électrolytes sur la thixotropie des argiles soumises aux vibrations*, Rev. Roum. Sc Techn. — Méc. Appl., (Sub tipar).

TEORIA LINIAR-ELASTICĂ A MECANICII RUPERILOR. I

de TOMA PANĂ

Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se prezintă o sinteză a principalelor probleme ale studiului ruperii brutale la structurile confecţionate din materiale cu comportare liniar-elastică. Sînt scoase în evidenţă căile şi mijloacele de prevenire a distrugerii construcţiilor, ce stau la îndemîna inginerului, care, pe baza unui aparataj matematic simplu şi cu minimum de date experimentale, poate face prognoza rezistenţei reale de rupere a structurilor conţinînd defecte de dimensiuni cunoscute.

1. INTRODUCERE

După cum se cunoaşte, fenomenul ruperii este precedat de apariţia fisurilor, care sînt rezultatul imperfecţiunii reţelei cristaline. Atunci cînd condiţiile sînt prielnice, fisurile încep a se propaga şi duc în final la distrugerea structurii. În funcţie de modul în care se face iniţierea şi propagarea fisurilor ruperile se împart în cele două mari categorii : ductile şi fragile.

Practica inginerească a demonstrat că materialele nu pot fi clasificate după conduita ruperii întrucît acelaşi material, în funcţie de condiţiile de lucru, se poate rupe fie ductil fie fragil. Unul din cei mai importanţi factori care determină conduita ruperii este temperatura. Cercetarea modului de variaţie cu temperatura al ductilităţii materialelor a condus la punerea în evidenţă a fenomenului tranziţiei ductil-fragile a ruperii precum şi la introducerea noţiunii de temperatură de tranziţie.

Cu toate dificultăţile legate de determinarea criteriului de definire a acesteia, faptul că eforturile unitare necesare pentru iniţierea ruperii brutale depind în mare măsură de temperatură, a făcut ca temperatura de tranziţie să devină criteriu de proiectare.

Metodele de proiectare bazate exclusiv pe temperatura de tranziţie au două neajunsuri. Primul rezultă din presupunerea că ruperea în serviciu poate fi corelată cu comportarea la şoc a crestăturii epruvetei utilizate pentru determinarea temperaturii de tranziţie [1] şi are drept consecinţă evaluarea unilaterală a comportării la rupere a piesei, care în marea majoritate a cazurilor lucrează în condiţii mai puţin severe decît epruvetele. Al doilea neajuns se datoreşte faptului că limitarea tensiunilor, pentru temperaturile inferioare temperaturii de tranziţie, nu este operativă decît dacă la temperaturile superioare acesteia materialul se află în stare ductilă. Ignorarea acestui neajuns face ca, la piesele cu defecte

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 34, NR. 4, 1975, P. 625–636

importante, ruperea fragilă să se producă la temperaturi mai mari decît temperatura de tranziție determinată experimental pentru materialul respectiv.

Deoarece cu toate restricțiile introduse pe baza conceptului temperaturii de tranziție ruperea fragilă a continuat să producă un mare număr de accidente, s-a impus necesitatea elaborării unor norme de proiectare și de execuție cu ajutorul cărora să se evite distrugerile catastrofale ale structurilor. Aceasta a condus la fundamentarea mecanicii ruperilor, disciplină care începînd din 1965 a luat o amploare din ce în ce mai largă, constituind în prezent unul din cele mai importante instrumente de proiectare a structurilor susceptibile de ruperi fragile. Totodată, mecanica ruperilor în general, și teoria liniară elastică în special, au revoluționat concepția despre proprietățile mecanice ale materialelor și modul de determinare a acestora.

Mecanica ruperilor este întemeiată pe observația că cel mai eficace instrument de prevenire a ruperilor brutale este cunoașterea condițiilor de propagare a fisurilor [2]. Aceste condiții sînt determinate de o serie de parametrii cum sînt eforturile unitare aplicate, temperatura, lungimea maximă a fisurii etc., ale căror valori caracterizează starea critică de solicitare a unui element din structură, la care fisura devenind instabilă se propagă violent provocînd distrugerea instantanee a elementului respectiv sau chiar a întregii structuri. Studiul legilor de propagare a fisurilor a dus la stabilirea unor noi parametrii de material al căror mod de utilizare în scopul proiectării este prezentat în cele ce urmează.

2. TEORIA LUI GRIFFITH

Prima explicație a discrepanței dintre valorile teoretice și cele experimentale ale rezistenței de rupere a materialelor a fost dată de Griffith [3]. Teoria sa este fundamentată pe postulatul că scăderea rezistenței de rupere este rezultatul dezvoltării unor fisuri care, producînd concentrări de tensiuni, conduc la apariția unor eforturi unitare locale mai mari decît rezistența teoretică de rupere. Analizînd soluția obținută de Inglis [4], pentru distribuția de tensiuni de la vîrful unei fisuri eliptice, Griffith a observat că o fisură infinită nu poate reduce la zero tensiunile existente în solid, deoarece extensia fisurii implică introducerea unei energii specifice pe suprafețele libere produse de rupere. În consecință propune drept criteriu pentru extensia fisurii preexistente, egalitatea dintre variația de energie a cîmpului de tensiuni elastice și energia superficială a suprafețelor libere create prin avansarea acesteia.

Considerînd o placă subțire solicitată la întindere monoaxială de eforturile unitare normale σ, care are o fisură centrală de lungime $2\,a$, și presupunînd că sînt îndeplinite condițiile stării plane de tensiune, energiei elastice de deformație pe unitatea de grosime de placă, eliberată prin crearea fisurii este

$$W_e = -\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E}. \tag{1}$$

Energia superficială a suprafețelor create este $W_s = 4\,a\,\gamma$, unde γ este energia superficială specifică, iar factorul 4 se datorește

faptului că prin avansarea fisurii, la fiecare vîrf al acesteia se produc cîte două suprafețe noi. Variația de energie potențială datorită introducerii fisurii este $\Delta W = W_e + W_s$. Însă, conform criteriului lui Griffith, extinderea fisurii sub acțiunea eforturilor unitare σ, necesită creșterea energiei de suprafață care este echilibrată de micșorarea energiei elastice de deformație. În consecință

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta W)}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(4a\gamma - \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E}\right) = 0, \tag{2}$$

de unde rezultă că efortul unitar care produce ruperea are valoarea

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}}\,. \tag{3}$$

Deci, pentru o dimensiune dată a fisurii, există o anumită valoare a efortului unitar sub care fisura nu se propagă și deasupra căreia aceasta se propagă brutal. În relația (3) prin σ_f s-a notat cea mai mică valoare a efortului unitar normal, necesar pentru ca propagarea fisurii să poată fi posibilă.

Deși cercetările ulterioare au arătat că ecuația lui Griffith poate fi îmbunătățită, rezultatele acestora au condus exclusiv la modificarea constantelor, forma generală a ecuației rămînînd aceeași,

$$\sigma_f^2 a = \text{const.} \tag{4}$$

Pe baza criteriului propus de Griffith, se poate afirma că dacă energia elastică eliberată în material depășește cu mult energia consumată prin propagarea fisurii, atunci extensia acesteia se face rapid. Odată ajuns în acest stadiu, procesul de rupere se desfășoară independent de energia introdusă în structură de sursele exterioare. Bilanțul energetic al acestui proces cuprinde patru termeni și anume : energia elastică de deformație, energia superficială a suprafețelor create prin rupere, energia plastică de deformație și energia cinetică.

Originea energiei elastice poate fi explicată cu ajutorul figurii 1. Simultan cu extinderea fisurii, ca urmare a deplasărilor produse de aceasta, are loc modificarea distribuției locale a eforturilor unitare normale, perpendiculare pe planul fisurii, care sînt funcție de distanța măsurată de la vîrful ei. Astfel, dacă se consideră la vîrful fisurii un element de volum de dimensiuni δa, $\mathrm{d}y$ și $\mathrm{d}z$, unde z este coordonata perpendiculară pe planul figurii 1, ca urmare a extensiei fisurii cu cantitatea δa, materialului dintr-un punct oarecare situat în volumul $\delta a\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z$, se descarcă de la valoarea efortului unitar σ_y, dată de ordonata curbei tensiunilor elastice, pînă la zero. Această descreștere a eforturilor unitare locale conduce la eliberarea energiei elastice δW_e, care este integrala variației de energie luată pentru întregul volum de material care suportă procesul ruperii și care, dincolo de punctul de instabilitate, este presupusă a fi suficient de mare pentru ca procesul să continue fără ajutor din exterior.

În decursul extensiei fisurii, materialul absoarbe energie în trei moduri distincte, cărora le corespund ceilalţi trei termeni ai bilanţului energetic amintit mai sus.

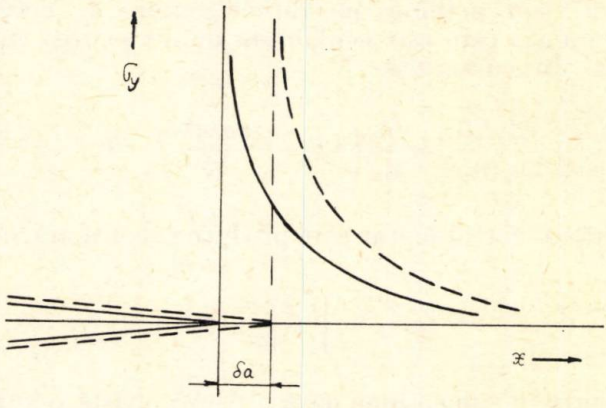


Fig. 1

Crearea noilor suprafeţe de rupere necesită introducerea unei energii egale cu energia de suprafaţă liberă. Termenul $\delta\gamma$ va desemna energia consumată pentru crearea energiei superficiale, pe unitatea de arie, a celor două suprafeţe produse prin extensia fisurii.

La materialele care nu se comportă perfect fragil, ruperea este însoţită de deformaţii plastice ireversibile. Pentru producerea lor se consumă o energie δW_p, echivalentă cu variaţia lucrului mecanic dată de deformaţia plastică la creşterea extensiei fisurii.

Propagarea fisurii implică de asemenea un consum de energie pentru creşterea energiei cinetice a particulelor de material. Procesul ruperii pune în mişcare cele două flancuri ale planului de rupere care iniţial erau în repaus. Creşterea energiei cinetice a particulelor de material de pe fiecare flanc, care îşi măresc viteza de la zero la valoarea avută după creşterea lungimii fisurii cu cantitatea δa, se notează cu δW_c.

Folosind cele patru energii definite mai sus, se poate scrie condiţia de propagare nelimitată a fisurii. Presupunînd că sistemul se află spontan în stare de echilibru cînd energia sa liberă este minimă, condiţia de instabilitate a propagării ruperii este

$$\delta W_e = \delta\gamma + \delta W_p + \delta W_c \tag{5}$$

În teoria sa, Griffith a folosit criteriul bilanţului de energie sub o formă simplificată. Studiind sticla — care la temperatura ambiantă este un material fragil — şi considerînd condiţiile existente în epruveta aflată la punctul de instabilitate cu o clipă înaintea începerii mişcării, el a putut neglija atît energia de deformaţie plastică, cît şi pe cea cinetică. În acest caz criteriul general de instabilitate (5) se scrie :

$$\delta W_e \geqslant \delta\gamma, \tag{6}$$

formă care s-a arătat a fi verificată în bune condiţii de către experienţă.

Sub forma sa inițială, teoria lui Griffith este în dezacord cu rezultatele experimentale, pentru cele mai multe materiale. Pentru metale, de exemplu, calculul energiei superficiale conduce la valori de trei, patru ori mai mari decît cele măsurate. Perfecționările aduse acestei teorii de către Irwin și Orowan au făcut însă ca ea să capete o largă aplicare practică. Modificările aduse ecuației lui Griffith de către cei doi cercetători [5], [6], [7], rezultă din luarea în considerație a tensiunilor de la vîrful rotunjit al unei fisuri de lungime $2a$, situată într-o placă solicitată la întindere monoaxială de eforturile unitare normale σ. Dacă raza de racordare a vîrfului fisurii este de același ordin de mărime cu distanța interatomică, valoarea efortului unitar din placă, la care se produce extensia fisurii, este dată de relația

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E\gamma}{4a}} \,. \tag{7}$$

Atît analiza lui Griffith, făcută pe criteriul bilanțului energetic, cît și aceea a lui Orowan, bazată pe studiul concentrării tensiunilor, dau rezultate cantitative similare, care concordă satisfăcător cu valorile rezistențelor de rupere măsurate la solidele fragile, cum sînt sticla și silicații, care conțin defecte avînd lungimi cuprinse între 0,1 și 1 μm. Încercările de a extinde la metale teoria imaginată de Griffith și Orowan nu au avut succes deoarece diferența dintre rezultatele teoretice și cele experimentale devine neglijabilă numai pentru defecte cu lungimi mai mari de un centimetru, care sînt mult superioare celor întîlnite în practică.

Recunoașterea faptului că la majoritatea materialelor de uz ingineresc propagarea fisurilor fragile este însoțită de deformații plastice apreciabile, localizate în vecinătatea suprafeței de rupere, a condus la modificarea ecuației lui Griffith în care s-a introdus un termen suplimentar ce corespunde energiei consumate în zona plastică și care se adaugă la energia superficială γ, în relațiile (3) și (7).

3. TEORIA LUI IRWIN

Experimental s-a constatat că producerea celor mai mici deformații plastice, observate în ruperile fragile ale metalelor, necesită o energie cel puțin de două ori mai mare decît energia de suprafață liberă. În aceste condiții, în special pentru oțeluri, se poate scrie :

$$\delta W_e \geqslant \delta W_p ; \quad \delta W_p \gg \delta\gamma ; \quad \delta\gamma \approx 0. \tag{8}$$

Această observație i-a permis lui Irwin, [7], să ignore detaliile micromecanismului de absorbție a energiei de rupere și să înglobeze termenii δW_p și $\delta\gamma$ într-unul singur : energia absorbită prin extensia fisurii. Procedînd astfel se obține o simplificare acceptabilă din punct de vedere inginerese, care în plus are avantajul că ocolește problemele ridicate de măsurarea directă a termenilor δW_p și $\delta\gamma$, care încă nu sînt rezolvate în mod satisfăcător.

Dacă se împarte relaţia (5) cu variaţia ariei suprafeţei fisurii δA, membrul stîng al acesteia reprezintă energia elastică de deformaţie, eliberată pe unitatea de suprafaţă de rupere, care se mai poate scrie şi sub forma

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial W_e}{\partial A} \tag{9}$$

Întrucît mărimea $\mathcal{G}$ poate fi considerată ca fiind forţa disponibilă pe unitatea de lungime a frontului fisurii, ea a fost numită forţă de extensie a fisurii.

Atunci cînd efortul unitar normal din material atinge valoarea σ_f la care propagarea fisurii se autoîntreţine, forţa de extensie a fisurii devine egală cu energia absorbită prin extensia fisurii pe unitatea de suprafaţă de rupere. În cazul plăcii infinite, această valoare critică a forţei de extensie a fisurii este dată de expresia

$$\mathcal{G}_c = \frac{\pi a \sigma_f^2}{E} \tag{10}$$

şi se obţine din formula (1) pe baza relaţiei (9).

Deci, aptitudinile materialului de a se opune propagării fisurilor se pot exprima prin valoarea critică a forţei de extensie a fisurii, necesară pentru declanşarea unei creşteri catastrofice a acesteia. Pentru acest motiv, Irwin a folosit noţiunea de „tenacitatea ruperii" în scopul denumirii parametrului $\mathcal{G}_c$.

Aşadar, condiţiile care conduc la apariţia ruperii sînt descrise de creşterea forţei de extensie $\mathcal{G}$ pînă la valoarea critică $\mathcal{G}_c$, la care propagarea se face instantaneu. Procesul de rupere continuă atîta vreme cît este menţinută inegalitatea $\mathcal{G} \geqslant \mathcal{G}_c$, diferenţa celor doi termeni reprezentînd valoarea energiei cinetice a suprafeţelor de rupere.

Forţa critică de extensie a fisurii poate fi măsurată ca orice alt parametru ce caracterizează proprietăţile mecanice ale materialului. În mod curent $\mathcal{G}_c$ se măsoară în condiţiile ruperii statice.

Deoarece deformaţia plastică de la vîrful fisurii necesită introducerea unei energii proporţionale cu dimensiunile zonei plastice, rezultă că analiza elastică a sistemului aflat la punctul de instabilitate nu reflectă realitatea decît în cazul materialelor fragile sau cu ductibilitate redusă. În consecinţă, teoria liniară elastică a mecanicii ruperilor imaginată de Irwin este inaplicabilă la materialele ductile sau semiductile. Chiar şi la materialele la care această teorie este aplicabilă, măsurarea parametrului $\mathcal{G}_c$ este afectată de dimensiunile zonelor plastice şi prin urmare, pentru obţinerea unor valori comparabile, este necesar ca geometria epruvetelor să fie menţinută constantă.

Pentru a utiliza teoria lui Irwin în scopul proiectării este necesar să se cunoască expresia forţei de extensie a fisurii în funcţie de eforturile unitare şi de parametrii geometrici ai piesei şi defectului existent în ea, precum şi valoarea tenacităţii ruperii pentru materialul din care este confecţionată piesa.

4. EFORTURI UNITARE ȘI DEFORMAȚII ÎN VECINĂTATEA FISURII

Prezența unui defect, prevăzut cu o muchie ascuțită, într-un corp aflat în stare de tensiune uniformă monoaxială, induce eforturi unitare în toate cele trei direcții cu excepția cazului în care planul defectului este paralel cu eforturile unitare aplicate. Severitatea unui defect dat este

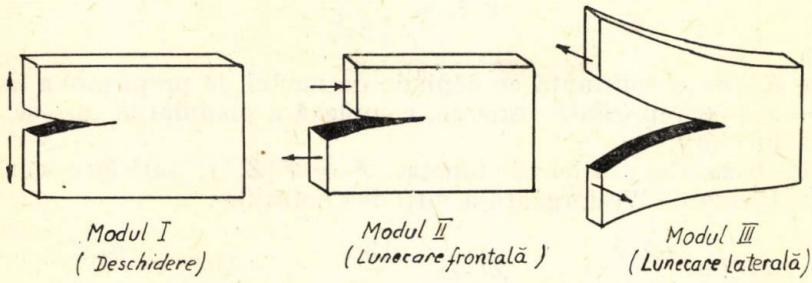


Fig. 2

funcție de efectul său tridimensional și de intensitatea concentrărilor de tensiuni pe care le produce în imediata sa vecinătate. Datorită complexității ei, o stare triaxială de eforturi unitare nu poate fi cunoscută cu precizie și ca urmare, pentru preîntîmpinarea apariției curgerii plastice se impune limitarea ductibilității materialului. De aceea, pentru a se ușura studiul distribuției de eforturi unitare din jurul defectului, care aproape totdeauna este triaxială, se fac ipoteze simplificatoare reducînd astfel problema la una din cele două aproximații ale teoriei elasticității : starea plană de tensiune sau starea plană de deformație. Măsura în care, distribuția teoretică a eforturilor unitare de la vîrful fisurii, concordă cu realitatea este hotărîtoare pentru precizia cu care poate fi făcută prognoza ruperii cu ajutorul ecuațiilor mecanicii ruperilor, care sînt relații de forma (10).

Maniera în care se face extensia fisurii depinde de starea de tensiune ce există în regiunea în care aceasta se află. După mișcarea relativă pe care o au suprafețele de rupere situate de o parte și de alta a planului în care se extinde fisura, propagarea acesteia se poate face după unul din cele trei moduri arătat în figura 2. Toate celelalte cazuri posibile pot fi descrise prin combinarea acestor trei moduri simple. Cele mai multe ruperi fragile se produc după modul I deoarece, la acest mod, energia elastică de deformație disponibilă și deplasările frontului fisurii sînt mai mari decît la celelalte două moduri.

Pentru un cîmp de tensiuni liniar elastice, starea plană de eforturi unitare satisface condiția lui Lévy [8] :

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{11}$$

Componentele tensorului efort unitar se pot exprima cu ajutorul funcției de tensiuni $\mathscr{F}(x, y)$ a lui Airy [9], folosind relațiile

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x \partial y}, \tag{12}$$

În acest caz, relația (11) se scrie :

$$\nabla^4(\mathscr{F}) = 0. \tag{13}$$

Funcția $\mathscr{F}(x, y)$ poate fi exprimată cu ajutorul funcției lui Westergaard [10]

$$Z(\zeta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi\zeta}} \tag{14}$$

în care K este o constantă ce depinde de modul de propagare a fisurilor iar $\zeta = x + iy$ reprezintă variabila complexă a planului la care se referă funcția lui Airy.

Pe baza observației că funcția $\mathscr{F} = \mathscr{F}[Z(\zeta)]$ satisface condițiile Cauchy-Rieman, Westergaard a introdus notațiile :

$$Z'(\zeta) = \frac{dZ(\zeta)}{d\zeta}. \qquad Z(\zeta) = \frac{d\bar{Z}(\zeta)}{d\zeta}. \qquad \bar{Z}(\zeta) = \frac{d\bar{\bar{Z}}(\zeta)}{d\zeta}, \tag{15}$$

a căror utilizare permite simplificarea exprimării funcției tensiunilor. Astfel, ținînd seama de condițiile la limită specifice fiecărui mod de propagare a fisurii, pentru primele două moduri, funcția lui Airy are expresiile

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_I &= \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}} + y \operatorname{Im} \bar{Z}, \\ \mathscr{F}_{II} &= - y \operatorname{Re} \bar{Z}. \end{aligned} \tag{16}$$

Cu ajutorul relațiilor (12) componentele tensorului tensiune au, pentru primul mod de propagare a fisurii, expresiile :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z', \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \\ \tau_{xy} &= - y \operatorname{Re} Z', \end{aligned} \tag{17}$$

iar pentru cel de-al doilea, expresiile

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Im} Z + y \operatorname{Re} Z', \\ \sigma_y &= - y \operatorname{Re} Z', \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z'. \end{aligned} \tag{18}$$

Componentele tensorului deformație sînt legate de deplasările u și v, produse după direcțiile axelor de coordonate, prin intermediul ecuațiilor lui Cauchy [8]. Prin integrarea acestora rezultă, pentru deplasările u și v, expresiile

$$\begin{aligned} Eu &= (1 - \mu) \operatorname{Re} \bar{Z} - (1 + \mu) y \operatorname{Im} Z, \\ Ev &= 2 \operatorname{Im} \bar{Z} - (1 + \mu) y \operatorname{Re} Z, \end{aligned} \tag{19}$$

pentru primul mod de propagare şi expresiile :

$$Eu = 2 \operatorname{Im} \bar{Z} + (1 + \mu)\, y \operatorname{Re} Z,$$
$$Ev = -(1 - \mu) \operatorname{Re} \bar{Z} - (1 + \mu)\, y \operatorname{Im} Z, \tag{20}$$

în cazul celui de-al doilea.

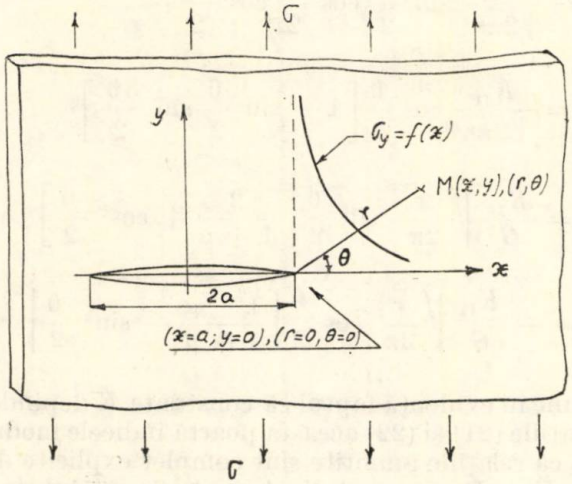


Fig. 3

Calculînd funcţiile $Z'(\zeta)$ şi $\bar{Z}(\zeta)$ cu ajutorul relaţiei (14), în care variabila complexă a fost scrisă sub formă trigonometrică $\zeta = r\, e^{i\theta}$ folosind coordonatele polare r şi θ care definesc poziţia unui punct din planul fisurii în raport cu vîrful şi direcţia de propagare a acesteia, figura 3, şi înlocuind în relaţiile (17), (18), (19) şi (20) rezultă explicit expresiile eforturilor unitare şi ale deplasărilor. Astfel, pentru primul mod de propagare, se obţin relaţiile :

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\Big], \tag{21}$$

$$u = \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left[\frac{1 - \mu}{1 + \mu} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right],$$

$$v = \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{2}{1 + \mu} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right],$$

iar pentru al doilea mod, relaţiile :

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right], \tag{22}$$

$$u = \frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{2}{1+\mu} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right],$$

$$v = -\frac{K_{II}}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left[\frac{1-\mu}{1+\mu} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right].$$

Pentru a pune în evidenţă faptul că constanta K depinde de modul de propagare, în relaţiile (21) şi (22) aceasta poartă indicele modului respectiv.

Se observă că relaţiile amintite sînt complet explicite dacă se cunosc constante K_I şi K_{II}. Parametrul K depinde de modul de solicitare, de intensitatea sarcinilor aplicate, de forma şi dimensiunile piesei considerate precum şi de forma, dimensiunile şi orientarea fisurii în raport cu cîmpul de tensiuni din piesă. Acest parametru se numeşte factor de intensitate a eforturilor unitare şi are o semnificaţie specială fiind o caracteristică a distribuţiei eforturilor unitare din vecinătatea vîrfului fisurii în timpul propagării acesteia, după unul din cele trei moduri.

5. ECUAŢIA FUNDAMENTALĂ A MECANICII RUPERILOR

Forţa de extensie a fisurii $\mathcal{G}$ se poate obţine şi din calculul energiei necesare pentru creşterea virtuală a lungimii fisurii cu cantitatea Δa.

Într-un punct oarecare de pe axa Ox, în situaţia dinaintea propagării fisurii, efortul unitar σ_y şi deplasarea v au expresiile :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \text{ şi } v = 0, \tag{23}$$

iar după extensia acesteia, expresiile :

$$\sigma_y = 0 \text{ şi } v = \frac{4K_I}{E}\sqrt{\frac{r'}{2\pi}}, \tag{24}$$

unde, conform figurii 4, distanţa r' este dată de relaţia : $r' = \Delta a - r$.

Energia necesară pentru extensia fisurii cu o unitate de lungime este egală cu lucrul mecanic efectuat de eforturile unitare σ_y care variind de la valoarea lor nominală pînă la zero, parcurg deplasările v al celor două suprafeţe de rupere. Deci

$$\mathcal{G} = \frac{2}{\Delta a}\int_0^{\Delta a} \frac{1}{2}\sigma_y v \mathrm{d}r = \frac{2K_I^2}{\pi E \Delta a}\int_0^{\Delta a}\sqrt{\frac{\Delta a - r}{r}}\,\mathrm{d}r. \tag{25}$$

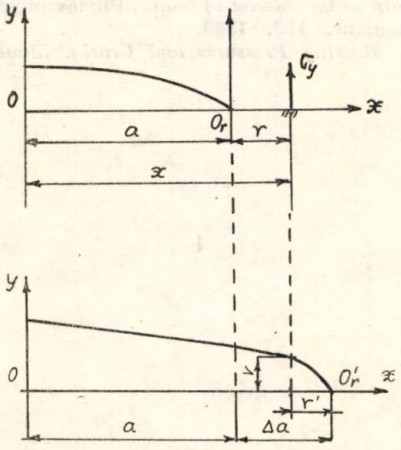


Fig. 4

Efectuînd integrala rezultă ecuaţia fundamentală a teoriei liniar elastice a mecanicii ruperilor :

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E}, \tag{26}$$

care exprimă legătura dintre forţa de extensie a fisurii şi factorul de intensitate al eforturilor unitare.

Deşi din punct de vedere analitic relaţia (26) este valabilă pentru orice valoare a eforturilor unitare aplicate, ea nu are semnificaţie fizică decît dacă efortul unitar σ din piesă atinge valoarea σ_f la care extensia fisurii nu se mai face lent (virtual) ci rapid. În aceste condiţii forţa de extensie $\mathcal{G}$ fiind egală cu valoarea critică şi factorul K_I — ce depinde de valoarea eforturilor unitare aplicate — devine critic.

Primită la redacţie la 8 mai 1974

BIBLIOGRAFIE

1. G. E. Dieter, *Metalurgia mecanică*, Bucureşti, Editura Tehnică, 1970.
2. E. R. Parcher, *Brittle Behaviour of Engineering Structures*, New York, John Willey et Sons. Inc., 1957.

3. A. A. Griffith, *The Phenomenom of Rupture and Flow in Solids*, Philosophycal Transactions of the Royal Society, London. Serie A, 221, 1920.
4. C. E. Inglis, *Stresses in a Plate due to the Presence of Cracks and Sharps Corners*, Transactions of the Institute for Naval Architects, London, Vol. 55, part. 1, 1913.
5. E. Orowan, *Energy Criteria of Fracture*, Welding Journal vol. 34, 1955.
6. — *Fundamentals of Brittle Behaviour in Metals*, Fatigue and Fracture of Metals. New York, John Willey et Sons Inc., 1952.
7. G. R. Irwin, *Fracture Mechanics*, Proceedings of the First Symposium of Naval Structural Mechanics held at Standford University, California, August 1958. New York, Pergamon Press, 1960.
8. M. M. Filonenco — Borodici, *Teoria elasticității*, București, Editura Tehnică, 1952.
9. G. B. Airy, *On the Strain in the interior of beams*, Phylosophycal Transactions of the Royal Society, London, nr. 153, 1863.
10. H. M. Westergaard, *Bearing Pressures and Cracks*, Journal of Applied Mechanics, **61**, *49* (1939).

RECENZII

YIH-HSING PAO, CHAO—CHOW MOW, *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations* (Difracţia undelor elastice şi concentrările de tensiuni dinamice). Crane Russak (New York), Adam Hilger (London), 1973, IX + 693 pag., 166 fig., 18 $.

Această monografie constituie rezultatul unor cercetări sistematice asupra difracţiei undelor elastice şi a efectului solicitărilor dinamice în cazul diferitelor tipuri de structuri, începute de cei doi autori în anul 1960. Lucrările anterioare, efectuate pe plan mondial, nu furnizează decît o cantitate relativ redusă de informaţie, astfel încît lucrarea de faţă oferă, prin expunerea sistematică a metodelor matematice folosite în rezolvarea problemei difracţiei undelor elastice atît în cazul staţionar, cît şi în cel tranzitoriu, precum şi prin prezentarea unor rezultate numerice referitoare la concentrările de tensiuni dinamice pentru diferite tipuri de obstacole, nu numai metodologia optimă de lucru ci şi unele rezultate originale, deosebit de interesante, ale celor doi autori.

Primele două capitole sînt consacrate punerii problemei, respectiv prezentării elementelor de mecanica mediilor continue strict necesare pentru analiza răspunsului staţionar şi tranzitoriu al solidului elastic. Pe lîngă metoda transformărilor Fourier şi Laplace şi a integralei Duhamel mai sînt apoi expuse şi metodele matematice uzuale în studiul difracţiei undelor elastice şi a concentrărilor de tensiuni dinamice — metoda dezvoltării în funcţii de undă, metoda ecuaţiei integrale, metoda transformării integrale, metoda perturbaţiilor. Se dau, de asemenea, exemplificări asupra modului de utilizare concretă a acestor metode în cazuri specifice.

Următoarele trei capitole cuprind analiza detaliată a problemelor cilindrului circular, a cilindrului parabolic după o schemă aproape identică : scrierea ecuaţiilor fundamentale, în coordonatele corespunzătoare, şi rezolvările complete atît pentru incidenţa normală, cît şi pentru cea oblică. În sfîrşit, se fac exemplificări pentru undele SH, P şi SV.

Ultimul capitol este dedicat problemei incluziunii sferice. Sînt date ecuaţiile fundamentale, rezolvarea făcîndu-se în cazul incluziunii elastice şi a diferitelor cazuri limită. În plus, se face studiul tensiunilor dinamice în jurul unei cavităţi sferice în cazul tranzitoriu.

Lucrarea conţine un index de termeni şi autori.

Bibliografia, sistematizată pe capitole şi paragrafe, cuprinde un mare număr de titluri (289) şi este rezultatul unor minuţioase investigaţii, vizînd, pe lîngă lucrări bine cunoscute, de circulaţie, şi rapoarte editate de instituţii specializate.

Modul de abordare treptată precum şi rezolvarea completă a problemelor, concretizată în rezultate numerice, grafice şi diagrame, fac din această monografie un preţios instrument de studiu pentru o gamă extrem de largă de probleme, de la aspecte teoretice ale ruperii şi mecanica materialelor compozite la probleme concrete ridicate de proiectarea structurilor subterane consolidate, respectiv de proiectarea organelor componente ale diferitelor tipuri de maşini şi ultraacustică.

H. Paven

M. JESSEL, *Acoustique Théorique — Propagation et Holophonie* (Acustică teoretică — Propagare şi holofonie). Masson, Paris, 1973, XV + 146 pag., 63 fig., 85 F.

Cartea lui M. Jossel constituie prima parte a unui curs general de acustică teoretică, care va mai aborda şi aspecte fundamentale legale de fenomenele de difracţie şi absorbţie. În

această primă parte autorul pornește de la expunerea legilor acusticii pe baza legilor de conservare ale mecanicii mediilor continue.

Primul capitol este consacrat introducerii ecuațiilor fundamentale ale acusticii ; în acest sens sînt date, mai întîi, elementele de bază comune acusticii și mecanicii mediilor continue, iar în continuare deducerea ecuației lui D'Alembert. În încheierea capitolului autorul prezintă o formulare simbolică care prezintă avantajul concentrării la maximum a materialului acestui capitol.

Două capitole sînt dedicate, în continuare, stabilirii soluțiilor elementare în spațiu liber și prezentării modului în care pot fi construite, pornind de la surse elementare, cîmpuri de diferite grade de complexitate. Merită subliniat și efortul introducerii potențialilor, scalar și vector — pe o cale originală — într-un mod cu totul natural.

Ultimul capitol cuprinde o extrem de interesantă transcriere în acustică, a rezultatelor obținute de autor în cadrul unor cercetări conduse de către Louis de Broglie la Institutul Poincaré, privind propagarea undelor electromagnetice și consecințele experimentale și teoretice ale principiului lui Huygens. Este vorba de holofonie — corespondentul în acustică al holografiei electromagnetice — și de absorbția acustică activă. După prezentarea și analiza formei generale a principiului lui Huygens și al aplicării metodelor de decupare spațială și temporală la ecuația undelor, în final sînt expuse diferite aspecte legate de realizarea practică a unor absorbanți acustici activi, respectiv a holofoniei.

Lucrarea conține de asemenea un index alfabetic de probleme și autori. Bibliografia cuprinde un număr de 71 de lucrări cuprinzînd tratate și articole.

Cursul lui M. Jessel se adresează unui larg grup de fizicieni, matematicieni și ingineri, oferind atît prin formalismul elegant și eficace folosit, și care la prima vedere pare surprinzător, cît și prin insistența cu care abordează chestiunile de acustică neliniară, un ghid prețios într-o nouă ramură a acusticii aplicate.

H. Paven

P. GERMAIN, *Cours de Mécanique des Milieux Continus, t. I — Théorie Generale* (Curs de mecanica mediilor continue, vol. I — Teorie generală). Masson, Paris, 1973, XXII + 417 pag., 104 fig., 116 F.

Noul curs de mecanica mediilor continue al profesorului Paul Germain, constituie rezultatul firesc al impactului rezultatelor cercetărilor de chimie macromoleculară, analiză numerică și analiză funcțională, al industriei aerospațiale asupra cercetărilor actuale de mecanică. În același timp el răspunde, conform afirmației autorului, dorinței de modernizare a anteriorului curs de mecanica mediilor continue, apărut în anul 1962 și actualmente epuizat.

Conceput în mai multe volume care să cuprindă succesiv teoria generală a mediilor continue, mecanica solidelor, mecanica fluidelor și, în sfîrșit, reluarea teoriei generale într-o formulare pe baza funcționalelor, cursul se ocupă în prima sa parte de noțiunile fundamentale de deformație, tensiune, de ecuațiile constitutive precum și de stabilirea ecuațiilor generale ale dinamicii și termodinamicii mediilor continue. În acest sens trebuie remarcată introducerea, pe baza metodei stării locale, a termodinamicii, care lipsea din vechiul curs și care este realmente indispensabilă unui studiu eficient chiar în această primă etapă.

Un prim capitol este consacrat revederii noțiunilor de bază ale mecanicii generale, pregătind astfel cititorul pentru prezentarea subiectului propriu-zis al cursului. În continuare, legile generale de conservare ale mecanicii mediilor continue pentru masă, cantitate de mișcare și energie sînt expuse detaliat, pe parcursul a trei capitole. Avînd în vedere faptul că pentru obținerea întregului ansamblu de ecuații și condiții necesare descrierii și prevederii evoluției unui sistem în mișcare, informația furnizată de legile de conservare deja prezentate trebuie completată de legi care să explicitezе comportarea diferitelor tipuri de medii, un al doilea pas, după introducerea tensorului tensiune, respectiv a tensorului viteză de deformație, îl constituie prezentarea tensorului deformației obișnuit. Capitolele VI, VII și VIII pot fi acum dedicate ecuațiilor constitutive. Urmărind apropierea cititorului de rezultatele moderne obținute de teoria generală a ecuațiilor constitutive, autorul se ocupă mai întîi de expunerea

principiilor generale pe care trebuie să le satisfacă ecuaţiile constitutive cu exemplificări în cazul fluidelor clasice, al elasticităţii şi vîscoelasticităţii clasice, pentru comportări exclusiv de tip mecanic.

Neglijarea anumitor parametri fizici, de exemplu temperatura, care intervine în mod natural în descrierea comportării unui anumit mediu, este abandonată în capitolul VIII, după ce în capitolul VII sînt expuse cu o claritate deosebită noţiuni şi chestiuni fundamentale de termodinamică a mediilor continue : cel de-al doilea principiu al termodinamicii, metoda stării locale şi potenţialul termodinamic, formularea legilor complementare, problema decuplării disipărilor termică şi intrinsecă — legea de conducţie. Apoi, în ultimul capitol referitor la ecuaţiile constitutive sînt analizate efectele termomecanice în cazul fluidelor compresibile clasice şi al mediilor hiperelastice, o atenţie deosebită fiind de asemenea acordată elasticităţii şi termoelasticităţii liniare, iar în continuare sînt consacrate cîte un paragraf extinderii rezultatelor deja obţinute pentru mediile vîscoelastice. Sînt prezentate astfel modelele vîscoelastice cele mai simple (Kelvin — Voigt şi Maxwell) dar în acelaşi timp se indică şi modul în care metoda se aplică unor modele cu un număr sporit de parametri. În sfîrşit, în ultimul paragraf se arată modul în care metoda stării locale se utilizează în cazul celor mai simple legi ale elasto-plasticităţii, exemplificîndu-se prin cazul micilor perturbaţii, admiţînd valabilitatea ipotezelor de liniarizare şi pentru evoluţii izoterme.

Capitolele IX şi X cuprind un număr de chestiuni concrete simple a căror analiză permite compararea proprietăţilor mediilor deja prezentate în scopul unei mai exacte aprecieri a naturii lor fizice. Astfel, în capitolul IX, după examinarea chestiunilor de echilibru, necesară pentru punerea în evidenţă a deosebirii dintre fluidele compresibile şi cele incompresibile, în continuare, folosind rezultatele oferite de curgerile simplă, staţionară sau nestaţionară se poate sesiza satisfăcător diferenţa dintre fluidele vîscoase şi fluidele perfecte; este prezentat de asemenea cazul curgerii fluidelor care se abat de la comportarea de tip Newton. Ultimul capitol al cursului este consacrat unor chestiuni de acelaşi tip însă în cazul solidelor, neglijîndu-se efectele inerţiale. Sînt expuse succint problemele clasice ale elasticităţii, precum şi chestiuni elementare de plasticitate şi vîscoelasticitate, fără a se omite consideraţii extrem de semnificative vizînd latura fizică a problemelor.

Volumul conţine o anexă în care sînt prezentate pe o însemnată întindere elemente utile urmăririi cursului : vectori şi tensori, noţiuni asupra funcţiilor convexe. În plus, un paragraf special este consacrat termostaticii sistemelor cu un număr finit de parametri.

În încheiere, cititorul găseşte sistematizate pe cele 10 capitole un număr de 213 probleme, unele cu indicaţii de rezolvare care permit aprofundarea materialului teoretic expus. Volumul conţine un index alfabetic pe noţiuni şi o bibliografie cuprinzînd o listă de 19 lucrări generale remarcabile din domeniul mecanicii mediilor continue.

Structura cursului permite utilizarea sa cu maximum de succes de către cei interesaţi de studiul mecanicii moderne a mediilor continue, chiar dacă pornesc de la grade diferite de pregătire iniţială. Bagajul de cunoştinţe oferit este de altfel absolut necesar oricărui cercetător sau inginer care doreşte să lucreze cu succes în diferite ramuri ale mecanicii mediilor continue.

H. Paven

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848